

Johannes Wallis, S.T.D.
Geometriæ Professor Savilianus Oxoniæ.



Johannes Wallis, S. T. D.
Geometriæ Professor Savilianus Oxoniæ

MECHANICA:

SIVE,

De MOTU,

TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS*, SS. Th. D. Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majestati* à Sacris.

PARS PRIMA.

IN QUA,

De Motu Generalia.
De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.
De Libra.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impensis *Mosis Pitt*, ad Insigne *Cervi* in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.

HONORATISSIMO DOMINO

D. GULIELMO BROUNCKER,

EQUITI AURATO;

Baroni BROUNCKER de *Newcastle*, Vicecomiti BROUNCKER de *Lions*; Serenissimæ REGIÆ Majestatis, pro Re NAUTICA Commissario; Serenissimæ REGINÆ Cancellario: *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Præsidi Dignissimo.



N habes tandem (Honoratissime Domine,) eorum partem, quæ, Tuis Regiæque Societatis (cui Tu jam à pluribus annis summo cum honore Præsides) mandatis obsequens, anno ab hinc secundo, prælo com-

miseram. Sperâram equidem Opus integrum breviore tempore absolvendum fore: Sed, partim ob eam, quam causantur Typothetæ, rei difficultatem, & insolentiorem typos ponendi modum; partim ob meam (Oxonio agentis) perpetuam ferè à prælo absentiam; partim quod aliis subinde occurrentibus negotiis impediti Typothetæ non huic potuerint semper intenti esse; factum est, ut in longius protractum sit negotium quam speraverim. Hinc est, quòd, quem totum unâ vice proditurum Tractatum destinaveram, jam particulatim prodeat. Cujus jam habes Partem Primam, *quæ totius Fundamenta continet; &, speciatim, De* Libra *doctrinam. Quam propediem sequetur* Secunda, (*quæ De* Centro Gravitatis *erit; ejusque* Calculo, *in figuris quam plurimis curvilineis, atque ex his oriundis solidis, & superficiebus curvis, satis intricato:) Utpote cujus partem maximam jam absolverunt operæ. Et, post illam,* Tertia; *quam primum per Preli difficulta-*

tes

tes licebit. Hoc autem, quicquid eſt, Tuo potiſſimum nomini dicandum duxi; non tantùm ob eam quam Tibi debemus obſervantiam, (quæ tamen maxima eſt,) eamque quam à pluribus annis expertus ſum tuam in me propenſam Amicitiam: Sed & ob eam, quam cum ſummâ Nobilitate conjunctam habes, ſummam hujuſmodi rerum Intelligentiam. Quanquam enim graviſſimis negotiis aliàs occupatus; tum quæ rem Nauticam *ſpectant, quibus Sereniſſimo* Regi *inſervis; tum quæ Sereniſſimam* Reginam, *cujus tu curas negotia; tum quæ, cui Tu Præſides,* Societatem Regiam: *Eâ tamen in rebus Mathematicis perſpicaciâ, ſummoque ingenij acumine fretus es, quaſi tu huic tantùm negotio intentus eſſes, & nulli ſecundus. Verum quidem eſt, tum ea quæ hic habes, tum eorum quæ mox inſecutura ſunt partem maximam, ante plures annos ſcripta fuiſſe, (quod norunt ſaltem ij in quorum privatos uſus exſcripta fuerunt exemplaria; & quibus*

bus

bus jam urgentibus prodeunt :) Sed eò audacius in lucem jam emitto : quòd Tibi antehac perlustrata non displicuerint, & Te jubente prodeant, Tu porro perge, quod facis, rem literariam & ornare & promovere : Nec averseris interim,

Novemb. 10. 1669.

Tui observantissimum

Joh. Wallis.

Mechanica :

MECHANICA:

Sive, De MOTU, *Tractatus Geometricus.*

CAP. I.

De Motu Generalia.

DEFINITIONES.

I. Mechanicen, *appello*, *Geometriam de Motu.*



Echanicæ artes, per contemptum dici solent illiberales illæ Cerdonum artes, & his similium, quas rude vulgus exercet: ad quas Labore magis quàm Ingenio videtur opus. Et distingui solent, non à Geometriâ tantùm, sed ab aliis etiam *Ingenuis*, (quæ mente magis quàm manu exerceri solent; atque acumen animi vel postulant vel faciunt;) *Liberalibus* dictis; ut quæ *Liberos* deceant, ut, *Servos*, Serviles illæ & illiberales.

In re Geometricâ; *Mechanicè* quid factum, non Geometricè, dici solet: quando rudi χειρεργίᾳ, vel materialis instrumenti applicatione, aliisve mediis non absimilibus, aliquid metimur: non, ἀποδεικτικῶς. Puta; Si quis, admoto Filo, ad Diametrum primò, deinde ad Perimetrum Circuli, quam hæc ad illam rationem habeat, investigatum iret; eamque, experimento facto, triplâ paulò majorem inveniret, vel triplam sesquiseptimam proximè: *Mechanicè* factum diceretur. Secus autem;

 quum

quum *Archimedes*, modo Geometrico, & Demonſtrationibus ab ipsâ Circuli naturâ petitis, eandem in libro περὶ τ' κύκλυ μετρήσεως inquiſivit.

Nos neutro dictorum ſenſu *Mechanicen* dicimus. Sed eam Geometriæ partem intelligimus, quæ *Motum* tractat : atque Geometricis rationibus, & ἀποδεικτικῶς, inquirit, Quâ vi quiſque motus peragatur.

Nomen ἀπὸ τ' Μηχανῆς ſortitur : quia *Machinis* conſtruendis maximè inſerviat. An autem *Mechanica*, *Mechanica*, dicatur, (numero ſingulari,) an (pluraliter) *Mechanica*, *Mechanicorum* ; perinde eſt. Id eſt, τὰ περὶ τῶν Μηχανῶν, an Ἡ περὶ τῆς Μηχανῶν, (ſcil. τέχνη vel ἐπιστήμη, vel διδασκαλία.) Nam ad eandem formam dicuntur, *Grammatica*, *Logica*, *Phyſica*, &c. ut intelligatur, vel ἡ γραμματική, λογική, φυσική ; vel τὰ γραμματικά, λογικά, φυσικά. Hoc eſt, Ἡ περὶ τῆς γράμματα, περὶ τῦ λόγυ, περὶ τ' φύσεως, (τέχνη, ἐπιστήμη, διδασκαλία,) aut τὰ περὶ τῆς, *&c.* Quâ de re videatur, ſi libet, *H. Stephanus*, *De abuſu Græcæ Linguæ*.

Sed & (ab ἵστημι, *pendo*, *pondero*,) etiam *Statica*, dici ſolet, vel Mechanice tota, vel ea ſaltem pars quæ de *Ponderibus* agit ; quæ, quanta ſint, ad *Libram* (σταθμὸν) ſolent examinari.

II. Per Motum *intelligimus*, *Motum localem*.

Quamquam enim de pluribus Motuum generibus agant Logici, aliique ; puta Generatione, Augmentatione, Alteratione, *&c.* (quæ omnes an ad Motum Localem reduci poſſint, non libet hic diſquirere :) Nos *Motum* hic in famoſiori ſignificatu intelligimus de Motu Locali ; quæ φορά, *Latio*, dici ſolet.

Circa Motum autem, multa conſideranda veniunt : ut Vis, Tempus, Reſiſtentia, Longitudo, Momentum, Impedimentum, Celeritas, Gravitas, Pondus, *&c.*

III. Momentum, *appello*, *id quod motui efficiendo conducit.*

IV. Impedimentum, *id quod motui obſtat*, *vel eum impedit.*

Momentum, eâdem ratione à verbo *Moveo* deſcendit, atque *Impedimentum* ab *Impedio* : Eâdem ſcilicet Analogiâ, quâ & alia verbalia, in *men* & *mentum* finita, à ſuis verbis. Nam, ut à *Luceo*, *Lumen* : à *Fluo*, *flui* ; *Flumen* : à *Nuo*, *Numen* : à *Fulgeo*, *fulſi* ; *Fulmen* : à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum* ; *Fulcimen*, & *fulcimentum* : à *Moneo*, *monui*, *Monumentum* ; & à *Monitum*, *Monimentum* : à *Flo*, *flavi*, *flatum* ; *Flamen* : à *Fari*, *fatum* ; *Famen* : à *Frango*, *fregi*, *fractum* ; *Fragmen*

men & *fragmentum* : ab *Ago*, *egi*, *actum* ; *Agmen* : ab *Arceo*, *arcui*, *arctum* ; *Armentum* : à *Rado*, *rasi*, *rasum* ; *Ramentum* : à *Cædo*, *cecidi*, *cæsum* ; *Cæmentum* : à *Nosco*, *novi*, *notum* ; *Nomen*, & *nobile* : Sic, à *Moveo*, *movi*, *motum* ; *Momen*, *Momentum*, & *Mobile*. Sed & *Moles*, *molior*, *molimen* : nisi quis hæc à μοχλεύω, deducta malit.

Ad *Momentum* refero, *Vim motricem*, & *Tempus*. Quæ, quò majora sunt, eò magis efficitur motus.

Ad *Impedimentum*, refero, *Resistentiam*, & *Distantiam*. Quæ, quò majora sunt, eò magis motus *Impeditur*.

V. Vim motricem, *vel etiam* Vim *simpliciter*, *appello Potentiam efficiendi motum.*

VI. *Per* Tempus, *intelligo*, *Temporis spatium id*, *in quo motus transigitur.*

VII. Resistentiam, *sive* Vim resistendi, *Potentiam Motui contrariam* ; *sive quæ motui resistit.*

VIII. *Per* Distantiam *sive* Longitudinem motûs, *intelligo*, *Longitudinis spatium illud quod motu transigitur.*

IX. Celeritas, *est affectio motûs ex comparatione Longitudinis & Temporis resultans* : *Utpote quæ*, *Quo Tempore quanta Longitudo transigitur*, *determinat.*

X. Æqualis Celeritas, *est*, *quæ Æqualem Longitudinem*, *Æquali tempore*, *transigit.*

XI. Major Celeritas, *est*, *quæ Majorem Longitudinem Æquali Tempore transigit* : *vel*, *in Minori Tempore*, *Longitudinem Æqualem.* *Et quidem*, in eâ ratione Major, *quâ*, *vel illa Longitudo*, *Major est* ; *vel Tempus*, *Minus.* Minor ; *quæ contrà.*

XII. Gravitas, *est vis motrix*, *deorsum* ; *sive*, *ad Centrum Terræ.*

QUodnam sit, in consideratione Physicâ, Gravitatis principium ; non hic inquirimus. Neque etiam, An Qualitas dici debeat, aut, Corporis Affectio ; aut, quo alio nomine censeri par sit. Sive enim ab innatâ qualitate in ipso gravi corpore ; sive à communi circumstantium vergentiâ ad centrum ; sive ab electricâ vel magneticâ Terræ facultate, quæ gravia ad se alliciat ; & effluviis suis, tamquam catenulis, attrahat ; sive aliàs undecunque proveniat ; (de quo non est ut hic moveamus litem :) sufficit,

 ut

ut Gravitatis nomine, eam intelligamus, quam ſenſu deprehendimus, Vim deorſum movendi, tum ipſum Corpus grave, tum quæ obſtant minùs efficacia impedimenta.

Et quidem, quamquam de Naturali Gravitate (prout concipi ſolet) ſeu ipſa corporis affectione, quâ, ſuâ ſponte (ut ſolet dici) deorſum tendit, directè intelligatur: Tamen, quoniam nihil incommodi inde proventurum videtur in ſequente propoſitionum ſerie, etiamſi de externâ vi continuâ deorſum premente recta ad Centrum Terræ velit quis eas interpretari; non eram ſolicitus vel hanc ex Gravitatis definitione excludere. Quæ enim de Gravitate affirmantur, de quâcunque Vi continuâ, recta ad Terræ Centrum movente, perinde vera ſunt; ſive ſit ea vis innata, ſive adventitia.

Quæ autem de Gravitate dicta ſunt, reſpectu Centri Terræ; perinde de quâvis alia motrice Vi continuâ poterunt intelligi, reſpectu ſui quò tendit termini. Adeoque ſi vox ea, particulari ſignificatui hactenus accommodata, quatenus Terræ Centrum reſpicit, latiori ſenſu intelligatur, de quâvis vi motrice continuâ, recta ad ſuum terminum movente: non minus vera erunt quæ traduntur; ſed & forſan magis accuratè dicta; dum generalia generaliter efferuntur. Sed quoniam de Gravitate ſolent ea ſpeciatim tradi, quæ continuæ Vi Motrici univerſaliter conveniant: Ego etiam communi errori eatenus me accommodavi, ut interim moneam, generaliter eſſe vera, quæ ſpeciatim efferuntur. Ut mox dicetur fuſius.

XIII. *Per* Pondus *intelligo gravitatis menſuram.*

PEndo ſeu *Pendeo*, & *Pondus*, parem habent inter ſe cognationem atque apud nos *Weigh* & *Weight*; (quæ à Latinorum *Veho* videntur deſcendiſſe: ſicut etiam *Wayn* & *Wagon*, quæ Latinis *Vehes* & *Vehiculum* dicuntur.)

An verò *Pondus* à *Pendo*, an hoc ab illo dicatur, non magni intereſt; an, quod ego malim, utrumque.

Eſt utique Verborum *Pendo* & *Pendeo* duplex ſignificatus. Prior eſt *To Hang*: A quo ſignificatu *Pondus* dictum puto; (ſicut a *Tego*, *Toga*; a πέμπω, *Pompa*; a ῥέμβομαι, *Rhombus*, &c.) idemque ſignificare quod Græcis Ὅλκη & propriè de *Gravi pendente* dictum: Adeoque, ab *Onere* diſtingui, quod Græcis Ὄγκος, (unde & *Onus* deſcendiſſe videtur;) ut *Pondus*, ſit quod *Appendet*; *Onus*, quod *incumbit*, Grave: Βάρος, utrumque. Sed &, ab ἄγω, Ἄχθος etiam adhuc latius videtur; *quod quocunque Adigit*, vel impellit; cùm illa tria Gravium nomina (ὅλκη, ὄγκος, βάρος,) non niſi *deorſum tendentia* deſignent: utut laxiori ſenſu promiſcuè non rarò uſurpentur omnia. Poſterior

Posterior Verborum significatus, qui est *To Weigh*, à Pondere ortum traxisse videtur: quod est, *Appensa ad libram pondera examinare.*

A priori significatu, dicimus, *Appendo*, *Suspendo*, *Dependeo*, *Pendulus*, &c. A posteriori, *Perpendo*, *Expendo*, *Impendo*, *Rependo*, *Pensum*, *Pensio*, &c. (ex more veterum, qui *Pendere* solebant Nummos, quos nos *Numeramus.*) Sed & *Perpendo*, *Expendo*, &c. sensu Metaphorico, ad Animum transferuntur; à posteriori significatu; quando ut ad Libram Pondera, sic Res Animo pensitamus: sicut, à priori, dicitur, *Animi pendere*, *suspensus animus*, *spe pendulus*, &c.

Differunt autem *Pendo*, & *Pendeo*, non aliter quàm Transitivum ab Intransitivo. Quod in ejusmodi formæ Verbis, usu venit. Ut *Pando*, *Pateo*; *Mando*, *Maneo*; *Tendo*, *Teneo*; (*carceri Mando*, *in carcere Maneo*; *morem Obtendo*, *mos Obtinet*; *Tenet sententia*, *ad me Attinet*, *Pertinet*, &c.) *Vendo*, *Veneo*; *Venundo*, *Venum eo*; *Circundo*, *Circumeo*; reliquáque fere a *Do* & *Eo* composita; ut *Subdo*, *Subeo*; *Prodo*, *Prodeo*; *Reddo*, *Redeo*; *Trado*, *Transeo*; *Edo*, *Exeo*; *Condo*, *Coeo*; *Abdo*, *Abeo*; *Addo*, *Adeo*; *Indo*, *Ineo*; *Obdo*, *Obeo*; *Perdo*, *pereo*; & siqua sunt similia.

Ego autem, neglecto si quod est inter *Pondus* & *Onus* discrimine, (quo *Libram*, illud; hoc, *Vectem*, magis spectet;) per *Pondus* jam intelligo, illam, in utrovis, Gravitatis mensuram, quam ad Libram solemus examinare.

Pondus sic intellectum, aut Gravitas etiam, prout vel in Movente, vel in Mobili, consideratur; ita vel ad Movendi, vel ad Resistendi vim pertinebit: Adeoque nunc ad Momentum, nunc ad Impedimentum refertur.

Et quidem, cùm ex omnibus Virium generibus, non aliud sit quod accuratius ad examen revocari solet, quàm Pondus; solemus, ad hujus normam, reliquas tum vires tum Resistentias æstimare; eásque tantas reputare, quanto Ponderi æquipollent.

Et quamquam tum Pondus, tum Vis etiam, ex æquo respiciant, vel vim Movendi, vel vim Resistendi: cùm tamen, ut plurimum, quod motum itur Pondus sit, seu Grave; Vis autem, quæ efficiendo motui adhibetur, sit non rarò Vis Humana, aut Animalium, aut Ventus etiam, aut vis Elastica, aliæve plures, non minus quàm Grave Pondus: Ponderis nomine, plerumque, vim Resistentiæ, in sequentibus designabimus; &, Virium nomine, vim Motricem. Ubi secus erit intelligendum; dictorum series satis indicabit.

XIV. Directionem Mobilis, *aut etiam* Motûs, *appello, rectam qua tendit Mobile.* (*Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam,* Motûs Longitudinem *appello.*) *Sin curvâ feratur Mobile,* (*cujus Directio in singulis punctis immutetur;*) *ea est, pro singulis punctis, motûs Directio, quæ curvam in illis punctis Recta contingit.*

XV. Directionem Virium, *seu* Moventis, *appello, Rectam quà tendit vis Motrix. Motûsque mensuram secundum hanc æstimatam, appello* Motûs Altitudinem.

Estque hæc Virium directio in Descensu Gravium, Recta deorsum ad Centrum Terræ, quo Gravia sponte suâ tendunt. Quales quidem Rectæ, quamquam in Centro coëant omnes, pro Parallelis tamen haberi solent: Tum quòd sensuum judicio tales sint (non enim valent sensus distinguere inter verè parallelas, & quæ tantillum à parallelismo declinant;) Tum etiam quia si intelligatur, verbi gratiâ, Libræ Jugum adhuc longius à Terra removeri, ad infinitam distantiam; erit ea declinatio quâvis assignabili minor.

XVI. Declivitatem, *seu* Gradum Declivitatis, *appello, Respectum illum, qui ex motûs Altitudine & Longitudine comparatis,* (*ob variam Directionis Motûs ad Directionem Moventis positionem,*) *emergit. Atque* Acclivitatem *similiter; quæ à Declivitate non aliter differt quàm quòd altera Descensum, Ascensum altera respiciat.*

Fig. 1. Puta, F O, declivis; O F, acclivis recta.

XVII. Æqualem Declivitatem, *appello, quæ, æquali peractâ Longitudine, æqualem Altitudinem peragit. Atque* Acclivitatem, *similiter.*

XVIII. Majorem Declivitatem, *vel* Acclivitatem, *dico, quæ, æquali peractâ Longitudine, majorem Altitudinem peragit; vel, minori Longitudine, Altitudinem æqualem. Et quidem,* eâ ratione majorem, *quâ vel Altitudo illa major est, vel Longitudo, minor.* Minorem; *quæ contrà.*

Verbi

VErbi gratiâ. Sit F P, directio moventis, (puta, recta ad Horizontem perpendicularis ;) F O, F B, vel F C, directio motûs, (puta, obliqua quælibet, per quam descendat Grave.) Si F O, F C, longitudine æquales, sint Æque-altæ : *Æqualiter declives*, dico : sin vero, Longitudine æqualium altera, ut F O, sit Altior ; eandem & *Magis declivem* dico. Similiter ; si Æquè-altæ F O, F B, (quarum altitudo sit ipsi F P, æqualis,) sint & Longitudine æquales ; *Æqualiter declives* dico : Sin altera, ut F O, sit brevior ; eandem & *Magis declivem* dico. Et utrobique, *eâdem ratione magis declivem*, quâ vel F O est Altior quàm F C, vel Brevior quàm F B. Fig. 1.

XIX. Obliquitatem *verò*, *hujusve mensuram*, *appello*, *Angulum quem facit cum Perpendiculo*, (*vel Directione Moventis*,) *Directio Motûs*, *seu Linea quâ fertur Mobile*.

Puta, ∠ F P.

XX. Inclinationem *verò ad* Horizontem, *appello*, *obliquitatis complementum*, *sive quem facit Angulum ad Horizontem*, *aut ad rectam Directioni moventis perpendicularem*.

Ut F O P.

DEclivitatem autem ab *Obliquitate*, & *Inclinatione*, (quamquam ex unâ reliquæ dependeant,) distinguere necesse duxi ; quoniam *Obliquitas* & *Inclinatio* Angulis mensurari solent ; Ea vero *Declivitatis* ratio mihi tractanda videbatur, quæ rectarum inter se rationes respiciat. Quippe quæ inde dependent, non quidem vel Obliquitatis vel Inclinationis Angulo, sed Altitudini rectarum longitudine æqualium proportionalia, vel in reciprocâ ratione Rectarum Altitudine æqualium, in sequentibus deprehendentur.

Porro ; Cùm ea quæ de Gravitate disertè dicta sunt in sequentibus, non ita Gravitati sint peculiaria, quin ut plurimum alii cuivis continuæ vi motrici accommodanda veniant ; adeoque & universaliter tradi debere videantur, (ut modo dictum est :) Cur illud nominatim de Gravitate protulerim, causa est, quod, cùm Gravium motus frequentiùs considerationi hominum exponi soleat, adeoque vocabula huic accommoda , menti familiariùs se offerant, citiùs animo percipienda duxerim quæ de hoc motu (qui ex multis unus est, sed præ cæteris magis notabilis,) traderentur, atque ad hujus deinde normam intelligerentur reliqui.

Ea vero fient generalia (nec minùs interim demonstrata) interpositâ laxiori hac Gravitatis (cum connexis) definitione.

XXI. *Per* Gravitatem, *laxiùs acceptam, intellige, Vim quamvis continuam in quamcunque plagam motricem : per* Terræ Centrum, *intellige, Terminum quò tendit vis illa motrix* ; *Per* Perpendiculum, *vel* Rectam ad Terræ Centrum, *vel etiam* Rectam Horizonti perpendicularem, *intellige, Lineam Directionis Vis motricis : Per* Descensum & Ascensum ; *Appropinquationem & Elongationem à Termino Vis Motricis : Per* Rectam Horizontalem, , *vel* Horizontale Planum ; *Rectam, seu planum, lineæ directionis moventis ad angulos rectos : Per Descensum, vel Ascensum* Obliquum ; *Lationem secundum Lineam quæ Lineam Directionis moventis obliquè secat, ad moventis Terminum Accedendo, vel inde Recedendo. Cæteraque similiter accommodanda sunt.*

XXII. Machinas, *appello, Instrumenta motibus examinandis, vel etiam facilitandis, forinsecus adhibita.*

QUalia sunt *Libra, Vectis, Trochlea, Cochlea, Axis in Peritrochio, Cuneus,* & similia. Quorum Definitiones suis locis sequentur.

Priusquam autem ad Machinas illas separatim considerandas accedamus, quas Mechanicorum scriptores tractare solent : Præmittenda erunt communia quædam, quæ omnes ex æquo spectant. Quæ sint Principiorum loco, & à quibus reliqua dependent, quæ de singulis postea tradenda erunt.

Idque eò magis mihi faciendum incumbere videatur : Quia qui antehac tractandum hoc suscepere negotium, videntur citra Principia constitisse : nec ab imis eruta fundamentis, etiam ea quæ sana sunt, tradidisse : Sed postulâsse potiùs, quæ, utut vera sint, Demonstratione tamen aliquâ videntur indigere : Unde, tum, in iis quæ consequuntur, minùs acquiescat animus ἀποδείξεως avidus, tum & ea minùs valeat, in novâ materiâ, ampliare.

PRO-

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Quæ ad æqualia eandem habent rationem, sunt inter se æqualia. Et contra.

$A = E. \quad 2A = 2E. \quad 3A = 3E. \quad rA = rE.$ Fig. 2.

Puta; Si A, E, sint inter se æqualia; erunt & inter se æqualia 2 A, 2 E; item 3 A, 3 E; Et, universaliter, *r* A, *r* E; cujuscunque rationis Index sit *r*. Per 7, 9, 11. *Prop.* 5 El. *Euclidis*.

PROP. II.

Ubi ratio ex duabus pluribusve componitur; Datis componentibus, datur composita. Nempe, Multiplicatis invicem exponentibus componentium, ut habeatur Exponens Compositæ.

$a \times e = ae =$ *æ*. $\quad 2 \times 3 = 6.$ Fig. 3.

$$\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{1} = \frac{9}{4} = 2\tfrac{1}{4}.$$

Sunto, datarum Rationum componentium, dati Indices seu Exponentes (rationum πηλικότητας appellat *Euclides*; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; malim *Quotientes*; id enim vult quod ex termini Antecedentis per consequentem divisione emergit,) *a*, *e*. Datur, inquam, Ratio ex his composita; Ea nempe cujus Exponens est *æ* $= a \times e$. (per 5. *Def.* 6. Elem.) Quod erat demonstrandum. Similiter ostendetur si plures essent rationes componentes, puta *l* ad *r*, *m* ad *s*, *n* ad *t*; quæ ex his componitur, est ratio *l m n* ad *r s t*. Propter $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s} \times \frac{n}{t} = \frac{lmn}{rst}$

SCHOLIUM.

QUò hæc rectius intelligantur, notandum erit (quod non pauci perperam accipiunt,) Rationes, puta Dupli, Tripli, *&c.* Indices seu Exponentes habere 2, 3, *&c.* Unde denominationem sumunt: Nempe Quotientes terminorum Antecedentium per suos Consequentes divisorum. Adeóque Rationis 4 ad 2, Exponens est 2; quia 2) 4 (2: quam itaque *Dupli* rationem dicimus. Rationis 6 ad 2, Exponens est 3; quia 2) 6 (3: quæ propterea dicitur *Tripli* ratio. Et universim, Rationis l ad r, Exponens est $\frac{l}{r}$: nempe Quotiens Antecedentis l per Consequentem r divisi.

Hos Indices sive Exponentes, appellat *Euclides*, *Rationum* πηλικότητας; quod *Quantitates* exponunt Interpretes; exposuissent tutius *Quotientes.* Quippe illud vult *Euclides*, quod ex Antecedentis per consequentem divisione emergit. Dixit autem πηλικότητας potius quàm ποσότητας, ut illos etiam Quotientes comprehenderet quæ non essent numeri Integri, sed Fracti, aut Surdi, *&c.* Nam *Quotientis* sive ποσότης vocem, strictè sumptam, non de aliis Quotientibus usurpabant quam qui essent numeri integri; qui ostenderent *Quotuplus*, ποσαπλάσιος, esset Antecedens Consequentis: At πηλικότης de Quotiente quolibet, utcunque Fracto, vel Irrationali, dicebatur; qui non modo *Quotuplus*, (puta, *Duplus*, *Triplus*, *Quadruplus*, &c.) Sed & πηλικοπλάσιος *Quantuplus* esset Antecedens Consequentis, ostenderet: puta *Duplus cum semisse*, *Triplus cum quadrante*, *Quadruplus cum besse*, &c.

Definit autem *Euclides*, 5 *Def.* 6. *Rationem ex Rationibus compositam*, dici, *quando illius Exponens* (πηλικότης) *ex harum Exponentibus invicem multiplicatis conficitur.* Adeoque, *ex* Rationibus *Dupli & Tripli*, *componi*, *Rationem Sextupli*; (quia scilicet $2 \times 3 = 6$:) nihil aliud est quod vulgò dicimus, *Duplum Tripli*, *esse Sextuplum.* Item, *Ex Dupli & Sesquialteri rationibus*, *componi rationem Tripli* (quia $2 \times \frac{3}{2} = 3$,) idem est atque, *Duplum Sesquialteri*, *Triplum esse.* Quoniam verò hoc in omnibus rationum compositionibus non ita commodè, ad posteriorem hanc formam, proferri possit; priorem itaque adhibere solent. Puta; *Rationem* 9 *ad* 4, *ex rationibus* 3 *ad* 4 & 3 *ad* 1, *componi*; potius dicunt, quàm *Duplum Sesquiquartum*, ($\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.) *esse*, *Subsesquitertii*, *Triplum*; quia scilicet $\frac{9}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{1}$. Idipsum tamen utrobique significatur. Quod quidem qui probè advertunt, tum *Euclidis* definitionem rectiùs intelligent, tum & de perplexâ in componendis rationibus difficultate minùs fortasse conquerentur. Saltem quid

nos

nos in hac & ſequentibus propoſitionibus intellectum volumus, ſatis aſſequentur; qui Rationes ſolemus per earum Jndices vel Exponentes deſignare. Puta, 2 A, Duplum quantitatis A; 3 A, Triplum A; $\frac{3}{2}$A, Seſquialterum; $2 \times \frac{3}{2}$A, Duplum Seſquialteri; $\frac{l}{r}$ A, quod eſt ad A, in ratione l ad r; $\frac{l}{r} \times \frac{m}{s}$A, quod eſt ad A, in ratione quæ ex l ad r, & m ad s, componitur. Et in reliquis ſimiliter.

PROP. III.

Ubi Ratio ex duabus componitur; Datâ Compoſitâ, & componentium unâ; datur altera. Nempe, Diviſo exponente Compoſitæ, per Datæ componentis Exponentem, ut habeatur Exponens reliquæ. Similiter; ſi ex quotlibet componitur; Datâ compoſitâ, & vel unâ, vel quotlibet componentium, vel ex his compoſitâ; datur compoſita ex reliquis.

$a)\alpha(e.$ $\qquad$ $2)6(3$ $\qquad$ Fig 3.

$\frac{l}{r})\frac{lmn}{rst}(\frac{mn}{st}$ $\qquad$ $\frac{lm}{rs})\frac{lmn}{rst}(\frac{n}{t}$

SIt Rationis Compoſitæ Exponens datus α; datúſque unius ex componentibus Exponens a: Datur, inquam, reliquæ Exponens e. Cum enim (per præced.) Sit $a \times e = \alpha$: ſi dividatur α per a; prodibit e, Exponens reliquæ componentis.

Similiter; Si compoſitæ ex pluribus Exponens $\frac{lmn}{rst}$ detur, uniuſque ex componentibus $\frac{l}{r}$; illo per hunc diviſo, prodit exponens compoſitæ ex reliquis $\frac{mn}{st}$. Datiſque tum Exponente compoſitæ $\frac{lmn}{rst}$, tum aliquot componentium, aut ex his compoſitæ, $\frac{l}{r}$ & $\frac{m}{s}$ vel $\frac{lm}{rs}$; datur exponens reliquæ, vel ex reliquis (ſi plures ſint) compoſitæ, $\frac{n}{t}$.

SCHOLIUM.

Monendum interim eſt; Intelligendam eſſe hanc Propoſitionem (& quæ hinc dependent) de ejuſmodi Ratione Componente datâ, cujus Exponens eſt verè quantitas, & finita: Non o, vel Infinitum.

Quippe, ſi, quæ ſupponitur componentium altera data, ſit nullius quantitatis (puta, ut o ad 1;) quæcunque ſit Componens reliqua, Compoſita etiam nullius erit quantitatis: Adeóque, ex compoſitâ, & illâ componente, quæ fuerat Componens reliqua non conſtabit. Eſt enim tam $0 \times 1 = 0$, quam $0 \times 2 = 0$, aut $0 \times 3 = 0$. *&c. Nullies Unum*, perinde *nullum* eſt, atque *Nullies Duo*, vel *Nullies Tria*, &c.

Similiter; Si ſit Componentium altera, ratio *Infiniti*, (cujus index ſit ∞.) Eſt enim tam $\infty \times 1 = \infty$, quam $\infty \times 2$. vel $\infty \times 3$, *&c. Infinities Unum*, pariter ſunt *Infinita*, atque *infinities Duo*, vel *infinities Tria*, &c. Non conſtabit itaque, ex his datis, quænam ſit illa Ratio, quæ intelligitur, cum *Infinita* compoſita, etiam *Infinitam* exhibere.

PROP. IV.

Si Ratio quævis cum Æqualitatis ratione componatur; eadem manet quæ priùs ratio. Et contra; Quæ cum aliâ ratione compoſita, illam non immutat; eſt Æqualitatis ratio.

Fig. 4.

$2 \times 1 = 2$. $3 \times 1 = 3$. $r \times 1 = r$.

$$\frac{A}{E} \times \frac{1}{1} = \frac{A}{E}. \quad \frac{A}{E} \times \frac{r}{r} = \frac{rA}{rE} = \frac{A}{E}.$$

Puta; Quæ ex Æqualis & Dupli rationibus componitur, eſt Dupli ratio: Quæ ex Æqualis & Tripli, eſt Tripli ratio, *&c.* Sive; Quod eſt Duplo Æquale, Duplum eſt: Quod Triplo, Triplum, *&c.*

Sequitur ex 2 hujus. Exponens utique Rationis Æqualium eſt 1; (Nam Æquale quodvis per ſuum Æquale diviſum, Quotientem exhibet 1:) Qui quemvis alium exponentem multiplicans, eundem reſtituit; (quippe $r \times 1 = r$.) Adeoque conſtat Propoſitum.

Con-

Conversa similiter patet. Quippe si $\frac{A}{E} \times r = \frac{A}{E}$; erit $r = 1$.

PROP. V.

Quantitates qualibet, in eâdem ratione vel auctæ vel diminutæ; in eâdem quâ prius ad invicem ratione constituuntur.

$A.B.C :: 2A.\ 2B.\ 2C :: \frac{1}{2}A.\ \frac{1}{2}B.\ \frac{1}{2}C :: rA.\ rB.\ rC.$ Fig. 5, 6.

SEquitur ex præcedente. Est utique $\frac{rA}{rB} = \frac{A}{B} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{B}$. Item $\frac{rA}{rC} = \frac{A}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{A}{C}$. Et $\frac{rB}{rC} = \frac{B}{C} \times \frac{r}{r} = \frac{B}{C}$. Adeoque $rA.\ rB.\ rC.$ in eâdem ad invicem ratione atque A. B. C.

Idem demonstrabitur ex 16 Element. 5. Cum enim sit, ex hypothesi, ut r A ad A, sic r B ad B; erit (permutando) r A, ad r B, ut A ad B. Et de reliquis similiter.

PROP. VI.

Quæ ex Reciprocis Rationibus componitur Ratio, est ratio Æqualitatis. Et contra; Æqualitatis Ratio, ex Reciprocis componitur.

$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$ $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6}.$ $\frac{A}{E} \times \frac{E}{A} = \frac{AE}{AE} = 1.$ Fig. 7, 8.

PUta; Dupli Dimidium, Triplum Trientis, Quadrantis Quadruplum; Sesquialteri Subsesquialterum, &c. tantundem valent atque Æquale.

Sequitur ex 2 hujus. Quippe si ratio A ad E, cum ejusdem reciprocâ E ad A, componatur: prodibit ratio AE ad AE, quæ æqualitatis est.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

HÆc quæ præcedunt Lemmata, ex Rationum doctrinâ desumpta, huc transtulimus, ob frequentem eorum in sequentibus usum.

Demonstrationes vero ita comparatæ sunt (tum hic tum in sequentibus passim) ut & Praxin Arithmeticæ quam *Speciosam* vocant, directè respiciant; & ad appositas figuras lineares (si cui id gratius videbitur) facile accommodentur.

Exempli gratiâ. Ad propositionem primam; perinde est sive A & E habeantur pro Symbolis sive speciebus Arithmeticis; sive pro linearum adscriptarum, his notis designatarum indiciis. Utrovis enim modo procedit demonstratio, sive de Lineis, sive de Literis.

Sic ad Prop. 2 & 3 perinde succedit demonstratio, sive sint *a*, *e*, Symbola Arithmeticæ speciosæ, adeoque *æ* quod ex harum invicem multiplicatione oritur: sive designet *a* Altitudinem, *e* Basin, Parallelogrammi *æ*. Quippe Parallelogramma in ratione ex Basium & Altitudinum rationibus compositâ constitui notum est. Adeoque, ut Parallelogrammorum similium Lateribus homologis repræsentari solent rationes Componentes; ita Parallelogrammis ipsis, eorumve Areis, rationes Compositæ.

Sic ad Prop. 4. Perinde est, sive intelligamus quantitates A, E, per eandem *r* multiplicatas, ipsas *r* A, *r* E (multiplicatione factas) in eadem ratione exhibere cum ipsis A, E; sive Parallelogramma *r* A, *r* E, (propter æquales Altitudines *r*,) esse ad invicem ut eorum Bases A, E.

Et similiter ad Prop 5. Sive dicamus quantitates A, B, C, per eandem *r* multiplicatas, producere *r* A, *r* B, *r* C, ipsis A, B, C, proportionales; Sive parallelogramma *r* A, *r* B, *r* C, (propter æqualem altitudinem) Basibus proportionalia; Sive etiam, in similibus triangulis latera A, B, C, & *r* A, *r* B, *r* C, in eadem ad invicem esse ratione: perinde est.

Item in Pro. 6. Perinde est sive intelligamus $A \times E = E \times A = AE$: sive æqualia dicamus Parallelogramma quorum Altitudines sunt ut A ad E, Bases verò his reciprocæ, nempe ut E ad A.

Id saltem interest; Quod demonstrationes, si tanquam Arithmeticæ habeantur; Universaliores sunt, & de quocunque Quantitatum genere pariter concludunt: Si verò ad Lineas vel Parallelogramma speciatim respiciant; de his solùm directè concludunt, (idque ex vi Propositionum particularium de his in Elementis demonstratarum: quales sunt, *Parallelogrammorum rationes componi ex rationibus Laterum Homologorum circa æquales angulos*; *Parallelogramma æquialta, esse ut*

Bases;

Baſes; *Parallelogramma quorum Baſes & Altitudines ſunt reciproce proportionales, eſſe Æqualia*, &c.) de aliis verò, non niſi accommodando ad alias quantitates (puta, Vires, Pondera, Velocitates, Declivitates, *&c.*) eaſdem analogias quas in Lineis vel Parallelogrammis, *&c.* demonſtratæ fuerant.

Ego interim, utut Demonſtrationes hujuſmodi, prout Arithmeticæ ſpecioſæ praxin directè reſpiciunt, (adeoque univerſaliores exiſtunt) potiores exiſtimem; adeoque adſcriptas figuras, non niſi unum aliquem ex multis caſum, qui ſub Univerſali propoſitione continetur, (cui reliqui tamen, in aliis quantitatibus ſunt conformes,) exhibere: Si tamen malint alii (quibus Demonſtrationes Lineares magis arrident) ut rationes omnes, in quibuſcunque quantitatibus (quamquam Lineis ſint Heterogeneæ) Lineis utcunque exhibeantur; atque hinc ad ipſas de quibus agitur quantitates transferantur, His etiam ſat ſieri vellem. Idque eo magis, ut quam inter ſe conjunctæ ſint hæ binæ demonſtrandi methodi, perſpiciatur; & quam facili negotio, demonſtrationes Rationum Lineares, Lineis exutæ, ſimpliciùs ſimul & univerſaliùs exhiberi poſſint.

PROP. VII.

Effectus ſunt, cauſis ſuis adæquatis, proportionales.

C . E :: 2 C . 2 E :: 3 C . 3 E :: *r* C . *r* E. Fig. 9.

Nam, ſi Cauſa ut C, efficit ut E; etiam altera C, cæteris paribus, alterum E efficiet; tertia tertium, *&c.* Adeoque 2 C, 2 E; 3 C, 3 E; & quotlibet C, totidem E. Hoc eſt Dupla C, duplum E; tripla triplum; & ſimiliter in quâvis aliâ *Multiplicium* ratione.

Sin dicatur; Propter circumſtantias evenire poſſe, ut C altera, priori parem, non producat effectum: Jam non erit hæc aut illa C, ut C, adæquata Cauſa; ſed potius, hæc vel illa C, his aut illis circumſtantiis adjuta vel impedita; Quod eſt contra Hypotheſin.

Atque idem oſtendetur, de quâvis ratione *Submultiplicium*. Verbi gratiâ: Si 2 C efficiat ut 2 E; etiam C efficiet ut E. Si enim C efficiat vel plus vel minus quam E; etiam 2 C ſimiliter efficeret plus vel minus quam 2 E, (per primam partem hujus demonſtrationis:) Quod eſt contra hypotheſin. Similiter oſtendetur, de quavis aliâ ſubmultiplicium ratione; Puta, Si 3 C efficiat ut 3 E; etiam C efficiet ut E, *&c.*

Idem

Idem de quavis *Commensurabilium* ratione, sic ostenditur. Esto, verbi gratiâ, exposita Causarum ratio 2 ad 3, sive *n* ad *m*: erit eadem & effectuum ratio. Nam si causa ut 2 C, efficiat ut 2 E; etiam Causa ut C, efficiet ut E; (per secundam partem hujus;) adeoque (per partem primam) 3 C, ut 3 E. Quod erat propositum. Et similiter de quâvis commensurabilium ratione ostendetur, assumptâ in demonstrationem communi mensurâ. Puta; Si causa ut *n* C efficiat ut *n* E; etiam C efficiet ut E; adeoque *m* C, ut *m* E.

Quodque de Commensurabilibus ostenditur; Cùm nulla causa concipi possit, cur non de *Incommensurabilibus* similiter verum sit; (possitque etiam, de his, si opus sit, Demonstratione Apagogicâ evinci;) de omnibus pariter verum erit, Effectus Causis suis adæquatis proportionales esse. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

UNiversalem hanc Propositionem præmittendam etiam duxi; quoniam viam aperit, quà, ex purè Mathematicâ speculatione, ad Physicam transeatur; seu potius hanc & illam connectit.

PROP. VIII.

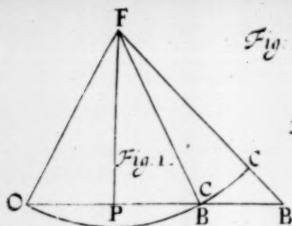
Contrariorum, quatenus contraria sunt, Aggregatum; æquipollet Excessui præpollentis: Congruentium verò; eorundem Summæ.

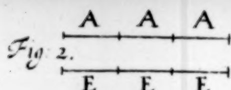
Fig. 10.

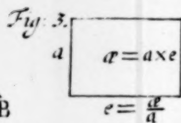
+ A	+ 3 A	— 3 A	+ A	— A	+ 3 A	— 3 A
— A	— 2 A	+ 2 A	+ A	— A	+ 2 A	— 2 A
+ 0	+ 1 A	—— A	+ 2 A	— 2 A	+ 5 A	— 5 A

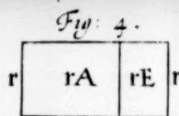
SUnto Contrariorum Signa + & —. Adeoque; Si illud *Sursum* designet; designabit hoc *Deorsum*: Si illud, *Addendum*; hoc, *Auferendum*, designabit: Et de aliis contrariis similiter. Sintque contrariorum quantitates A, 2 A, 3 A, *&c.* Erit + A — A = 0. + 3 A — 2 A = + A. — 3 A + 2 A = — A, *&c.* (Ut ex Additionum legibus constat.) Hoc est, Aggregatum æquivalet Excessui præpollentis. Quod erat propositum.

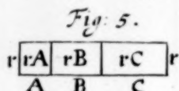
At

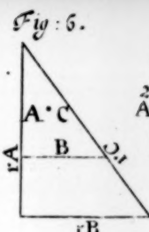

F
Fig: 1.
C
C
O
P
B
B

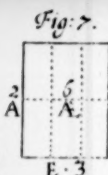

A A A
Fig: 2.
E E E

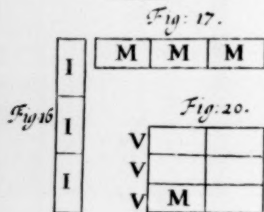

Fig: 3.
a
æ = a×e
e = æ/a

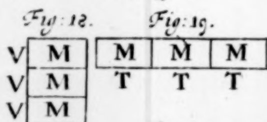

Fig: 4.
r
rA
rE
r
A
E

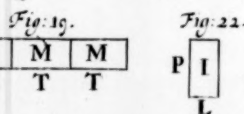

Fig: 5.
r
rA
rB
rC
r
A
B
C

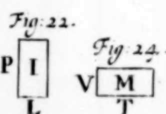

Fig: 6.
A·C
rA
B
C·1
rB

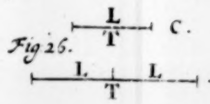

Fig: 7.
2
A
6
A
E·3

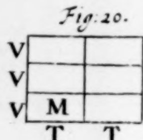

Fig: 17.
Fig 16
I
I
I
M
M
M

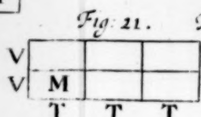

Fig: 18.
V M
V M
V M
Fig: 19.
M M M
T T T

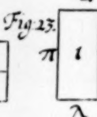


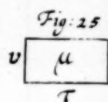

Fig: 22.
P
I
L
Fig: 24.
V
M
T

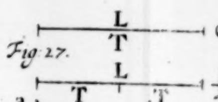

Fig 26.
L
T
C.
L
L
T

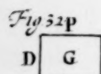

Fig: 20.
V
V
V
M
T
T

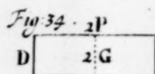

Fig: 21.
V
V
M
T
T
T

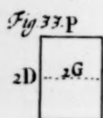

Fig 23.
π
ι
λ

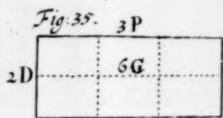

Fig: 25
υ
μ
τ

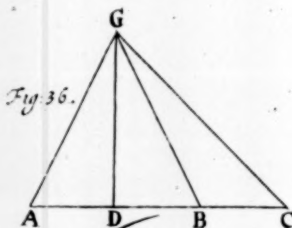

Fig 27.
L
T
L
T
T

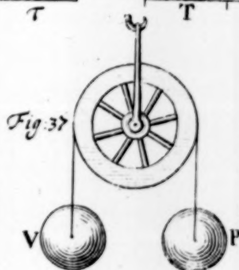

Fig 32 P
D
G

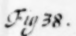

Fig 34. 2P
D
2G

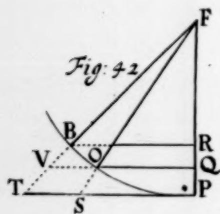

Fig 33. P
2D
2G


Fig 35. 3P
2D
6G

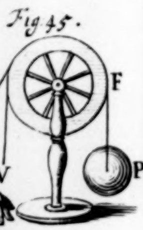

G
Fig 36.
A
D
B
C


Fig 37
V
P


Fig 38.

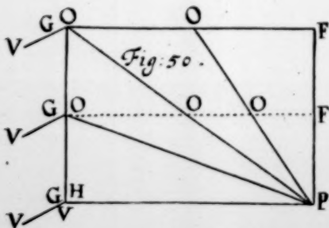

F
Fig: 42
B
R
V
O
Q
T
S
P

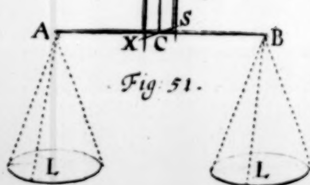

F
Fig 43.
F
T
TCP
P


Fig 45.
F
V
V
P


P
Fig 44
P
V
P

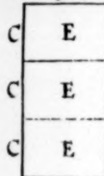

S
G
A
F
Fig 46
H
C
P
C

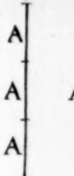

G O
O
F
V
Fig: 50.
G O
O
O
F
V
G H
P
V V

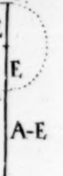

T
E
A
S
X C
B
Fig: 51.
L
L

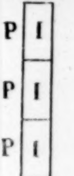

P
P

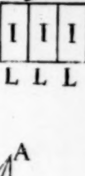

Fig: 8.
6
E
3
A
E 2

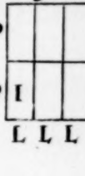

Fig: 9.
C E
C E
C E

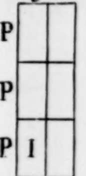

Fig10.
A
A
A

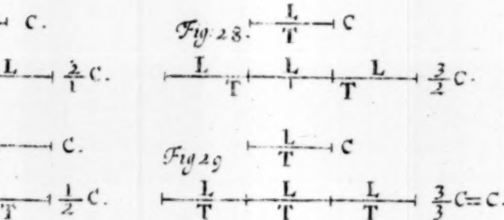

Fig: 11.
E
E
A
A-E

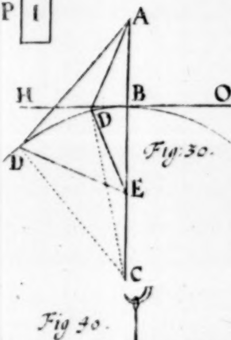

Fig: 12.
P I
P I
P I


Fig: 13.
I I I
L L L

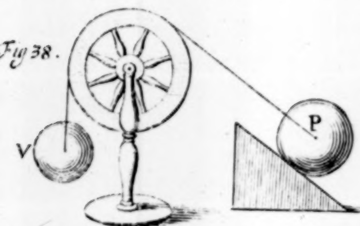

Fig: 14
P
P I
L L L

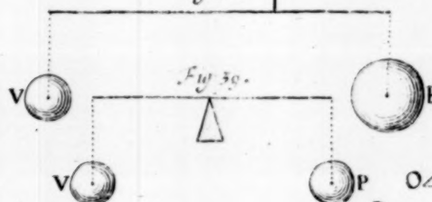

Fig: 15
P
P
P I
L L

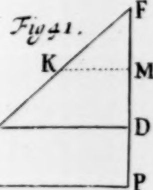

C.
L $\frac{2}{1}$ C.
C.
T $\frac{1}{2}$ C.
Fig: 28.
L T C
L T L L T L T $\frac{3}{2}$ C.
Fig 29
L T C
L T L T L T $\frac{3}{3}$ C = C.

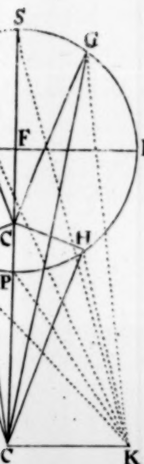

A
H B O
D
D
Fig: 30.
E
C

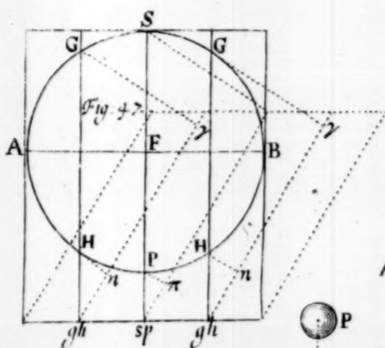

A G B
A B
Fig: 31.
A B

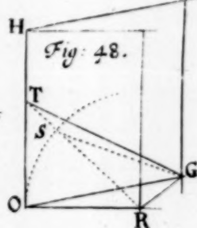

Fig 38.
V
P

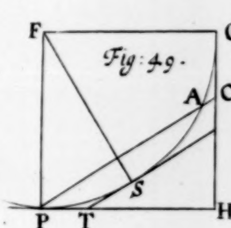

Fig 40.
V
Fig 39.
P
V
P

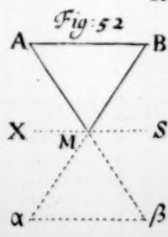

F
Fig 41.
K M
L D
O P

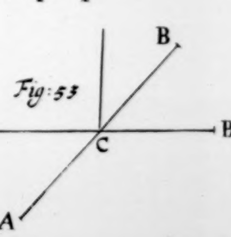

S
G
F
B
C
H
P
C
K

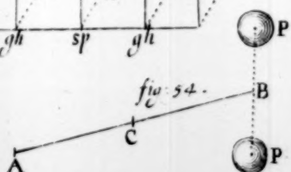

S
G G
Fig: 47.
γ ν
A F B
H P H
n π n
gh sp gh

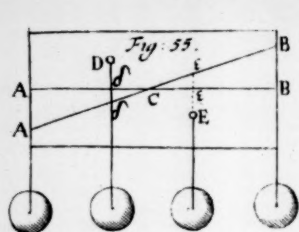

P
H
Fig: 48.
T
S
G
O R

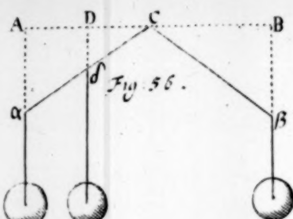

F G
Fig: 49.
A O
S
P T H

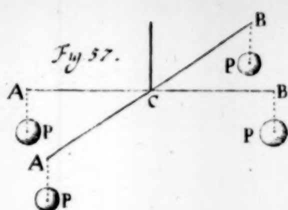

Fig: 52
A B
X M S
α β


B
Fig: 53
A B
C
A

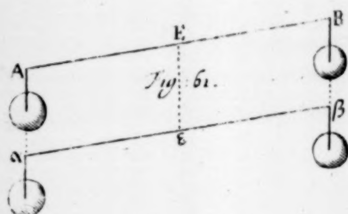

P
fig: 54.
B
C
A
P

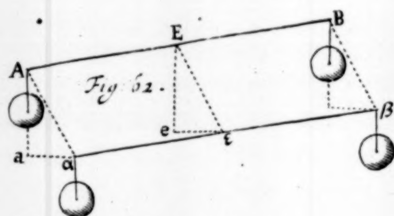

Fig: 55.

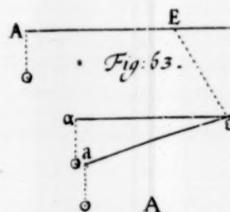

Fig: 56.

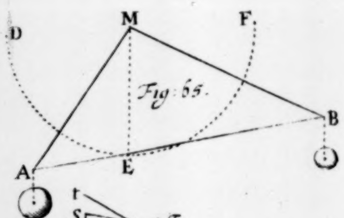

Fig 57.

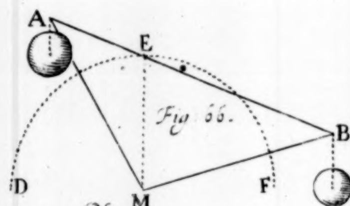


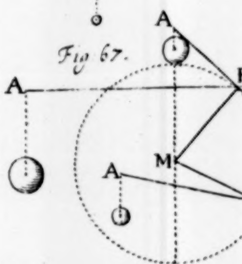

Fig: 61.

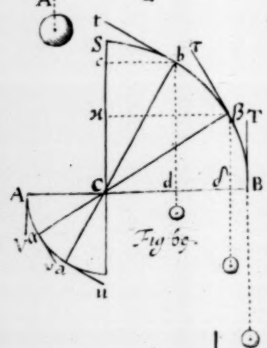

Fig: 62.

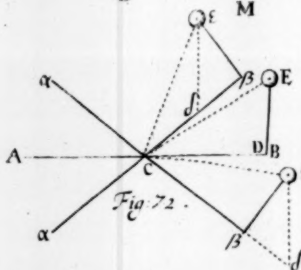

Fig: 63.


Fig: 65.
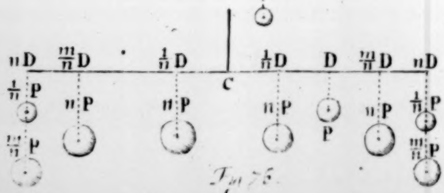

Fig: 66.


Fig 67.


Fig 69.


Fig: 72.

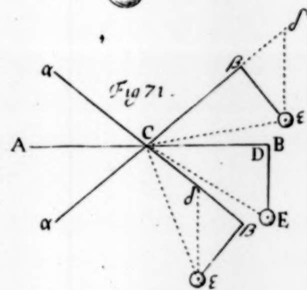

Fig 71.


Fig 75.

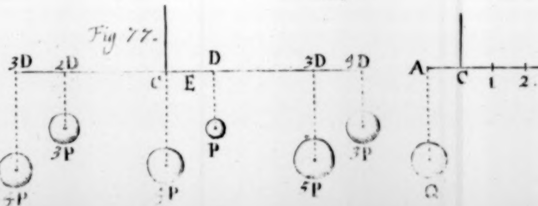
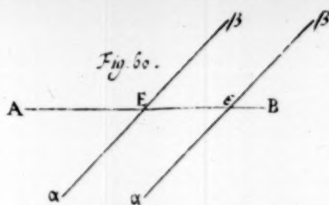
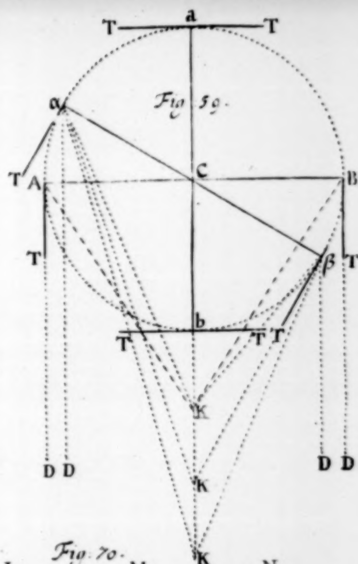
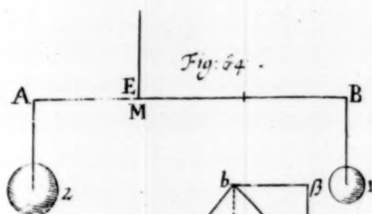
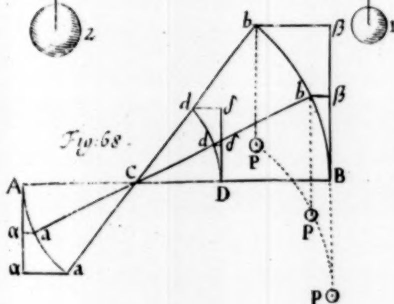

Fig 77.

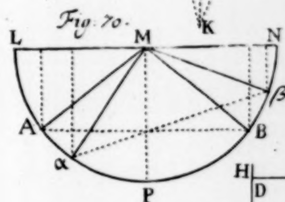
Fig. 58.

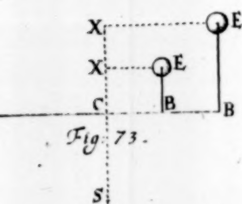

Fig. 60.
A
E
e
B
β
β
α
α

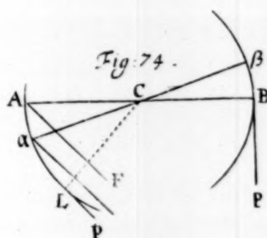

Fig. 59.
T
a
T
α
T
A
C
B
T
β
T
b
T
T
T
K
K
K
D D
D D

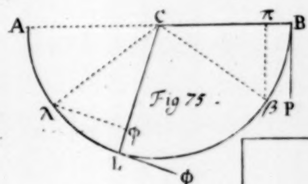

Fig. 64.
A
E
M
B
2
1

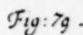

Fig. 68.
b
β
d
δ
b
β
d
δ
P
A
C
D
B
α
a
α
a
P
P

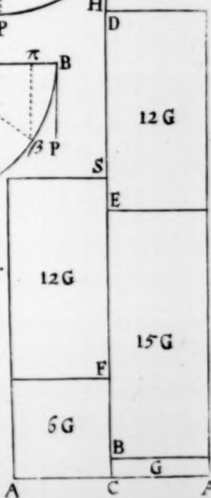

Fig. 70.
L
M
N
β
A
B
α
P

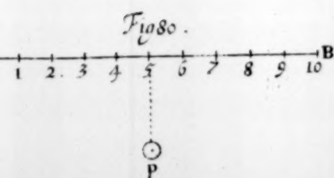

X
E
X
E
C
B
B
Fig. 73.
S

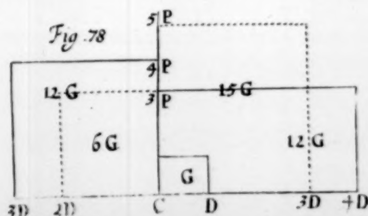

Fig. 74.
β
A
C
B
α
F
L
P
P


A
C
π
B
λ
Fig 75.
β
P
φ
L
Φ


Fig: 79.


H
D
12 G
S
E
12 G
15 G
F
6 G
B
G
A
C
A


Fig 80.
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
B
P


Fig. 78
5 P
4 P
12 G
3 P
15 G
6 G
12 G
G
3D
2D
C
D
3D
4D

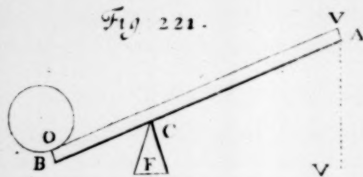


Fig 221.

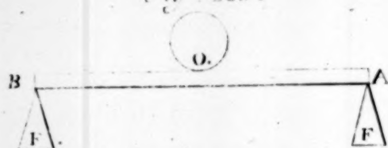


Fig: 222.



Fig 224.

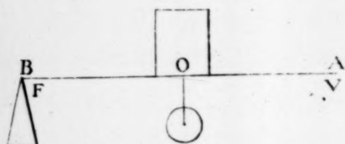


Fig: 227

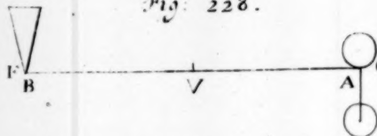


Fig: 228.

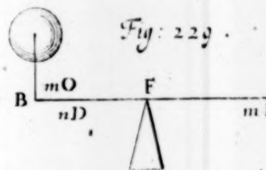


Fig: 229.

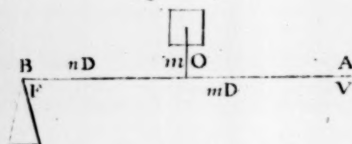


Fig: 230

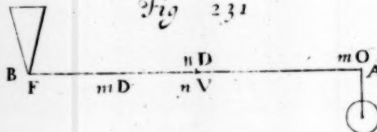


Fig 231



Fig: 232

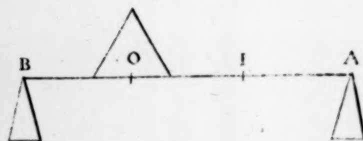


Fig: 233

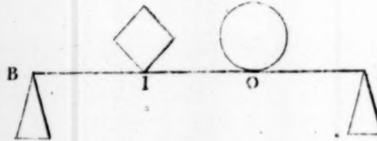


Fig. 234



Fig: 235

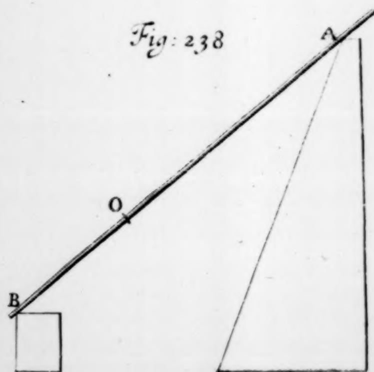


Fig: 238

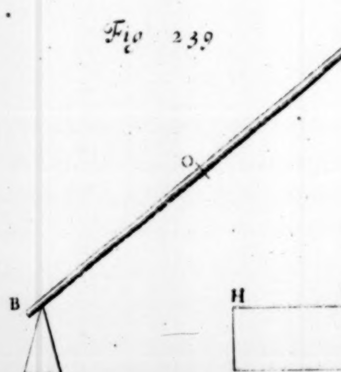


Fig: 239

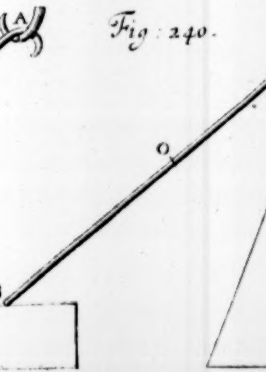
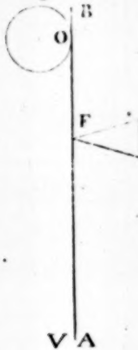
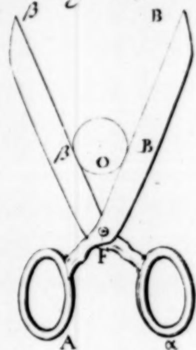


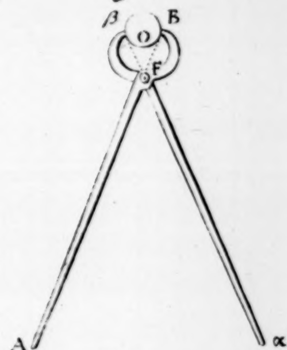
Fig: 240.

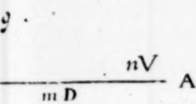
1


224.

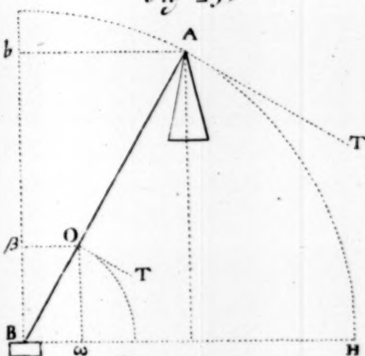

Fig 223.
B
O
F
V
A

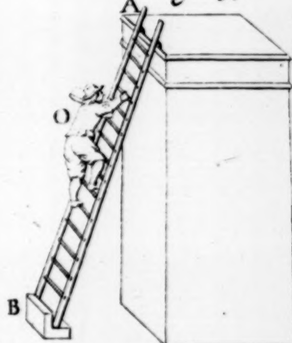

Fig : 225.
β
B
β
O
B
F
A
α

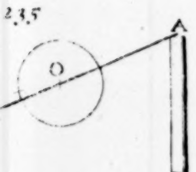

Fig 226.
β
B
O
F
A
α


A
V
nV
A
m D

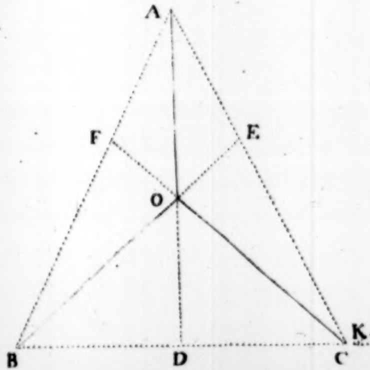

232
A


Fig 236
A
b
T
O
β
T
B
ω
H


Fig : 237
A
O
B


235
O
A
A


A


Fig : 241
A
F
E
O
B
D
C
K

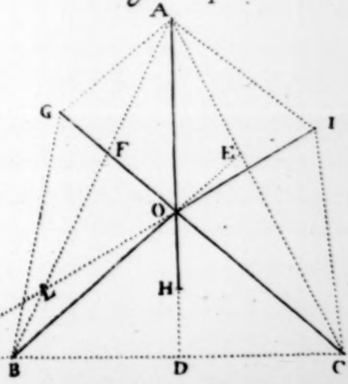

Fig : 242.
A
G
I
F
E
O
L
H
B
D
C

Fig: 243

Fig: 244.



Fig: 245.

Fig:



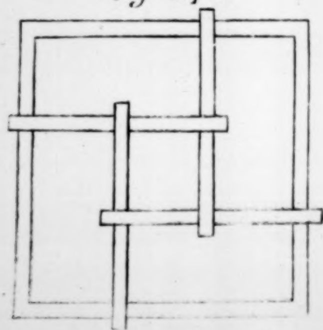


Fig: 246



Fig: 247

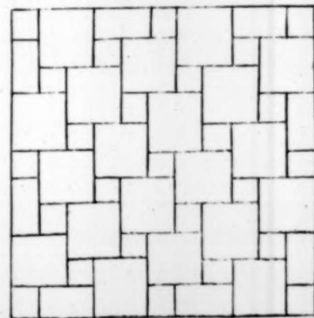
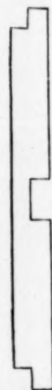


Fig 250

44.

Fig: 248

Fig: 249.



5.

Fig: 251.

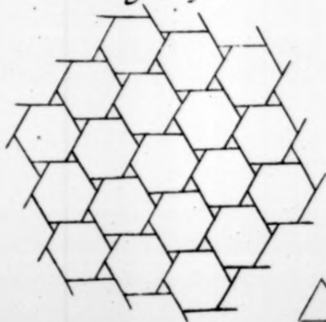


Fig: 252

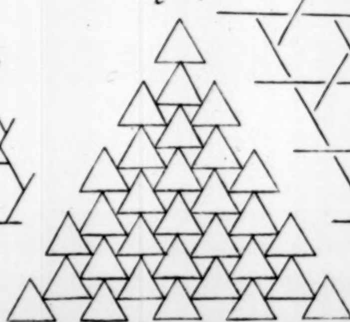
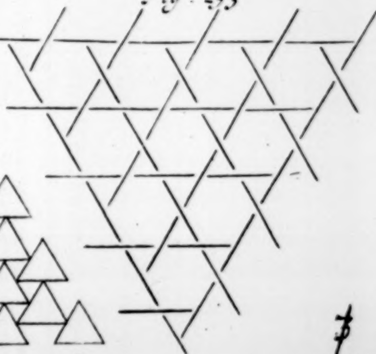
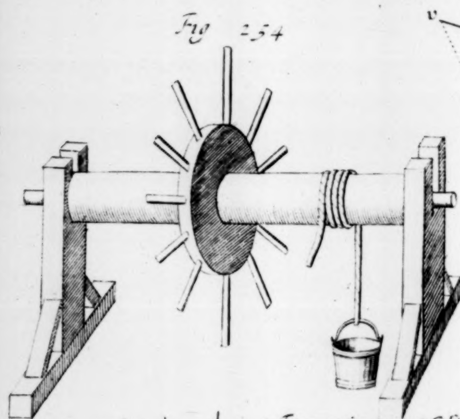
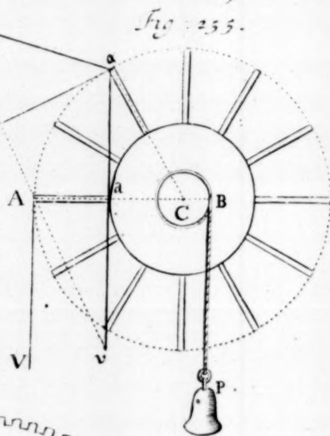
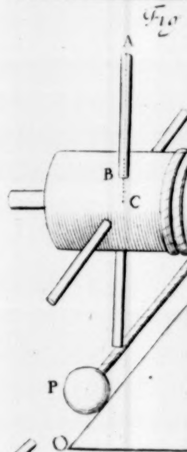


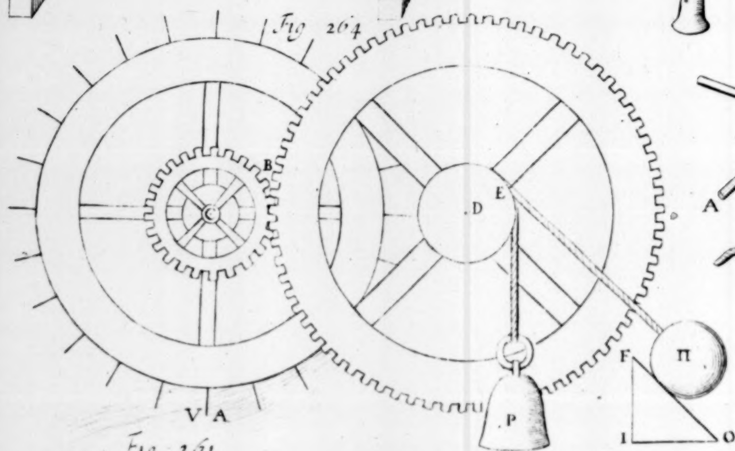
Fig: 253

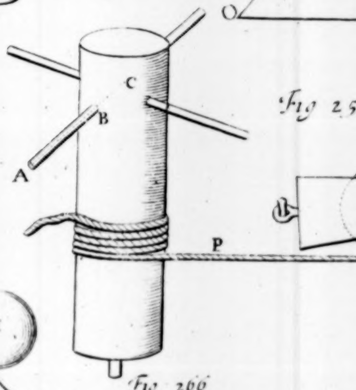


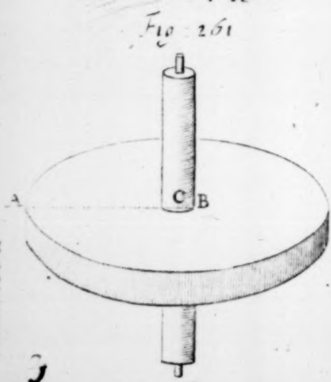

Fig 254

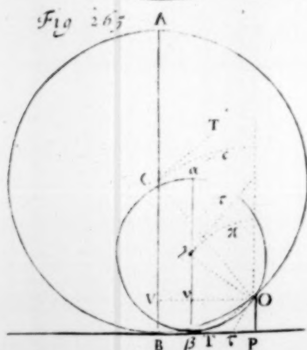

Fig 255.
v
a
V
A
a
C
B
V
v
P

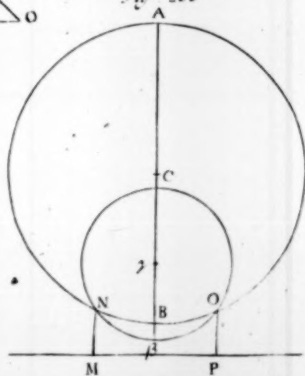

Fig
A
B
C
P
O

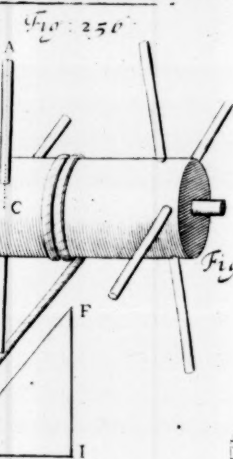

Fig 264
B
C
D
E
F
Π
P
V A
I
O

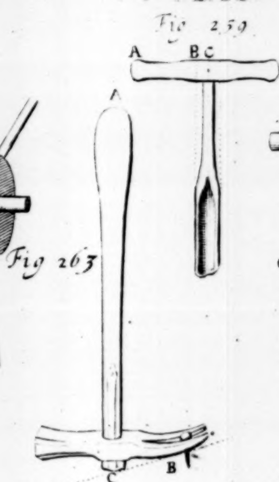

C
B
A
P

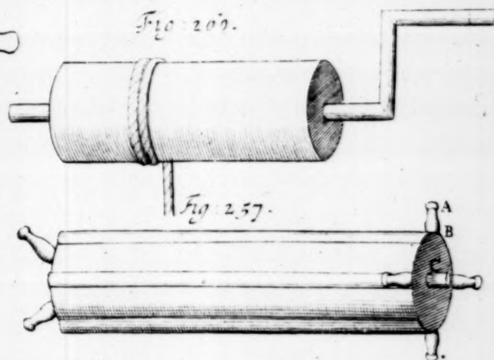

Fig 261
A
C
B

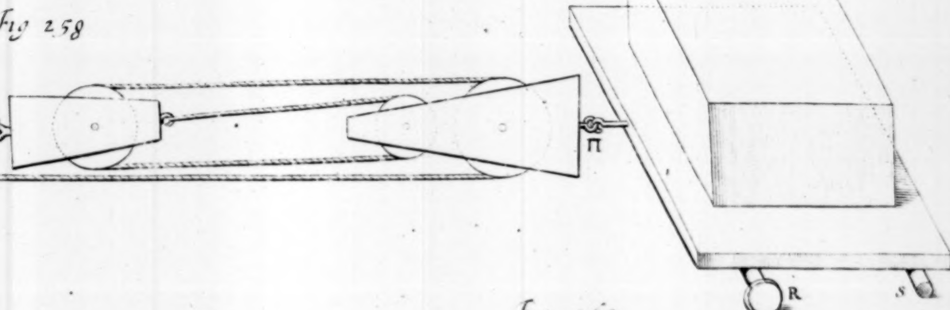

Fig 265
A
T
C
a
V
O
B
β
T
τ
P

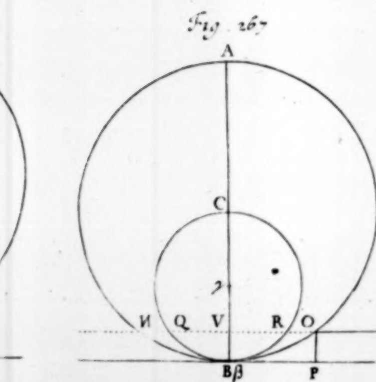

Fig 266
A
C
N
B
O
M
β
P

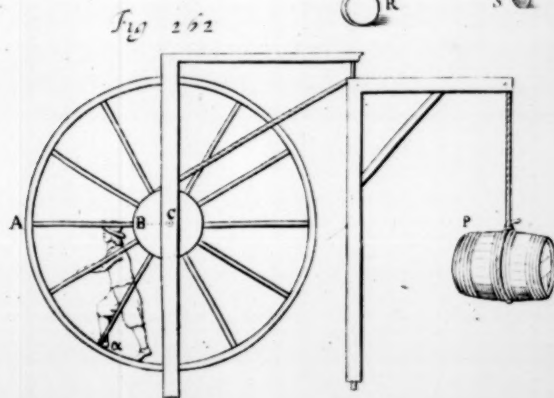

Fig: 250
A
C
F
I

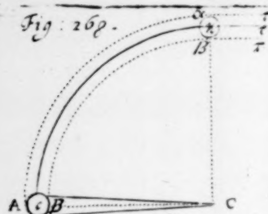

Fig 259
A
BC
A
Fig 263
C
B

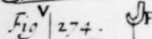

Fig: 260.
Fig: 257.
A
B
C

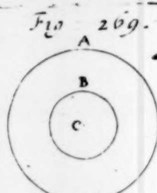

Fig 258
Π
R
S

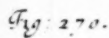

Fig. 267
A
C
N Q V R O
Bβ
P

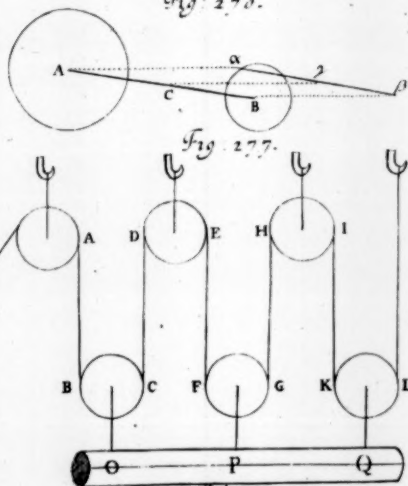

Fig 262
A
B
C
P
α


Fig: 268.
α
β
A
B
C

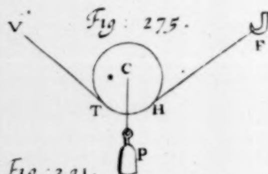

Fig 274.

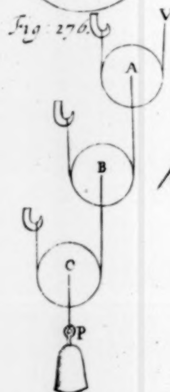

Fig 269.
A
B
C

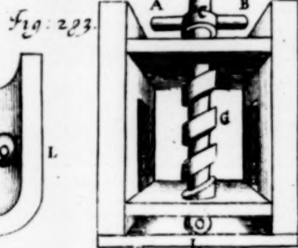

Fig: 270.

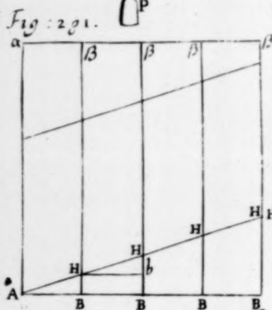

A
α
C
B
β
Fig: 277.
M
A
D
E
H
I
V.
B
C
F
G
K
L.

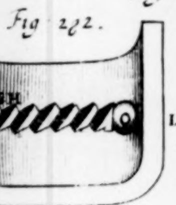

A
V
D
H
M
L
G
C
P

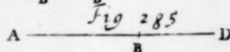

V
F
T
C
H
A
P

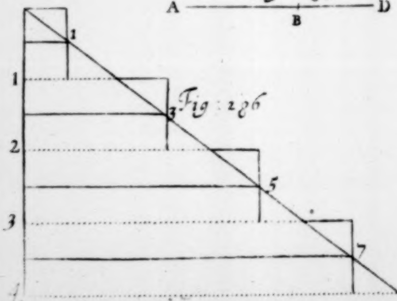

Fig: 276.
V
A
B
C
P

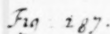

O
P
Q
A
B
L


Fig: 275.
V
F
C
T
H
P
Fig: 281.
a
β
H
b
A
B

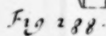

Fig 282.
B
C
A
D
K
L

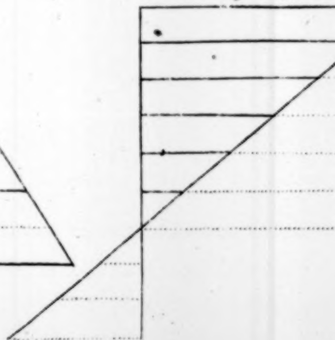

Fig 285
A
B
D

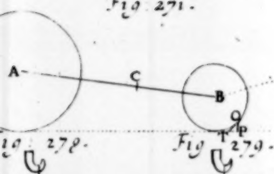

Fig: 286
1
3
5
7
2

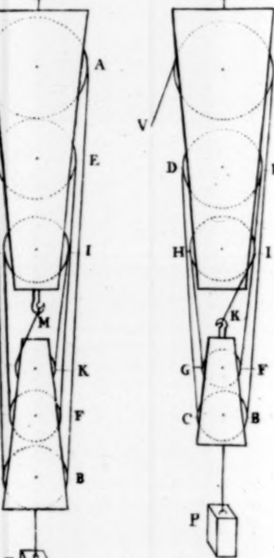

Fig: 287.

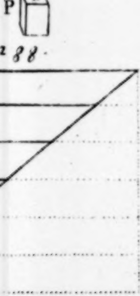



Fig 288.




Fig. 271.
A
C
B


Fig. 278.
Fig. 279.
A
E
I
K
F
B
V
D
H
M
G
C
P


288

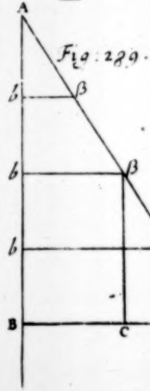
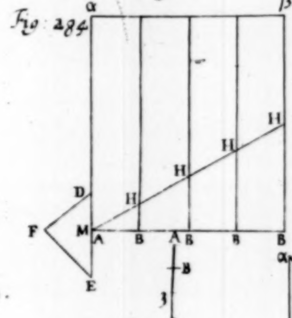
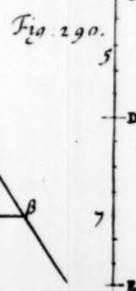
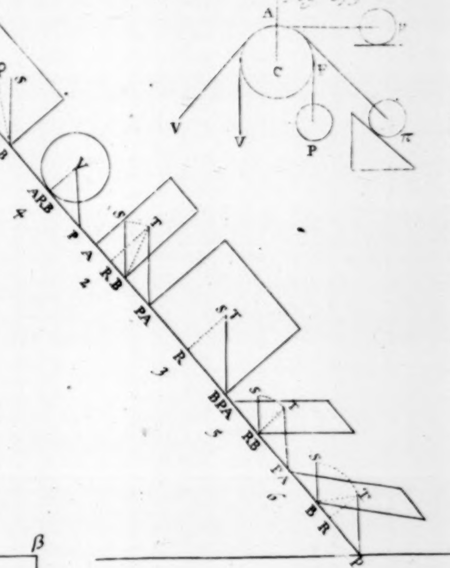

Fig. 289.
A
b
β
B
C

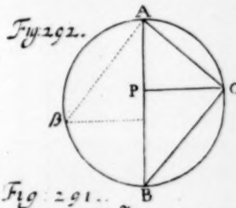


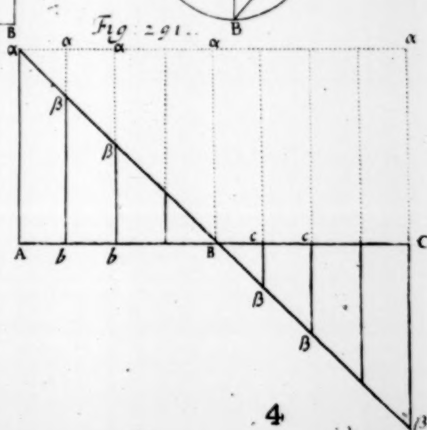

Fig. 280
A
B
H
b

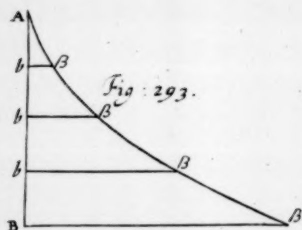

Fig. 284
α
β
D
F
M
E
A
B
H

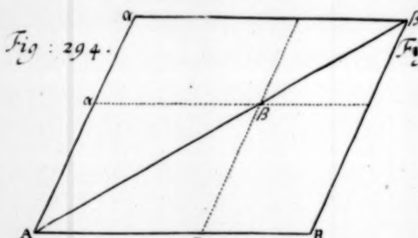

Fig. 290.
A
B
C
D
E
3
5
7

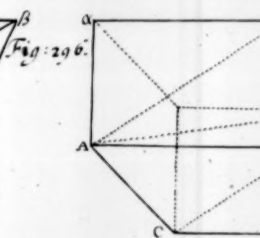

Fig. 272.
Fig. 273
A
C
V
P
π
R
PB
ARB
PA
RB
BPA
S
T
1
2
3
4
5
6

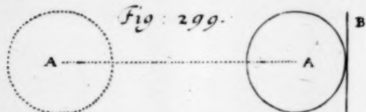

Fig. 292.
A
P
O
β
B

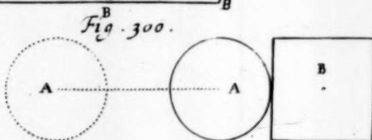

Fig. 291.
α
β
A
b
B
c
C
4











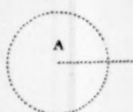
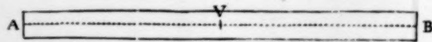
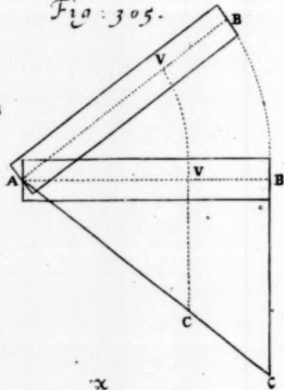


Fig : 303.





Fig

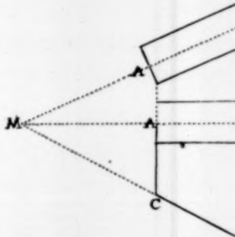


Fig : 304.

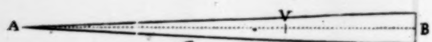
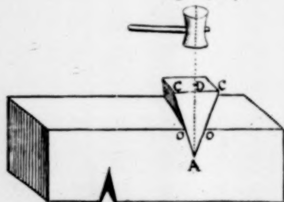
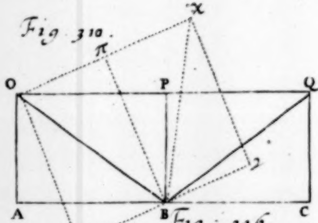
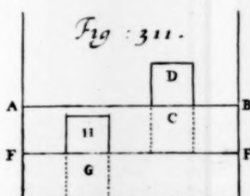
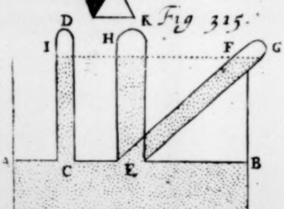


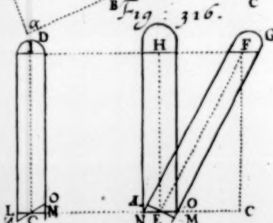
Fig 309.

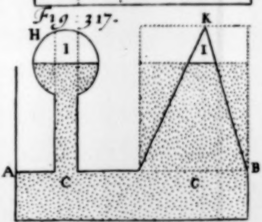


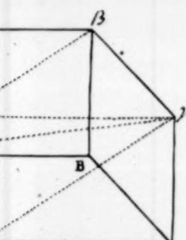


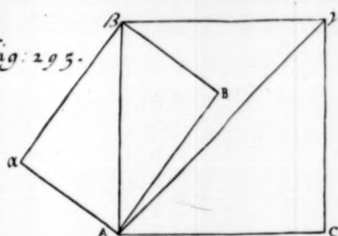


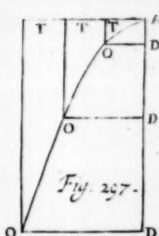


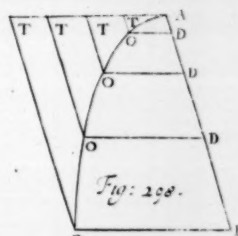


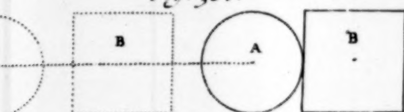


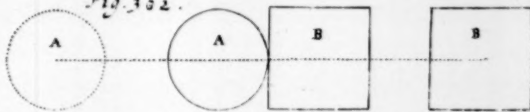

B
B

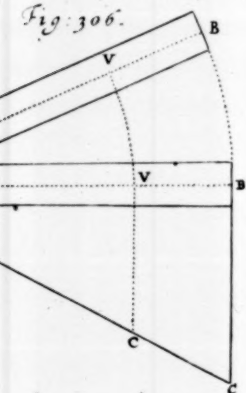

Fig: 295.
B
B
a
A
C

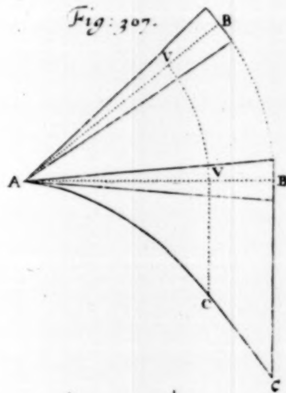

T
O
D
Fig: 297.

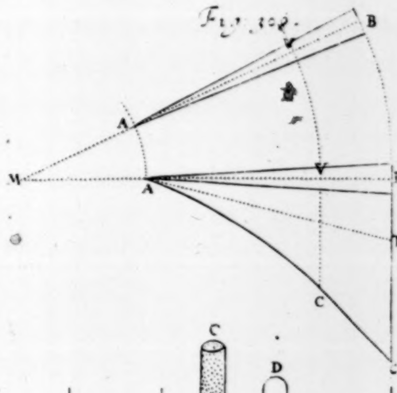

T
A
D
O
Fig: 298.

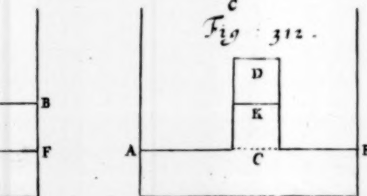

Fig: 301.
B
A

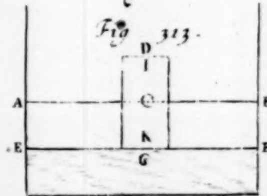

Fig. 302.
A
B

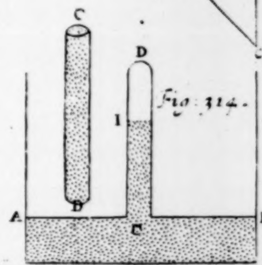

Fig: 306.
B
V
C

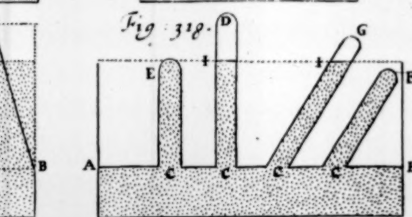

Fig: 307.
B
A
V
C

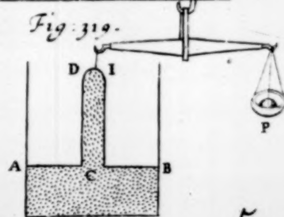

B
A
V
T
C

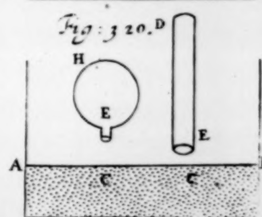

Fig: 312.
D
K
A
C
B
F

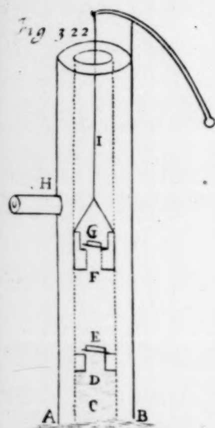

Fig: 313.
D
A
B
E
G
F

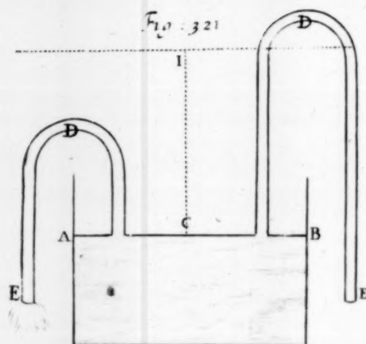

C
D
Fig: 314.
I
A
B

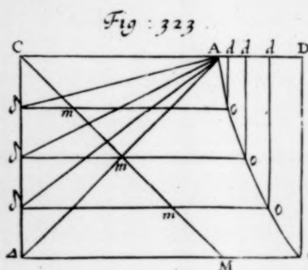

Fig: 318.
D
G
E
I
F
A
C
B

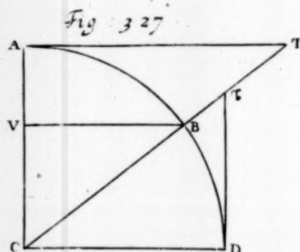

Fig: 319.
D
I
A
C
B
P

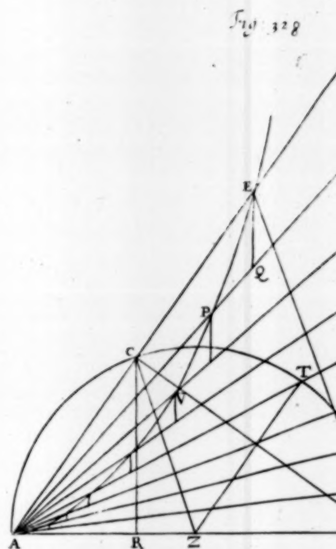

Fig: 320.
D
H
E
A
C
B

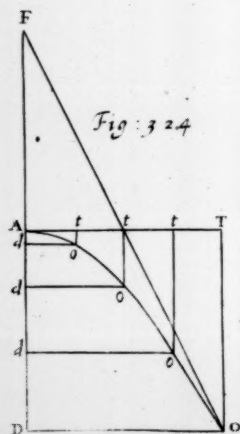

Fig 322
I
H
G
F
E
D
C
A
B

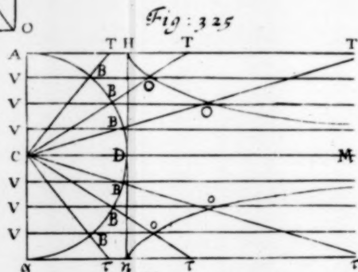

Fig : 321
D
I
D
A
C
B
E
E

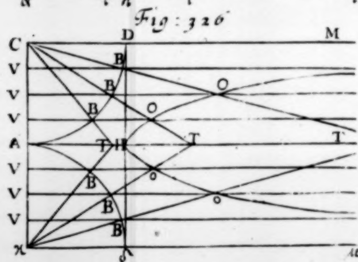

Fig : 323
C
A
d
d
d
D
m
m
m
o
o
o
M
O

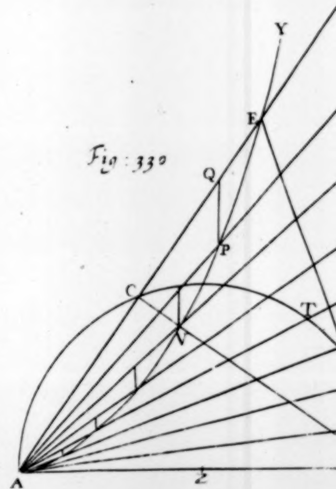

Fig : 327
A
T
V
B
C
D


Fig : 328
E
Q
P
C
T
A
R
Z


F
Fig : 324
A
t
t
t
T
d
d
d
o
o
o
D
O

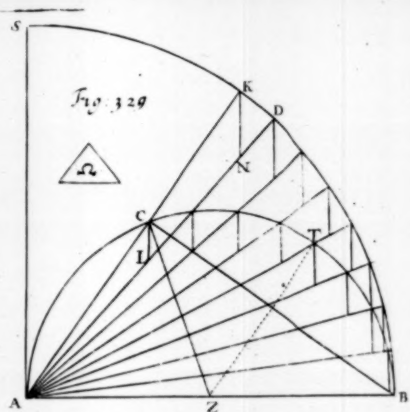

Fig : 325
A
T
H
T
T
B
B
B
O
O
C
D
M
B
B
B
B
V
V
V
V
V
V

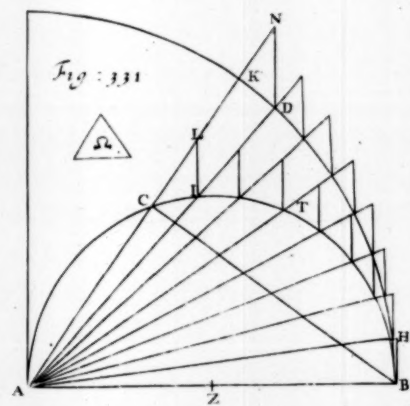

Fig : 326
C
D
M
B
B
B
O
O
A
T
H
T
T
B
B
B
V
V
V
V
V
V

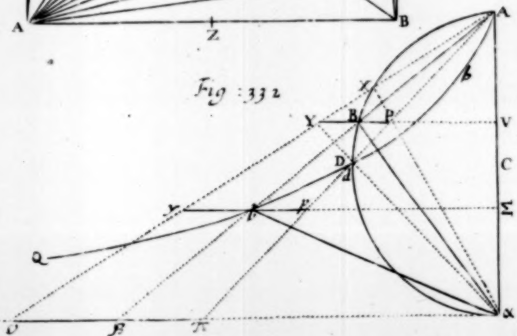

Fig : 330
Y
E
Q
P
C
T
A

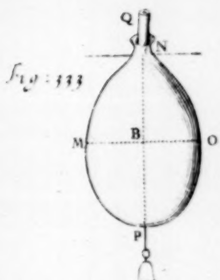

328
F
G
T
B

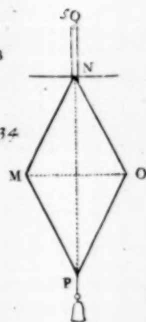

F
Y
G
T
H
B

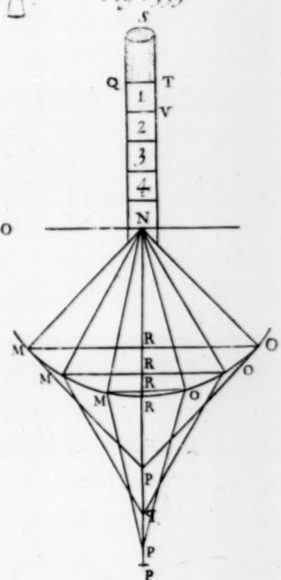

Fig: 329
S
K
D
N
C
L
T
A
Z
B

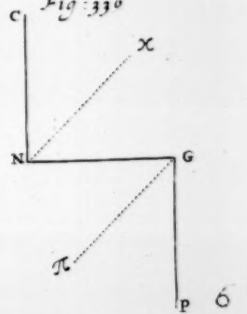

Fig: 331
N
K
D
L
C
T
H
A
Z
B


Fig: 332
A
Y
B
P
V
D
C
M
Q
α
π


Fig: 333
Q
N
M
B
O
P


Fig: 334
S
Q
N
M
O
P


Fig: 335
S
Q
T
V
1
2
3
4
N
M
R
O
P


Fig: 336
C
X
N
G
π
P

Et $+A+A=+2A$. $-A-A=-2A$. $+3A+2A=+5A$. $-3A-2A=-5A$. (ut ex Additionum legibus similiter constat.) Quod item erat propositum.

Exempli gratiâ. A sursum, & A deorsum; se mutuò destruunt: 3 A sursum, & 2 A deorsum; tantundem valent atque 1 A sursum: 3 A deorsum & 2 A sursum; æquivalent atque 1 A deorsum: Adeoque, Qui (verbi gratiâ) unum passum ascendit, & tantundem descendit; nihilo est vel altior vel humilior: Qui ascendit 3 passus, & 2 passus descendit; est uno passu altior: Qui 3 passus descendit iterumque ascendit 2 passus, est uno passu humilior.

Item; Qui unum Addit, & tantundem Aufert; nihilo vel Auget vel Minuit: Qui addit 3, & Aufert 2; uno Auget: Qui 3 Tollit, & 2 Restituit; uno Minuit. Et de Contrariis aliis similiter judicandum.

Contrà verò: Qui 3 passus ascendit, & insuper 2 alios; est 5 passibus altior: Qui 3 passus descendit, & deinde 2 alios; est 5 passibus humilior.

Item: Qui 3 Addit, & insuper 2; quinario auget: Qui tum 3, tum 2 Tollit; quinario minuit. Et de reliquis similiter.

PROP. IX.

Æquipollens si vel Augeatur, vel Contrarium Minuatur; fit Præpollens: Si Minuatur, vel Contrarium Augeatur; fit minus-pollens.

$$A+E>A. \qquad A-E<A.$$ Fig. 11.

Quia Totum est sui Parte majus. Puta: Totum $A+E$, præpollet ipsius parti A. Et Totum A, ipsius parti $A-E$.

SCHOLIUM.

Suntque hæ Propositiones Novem, totidem Lemmata; quæ non magis spectant præsentem Motuum Doctrinam, quàm quamvis aliam; Sed frequentissimi usûs erunt in sequentibus; quare in vestibulo demonstrandas duxi.

PROP. X.

Ubi conjuncta sunt Momentum & Impedimentum : Si Momentum præpollet, pro Momento simul habenda sunt; pro Impedimento verò, si præpollet Impedimentum ; Et utrobique Tanto, quantus est præpollentis Excessus; Sin æquipollent, pro Neutro.

Sin plura sint conjuncta vel Momenta, vel Impedimenta : Tanta simul habenda sunt, quanta est eorundem summa.

CUm enim Contraria sint Momentum & Impedimentum ; hoc est, Causa ut sit, &, Causa nè sit : Constat propositum, per 8 hujus.

PROP. XI.

Si Momentum Impedimento præpollet : Motum efficit. Adeoque ; Si nullus fuerit, Inchoatur : Si jam fuerit, Augetur.

Si præpollet Impedimentum : Impedit. Adeoque Motum, siquis jam sit, vel Tollit, vel saltem Minuit.

Et quidem in eâ ratione plus minúsve Efficit aut Impedit, quâ major est vel minor Excessus præpollentis.

Si Æquipollent : Neque Ponitur motus, neque Tollitur. Adeoque quæ priùs erat vel Quies vel Motus, perseverat.

SEquitur ex præcedente. Nam prout utriusque Aggregatum pro vel Momento, vel Impedimento, vel Neutro habendum est ; ita vel motum Efficit, vel Impedit, (& quidem in eâ ratione,) vel Neutrum, per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

POſtremam hujus Propoſitionis partem; Nempe, Inceptum Motum, (niſi obſtaculum ponatur,) ſuapte ſponte (ſine continuo motore,) non minus quàm jam exiſtentem Quietem (niſi accedat Motor) perſeverare; *Galilæus*, *Carteſius*, *Gaſſendus*, aliique, videntur Poſtulare; atque hinc non levis momenti multa inferunt: Qui autem Demonſtret, non memini me vidiſſe quempiam. Eràtque hoc nobis, in ſequentibus, aſſerendum, ubi de Motuum Acceleratione dicetur: tam propere tamen, in ipſo ſtatim veſtibulo, aſſerendo abſtinuiſſem, niſi conſequentiæ neceſſitate viderem me coactum jam ſtatim affirmare; non parvi poſtea momenti futurum.

PROP. XII.

Vis vì contraria, ſi æquipollet, ſuſtinebit: Si minùs pollet; nè hoc quidem: Si præpollet, (neque aliud adſit impedimentum;) movebit. Et contrà: Si movet; præpollet: Si non movet; tum vel minùs pollet, vel ſaltem æquipollet, vel aliud quid impedit.

$$+A-A=0. \quad +2A-3A=-A. \quad +3A-2A=+A.$$
$$+S-D=0. \quad +S-D=-. \quad +S-D=+.$$

SIt, verbi gratiâ, S, vis ſurſum; D, deorſum. Si invicem æquipollent; nullis æquivalent, (per 8 hujus;) Adeoque motum non efficiant; (per 7 hujus.) Si S præpollet; fit motus ſurſum: Si D, deorſum. Æquivalent utique Exceſſui præpollentis: per 8 hujus; Eritque motus conſonus; per 7 hujus. Et ſimiliter de quibuſvis aliis Viribus contrariis oſtendetur.

Dico tamen, *Niſi aliud adſit Impedimentum.* Quoniam fieri poteſt, ut vel Medii denſitas, vel durities, vel Obex aliquis obſtet, quò minus à præpollente moveatur vis inferior; utut Obex ille, vim in contrarium Motricem non habeat, ſed ſimpliciter Impediat. Ut, quum grave pavimento incumbit: quod vim habeat Impediendi ne deſcendat; non autem Motivam ſurſum; quia nec ipſum ſurſum nititur.

SCHOLIUM.

PRocedit hæc tum Propositio, tum Demonstratio, potissimum de Mobili jam in Quiete constituto. Si verò jam sit in Motu; Hoc ipsum, esse in motu, accensendum erit causis ejusdem motûs continuativis, vel impeditivis contrarii. Quippe sublatio motûs, tam causam efficientem postulat, quàm motûs Positio; uti ex Prop. præced. constat. Unde est, quod Motus Penduli, verbi gratiâ, à gravitate inchoatus, non quidem à gravitate solâ continuatur, sed ab ipso impetu seu motu jam existente continuatur, etiam ultra perpendiculum, adeoque ascendendo; non obstante ipsius gravitatis in contrarium nisu, aliisque forsan non contemnendis obstaculis, quod & in aliis motibus ab impetu inchoato continuatis passim obtinet. Quodque ad hanc Propositionem monemus; etiam in sequentibus, prout res tulerit, intelligendum erit.

Hoc autem fundamento nititur, de contra-ponderantibus, seu contramoventibus judicium: Adeoque vel Quietis, ob æquilibrium seu contramoventium æquipollentiam; vel Motûs, ob præponderantiam, seu præpollentiam.

PROP. XIII.

Quæ ex Mobilium pondere resultant motûs Impedimenta, (cæteris paribus,) sunt Ponderibus proportionalia.

Quodque de Pondere dicitur, de quavis aliâ contrariâ vi, similiter intelligendum, quæ ponderis instar erit. Et similiter in sequentibus.

Fig. 12. P . I :: 2 P . 2 I :: 3 P . 3 I :: *n* P . *n* I.

NAm si pondus ut P, impedit ut I; etiam alterum P, cæteris paribus, ut alterum I impediet; tertium, ut tertium; *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 I; 3 P, ut 3 I; & quotlibet P, ut totidem I. Quare & tantundem Ponderis, tantundem impedit; duplum, duplo; triplum, triplo, *&c.* Et in reliquis similiter proportionibus: per 7 hujus.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

Dico autem, *Cæteribus paribus*; Quoniam idem Pondus, pro vario situ, aliisve circumstantiis, potest variè impedire. Ubi autem cætera sunt paria; tota quæ oritur diversitas, à solâ Ponderis diversitate, ut ab adæquatâ causâ, profluit. Cæteráque, quæ Æqualium rationem subeunt, proportionem non immutant. Per 4 hujus.

Quodque hìc dictum est, etiam in aliis propositionibus pariter intelligendum erit, licèt non disertè dicatur. Quod semel monuisse sufficiat.

PROP. XIV.

Quæ ex Longitudine transigendâ, resultant motûs Impedimenta; sunt Longitudinibus proportionalia.

Quodque de Longitudinibus, dicitur; de Medii densitate, tenacitate, aut simili quovis Impedimento, pariter dicendum erit. Et similiter in sequentibus.

$$L . I :: 2 L . 2 I :: 3 L . 3 I :: m L . m I.$$ Fig. 13.

Puta; Æqualis Longitudo transigenda, æqualiter Impedit; dupla, duplò; tripla, triplò, *&c.* Nam si Longitudo ut L, impedit ut I; Etiam altera L, ut alterum I impediet; & tertia, ut tertium, *&c.* Adeoque; Dupla, duplò; Tripla, triplo; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus.

PROP. XV.

Quæ ex Pondere simul, & Longitudine transigendâ, resultant motûs Impedimenta; sunt in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compositâ.

$$\begin{array}{c} P. \\ L. \\ \hline PL. \end{array} \; I. :: \begin{array}{c} 2P. \\ 2L. \\ \hline 4PL. \end{array} \; 4I :: \begin{array}{c} 2P. \\ 3L. \\ \hline 6PL. \end{array} \; 6I :: \begin{array}{c} nP. \\ mL. \\ \hline mnPL. \end{array} \; mnI.$$ Fig. 14.

Puta;

PUta; Duplum Pondus, per Duplam Longitudinem ferendum, est Impedimentum Quadruplum; per Triplam, Sextuplum: Triplum Pondus, per Longitudinem Triplam, est Impedimentum Noncuplum; per Quadruplam, Duodecuplum, *&c.* Nam, si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impedit ut I; etiam alterum P, per eandem Longitudinem ferendum, impediet ut I alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque; Duplum, duplò; Triplum, triplo, *&c.* per eandem Longitudinem ferendum. Per 13 hujus. Cum itaque Pondus ut 2 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 2 I: Pondus idem per Longitudinem 2 L ferendum, impediet ut 4 I; per 3 L, ut 6 I, *&c.* per præced. Item; Cum Pondus 3 P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut 3 I: idem per 3 L ferendum, impediet ut 9 I; per 4 L, ut 12 I, *&c.* per præced. Et, universaliter, Si Pondus P, per Longitudinem L ferendum, impediat ut I: Pondus *n* P, per eandem L ferendum, impediet ut *n* I (per 13 hujus;) Adeoque, per *m* L, ut *m n* I; (per præced.) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus composita, (per 2 hujus.) Quod erat propositum.

PROP. XVI.

Si, in duobus motibus, Pondera & Longitudines, vel utraque sint Æqualia, vel sint Reciprocè proportionalia; Quæ hinc resultant Impedimenta, sunt Æqualia. Et contrà: Si quæ inde resultant Impedimenta sunt æqualia: Pondera & Longitudines sunt vel utraque Æqualia, vel saltem Reciprocè proportionalia.

Fig. 14, 15.

P.		2 P.		2 P.		3 P.		*n* P.		*m* P.	
2 L.		L.		3 L.		2 L.		*m* L.		*n* L.	
2 PL.	I ::	2 PL.	I.	6 PL.	I ::	6 PL.	I.	*mn* PL.	I ::	*mn* PL.	I.

PUta: Æquale Pondus, per Æqualem Longitudinem ferendum, Æqualiter Impedit. Item, Pondus Duplum per Æqualem Longitudinem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Duplam ferendum, Æqualiter impediunt. Sic, Pondus Triplum per Longitudinem Æqualem, &, Æquale Pondus per Longitudinem Triplam. Item, Pondus

Pondus Duplum per Longitudinem Triplam, Et, Triplum Pondus per Longitudinem Duplam, *&c.*

Sunt enim Impedimenta, in ratione ex Ponderum & Longitudinum rationibus compositâ; (per præced.) Adeoque, (cùm hæ sunt reciprocæ,) æqualia sunt: (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

POsset quidem ea clausula, *Vel utraque æqualia*, tuto omitti, utpote quæ in sequenti, *Reciproce proportionalia*, continetur. Nam, ut Dimidio Duplum, sic &, Æquale Æquali, reciprocum est. Mallem tamen, perspicuitatis gratiâ, tum in hac Propositione, tum in sequentibus aliquoties, illud etiam disertè inserere. Quod quidem non tantum ex 6 hujus, sed & 4 hujus, perinde patet.

Ex his autem quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimatur *Motuum* perficiendorum *Magnitudo*. Ea scilicet quæ ex mobilium Pondere, & motûs Longitudine, simul consideratis emergit.

PROP. XVII.

Quæ respectivis Impedimentis æquipollent Momenta, sunt Impedimentis proportionalia.

(Adeoque Ponderibus, si reliqua sint paria; vel Longitudinibus, si reliqua sint paria; vel quæ ex Pondere & Longitudine resultant Impedimentis, si reliqua sint paria.)

Eáque Momenta, si augeantur; vel minuantur Impedimenta; movebunt.

M . I :: 2 M . 2 I :: 3 M . 3 I :: *r* M . *r* I. Fig. 16, 17, 19.

PUta; Æquale Momentum, Æquali Impedimento æquipollet; Duplum, Duplo; Triplum, Triplo, *&c.* Nam si Momentum ut M, æquipollet Impedimento ut I; etiam alterum M, alteri I æquipollebit; & Tertium, Tertio, *&c.* Adeoque, Duplum Duplo, Triplum, Triplo, *&c.* per 7 hujus.

Adeoque; vel Ponderibus, vel Longitudinibus, vel quæ ex utrisque simul resultant Impedimentis, (cæteris paribus,) sunt proportionalia. Nam

Nam his proportionalia sunt, quæ ex his resultant Impedimenta, per 13, 14, 15. hujus.

Sin augeatur Momentum Æquipollens, vel Impedimentum minuatur; Momentum præpollebit; adeoque, movebit. per 9, 10. hujus.

SCHOLIUM.

Atque hinc dependet de Æquilibrio, seu contra-nitentium Æquipollentiâ, judicium; &, quæ hinc sequitur, Quiete: quique ex Præpollentiâ procedit, Motu.

PROP. XVIII.

Virium momenta, cæteris paribus, sunt Virium gradibus proportionalia.

Fig. 18. V . M :: 2 V . 2 M :: 3 V . 3 M :: *n* V . *n* M.

Puta; Vis æqualis, tantundem movendo pollet; Dupla, duplo; Tripla, triplo, &c. Nam, si vis ut V, moveat ut M: etiam vis ut 2 V, movebit ut 2 M; 3 V, ut 3 M; *n* V, ut *n* M, &c. per 7 hujus.

PROP. XIX.

Virium, gradu æqualium, Momenta; sunt, cæ[teris p]aribus, Temporibus proportionalia.

Fig. 17. 19. T . M :: 2 T . 2 M :: 3 T . 3 M :: *m* T . *m* M.

Nam, si Vis exposita, Tempore T, moveat ut M: etiam altero T, tantundem efficiet; tertio, tantundem, &c. Adeoque, in 2 T ut 2 M; in 3 T, ut 3 M; in *m* T, ut *m* M, &c. Hoc est, Duplo tempore, duplum efficiet; Triplo, triplum, &c. per 7 hujus.

PROP.

PROP. XX.

Quæ ex Virium gradu, ſimul & applicationum Tempore reſultant Momenta; ſunt in ratione ex Virium & Temporum rationibus compoſitâ.

$$\frac{\begin{matrix}V.\\T.\end{matrix}}{VT.}\ M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\2T.\end{matrix}}{4VT.}\ 4M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\3T.\end{matrix}}{6VT.}\ 6M :: \frac{\begin{matrix}nV.\\mT.\end{matrix}}{mnVT.}\ mnM.$$ Fig. 21.

PUta; Vis Dupla, duplo Tempore, Quadruplum poteſt; triplo, Sextuplum: Tripla, triplo tempore, poteſt Noncuplum; quadruplo, Duodecuplum, *&c.* Nam, ſi Vis ut V, Tempore T, moveat ut M: Vis ut 2 V, eodem Tempore, movebit ut 2 M; & 3 V, ut 3 M, *&c.* per 18 hujus. Cùm itaque Vis ut 2 V, Tempore T, moveat ut 2 M; Vis eadem, Tempore 2 T, movebit ut 4 M; & tempore 3 T, ut 6 M, *&c.* Per 19 hujus. Item, Cùm Vis ut 3 V, Tempore T, moveat ut 3 M; Vis eadem, Tempore 3 T, movebit ut 9 M; Tempore 4 T, ut 12 M, *&c.* Et, univerſaliter, Si Vis V, Tempore T, moveat ut M; Vis *n* V, eodem Tempore T, movebit ut *n* M, (per 18 hujus:) Adeoque, Tempore *m* T, ut *mn* M, (per 19 hujus.) Hoc eſt, in ratione ex Virium & Temporum rationibus compoſitâ, (per 2 hujus.) Quod erat propoſitum.

PROP. XXI.

Si Vires & Tempora, ſint vel utraque Æqualia, vel ſint Reciprocè proportionalia; quæ hinc reſultant Momenta ſunt Æqualia. Et contrà: Si Momenta illa ſint Æqualia; Vires & Tempora, ſunt, vel utraque æqualia, vel ſaltem Reciprocè proportionalia.

$$\frac{\begin{matrix}V.\\2T.\end{matrix}}{2VT.}\ M :: \frac{\begin{matrix}2V.\\T.\end{matrix}}{2VT.}\ M.\quad \frac{\begin{matrix}2V.\\3T.\end{matrix}}{6VT.}\ M :: \frac{\begin{matrix}3V.\\2T.\end{matrix}}{6VT.}\ M.\quad \frac{\begin{matrix}nV.\\mT.\end{matrix}}{mnVT.}\ M :: \frac{\begin{matrix}mV.\\nT.\end{matrix}}{mnVT.}\ M.$$ Fig. 20, 21.

PUta; Vis æqualis, æquali Tempore, tantundem efficit. Item, Vis dupla æquali tempore, &, Vis æqualis duplo Tempore, tantundem efficiunt. Sic, Vis dupla triplo Tempore, &, Vis tripla duplo Tempore, *&c.* Sunt enim Momenta in ratione ex Virium & Temporum rationibus composità; (per præced.) Adeoque (cùm hæ sint Reciprocæ) Æqualia sunt. (per 6 hujus.) Unde & conversa patet.

SCHOLIUM.

EX his quatuor Propositionibus proximè præcedentibus, æstimantur, quæ ex Viribus & Temporibus simul consideratis emergunt, *Momentorum Magnitudines.*

PROP. XXII.

In quibusvis Motibus invicem comparatis; Momenta sunt Impedimentis proportionalia.

Fig. 23, 25. $VT = M . PL = I :: 2VT = 2M . 2PL = 2I :: nVT = nM . nPL = nI.$

Fig. 22, 24. $M = VT . \mu = \upsilon\tau :: I = PL . \iota = \pi\lambda.$

PUta; si Vis V, Tempore T; sive, quod ex his resultat, Momentum M; movet Pondus P, per Longitudinem L; sive tollit, quod ex his resultat, Impedimentum I: Duplum Momentum, tollet Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum, *&c.* Nam, si Momentum M tollit Impedimentum I; etiam alterum M, alterum I tollet; tertium tertium, *&c.* Adeoque Duplum Momentum, tollet, Duplum Impedimentum; Triplum, Triplum; & in reliquis similiter proportionibus. Per 7 hujus. Quod erat propositum.

Sive, (ut in *Aureâ Regulâ compositâ* dici solet,) Ut, Factum ex Pondere & Longitudine, in uno Motu; ad, Factum ex Pondere & Longitudine, in alio Motu: sic, Factum ex Vi & Tempore, in priori motu; ad, Factum ex Vi & Tempore, in posteriori motu; cæteris paribus.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione potissimum dependet Motuum inter se comparatio, quoad Vires, Tempora, Pondera, & Longitudines.

PROP.

PROP. XXIII.

In Comparatis Motibus; Si Lationum Tempora ſint æqualia; Celeritatum gradus ſunt tranſactis Longitudinibus proportionales.

$$L . \lambda :: C . \kappa .$$

$$L . C :: 2 L . 2 C :: n L . n C .$$ Fig. 26.

HOc eſt: Ut Longitudo prima, ad ſecundam, eodem tempore tranſactam; ſic Celeritas prima ad ſecundam.

Puta; Duplâ Celeritate, (eodem Tempore,) Dupla Longitudo tranſigitur; Dimidiâ Celeritate, Subdupla Longitudo. Et ſimiliter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXIV.

In comparatis Motibus; Si tranſactæ Longitudines ſint æquales; Celeritatum gradus ſunt Temporibus reciprocè proportionales.

$$\tau . T :: C . \kappa .$$

$$\frac{L}{T} . C :: \frac{L}{2T} . \frac{1}{2} C :: \frac{L}{nT} . \frac{1}{n} C .$$ Fig. 2

HOc eſt; Ut Tempus ſecundum, ad tempus primum; ſic (reciprocè) Celeritas prima ad ſecundam.

Puta; Dimidio Tempore, duplâ Celeritate, tranſigitur æqualis Longitudo: Duplo Tempore, dimidiâ Celeritate. Et ſimiliter in aliis proportionibus. Per Celeritatum definitiones.

PROP. XXV.

Comparatorum Motuum Celeritates, sunt in ratione ex directâ Longitudinum & reciprocâ Temporum rationibus compositâ.

Fig. 28.

$$\begin{array}{c} L.\ \lambda \\ \tau.\ T \\ \hline L\tau.\ \lambda T :: C.\ \kappa \end{array};\quad \begin{array}{c} T. \\ L. \\ \hline 2TL, \end{array} \times \begin{array}{c} 2T \\ 3L \\ \hline C :: 3TL.\ \tfrac{3}{2}C. \end{array}\quad \begin{array}{c} mT. \\ L. \\ \hline TL. \end{array} \times \begin{array}{c} T \\ nL \\ \hline mnTL :: C.\ mnC. \end{array}$$

$$\frac{L}{T}.\ C :: \frac{3L}{2T}.\ \frac{3}{2}C :: \frac{nL}{mT}.\ \frac{n}{m}C.$$

PUta: Longitudo dupla, dimidio Tempore transigitur, Celeritate Quadruplâ: Tripla Longitudo dimidio Tempore, Celeritate Sextuplâ: Tripla Longitudo duplo Tempore, Celeritate Sesquialterâ, *&c.*

Nam, si Longitudo L, Tempore T, absolvatur Celeritate ut C: Longitudo 2 L, eodem Tempore T, absolvetur Celeritate ut 2 C; (per 23 hujus:) Adeoque dimidio Tempore seu $\frac{1}{2}$ T, duplo adhuc celerius, sive Celeritate ut 4 C. (per præced.) Similiter, Longitudo 3 L tempore T, celeritate ut 3 C; (per 23 hujus:) Adeoque Tempore $\frac{1}{2}$ T, Celeritate ut 6 C; & Tempore 2 T, Celeritate $\frac{3}{2}$ C: per præced. Et, uniuersaliter; Si Longitudo L, tempore T, transigatur Celeritate C: Longitudo n L eodem tempore transigetur Celeritate n C, (per 23 hujus:) adeoque Tempore m T, celeritate $\frac{n}{m}$ C; (per præced.) Hoc est, in ratione quæ ex directâ Longitudinum & reciprocâ Temporum rationibus componitur. Quod erat propositum.

PROP. XXVI.

In comparatis Motibus; Si transactæ Longitudines, sint Temporibus proportionales: Celeritates sunt æquales. Et contrà.

L.

$$L . T :: 2L . 2T :: 3L . 3T :: nL . nT.$$

Fig. 29.

SEquitur ex præcedente. Quoniam, hoc casu, Reciproca Temporum (quæ eadem est cum reciproca Longitudinum) cum directâ Longitudinum, composita; æqualitatis ratio est. per 6 hujus.

Vel ex definitionibus Celeritatum. Cùm enim Æqualis Celeritas, æquali Tempore, æqualem Longitudinem absolvit (per Def. 10.) Etiam Duplo tempore, duplam Longitudinem; Triplo, triplam, &c. absolvet. Et contrà. per 7 hujus.

PROP. XXVII.

In comparatis motibus, Virium gradus (cæteris paribus) sunt in ratione quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur.

$$VT . \upsilon\tau :: PL . \pi\lambda.$$

$$V . \upsilon :: \frac{PL}{T} . \frac{\pi\lambda}{\tau} :: PL\tau . \pi\lambda T :: PC . \pi\kappa.$$

$$\frac{T}{\tau}\Big)\frac{VT}{\upsilon\tau} = \frac{PL}{\pi\lambda}\Big(\frac{V}{\upsilon} = \frac{PL\tau}{\pi\lambda T} = \frac{PC}{\pi\kappa}.$$

CUm enim (per 22 hujus) Momentorum ratio, quæ ex Virium & Temporum rationibus componitur; eadem sit cum eâ, quæ ex Ponderum & Longitudinum rationibus componitur, ratione Impedimentorum: Si eximatur utrinque ratio Temporum, vel (quod eòdem recidit) illius Reciproca accedat; Relinquetur Virium ratio, ea quæ componitur ex rationibus Ponderum, & Longitudinum, & reciprocâ Temporum; Hoc est, (per 25 hujus) ea quæ ex Ponderum & Celeritatum rationibus componitur. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

EX hac Propositione dependet Problematum aliquot, in Mechanicis maximè celebrium, generalis solutio. Nempe,

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi movere.

$$\begin{array}{lll} P.\ V :: nP. & & \\ \underline{C.} & \underline{\tfrac{1}{n}C.} & \\ PC. & PC. & V. \end{array} \qquad \begin{array}{lll} P.\ V :: 2P. & & \\ \underline{C.} & \underline{\tfrac{1}{2}C.} & \\ PC. & PC. & V. \end{array}$$

SIt exposita Vis V, quæ movere potis sit Pondus P, celeritate C: & requiratur, ut eâdem vel æquali Vi, moveatur Pondus n P.

Dico; Si, cæteris paribus, res ita comparetur (interpositâ Machinâ) ut, quâ ratione Pondus n P majus sit minúsve quàm Pondus P; eâdem, contrà, minor fiat majórve celeritas, puta $\frac{1}{n}$ C: eadem Vis V, expositum Pondus n P, movebit celeritate $\frac{1}{n}$ C.

Cùm enim rationes n P ad P, & $\frac{1}{n}$ C ad C, sint reciprocæ; quæ ex his componitur est Æqualitas; (per 6 hujus:) Adeoque (per præced.) æqualis Vis requiritur ad movendum Pondus P celeritate C, atque Pondus n P celeritate $\frac{1}{n}$ C. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

HUic igitur potissimùm negotio se applicet Mechanicus, ut istiusmodi machinas excogitet, easque in usum redigat, quibus Vi & Ponderi interpositis, motuum celeritatem ita moderetur, ut Ponderum Magnitudinem Tarditate motûs compenset; seu, Temporis Longitudine, Defectum Virium.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, datâ Celeritate movere.

$$\begin{array}{lll} P.\ V :: & P. & \\ \underline{C.} & \underline{nC.} & \\ PC. & nPC. & nV. \end{array}$$

Sit

SIt expositum Pondus P, quod, celeritate C, movere potis sit Vis V: & requiratur, ut Celeritate nC, moveatur.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuenda celeritas, eâdem similiter augeatur vel minuatur Vis adhibita: expositum Pondus datâ celeritate movebitur.

Cum enim (propter idem utrobique Pondus) eadem sit Celeritatum ratio, cum illâ quæ ex hac & Ponderum rationibus componitur, (per 4 hujus;) eadem erit & Virium requisitarum ratio; (per 27 hujus.) Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

NOtandum interim: Cùm non ita in promptu sit, Vires pro arbitrio augere, atque Celeritatem motûs minuere; non ita facile erit præsens Problema, atque illud quod proximè antecedit, magnis Ponderibus actu applicare.

PROP. XXX.

Datâ Vi, datâ Celeritate, motum efficere.

$$\begin{array}{lll} P . & V :: & \frac{1}{n} P . \\ \underline{C .} & & \underline{n C .} \\ PC . & & PC . \quad V . \end{array}$$

SIt exposita Vis V, quæ Pondus P, celeritate C movere potis sit: requiratur autem, ut Celeritate n C fiat motus.

Dico: Si, cæteris paribus, quâ ratione augenda sit aut minuenda Celeritas; eâdem, vice versâ, minuatur vel augeatur Pondus: Eâdem Vi, datâ celeritate, movebitur. Puta, Pondus $\frac{1}{n}$P, eâdem Vi, celeritate nC movebitur.

Cùm enim Ponderum $\frac{1}{n}$P ad P, & Celeritatum nC ad C, rationes sint reciprocæ: Quæ ex his componitur ratio, Æqualitatis est; (per 6 hujus;) Adeoque & Virium requisitarum, per 27 hujus,

SCHOLIUM,

SCHOLIUM.

NOtandum denique; Ita calculum his Propositionibus institui, ac si in Medio Vacuo peragendus sit motus: Quare nec Resistentiæ in medio, vel Magnitudinis aut Figuræ rei Mobilis, habita est consideratio: Sed conditione hac, *Cæteris paribus*, tum hæ tum aliæ circumstantiæ sic excludi intelliguntur, ut vel nullæ sint, vel ita saltem comparatæ ut non immutent aut turbent rationes. Adeoque, ubi adsunt, opus erit (quò calculi Mathematici ἀκρίβεια conservetur, vel ab eâ quàm minimum recedatur,) ut earum vel accurata consideratio etiam habeatur, & calculo æstimetur; vel saltem, ut eo modo comparentur quo minimum turbentur reliquæ rationes.

CAP.

P. I.

, ac
entia
consi
e cir-
altem
bi ad-
, vel
erari
mpa-

P.

L

G

I

(pe
rati

Gr
Et,

N
fere

CAP II.

De Gravium Descensu, & Motuum Declivitate.

PROP. I.

Gravia, cæteris paribus, gravitant in ratione Ponderum. Et, universaliter, Vires Motrices quælibet, agunt pro Virium ratione.

P. G :: 2 P. 2 G :: 3 P. 3 G :: *r* P. *r* G.

PUta; Si Pondus ut P, Gravitat ut G: Etiam alterum P, ut alterum G gravitabit: tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque 2 P, ut 2 G; 3 P, ut 3 G; & quotlibet P, ut totidem G, *&c.*

Est enim Gravitas, Vis Motrix; ejusque mensura, Pondus: (per 12, 13. Def. Cap. 1.) Movet igitur Gravitas, pro Ponderum ratione; per 18. Cap. 1. Et similiter in Motibus aliis ostendetur.

PROP. II.

Grave, quatenus non impeditur, Descendit; seu propius ad Terræ Centrum appropinquat.
Et, universaliter, Vis quævis Motrix, secundum Directionem suam, quatenus non impeditur, procedit.

NAm (per Def. Gravitatis) Gravitas est Vis deorsum movens, seu versus Terræ Centrum. Hac igitur, quatenus non impeditur, fertur Grave, gravitate suâ. per 11 cap. 1.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. III.

Grave tantundem Descendit, quantò fit Terræ Centro propius: Tantum Ascendit, quantò remotius.

Et, universaliter, Cujusvis Vis Motricis Progressus tantu[s] est, quantum secundum Directionem suam movetur Regressus, contrà.

Fig 30. CD=CB. CA−CD=CA−CB. CD−CE=CB−CE.

SIt C, Terræ Centrum: unde ducantur æquales rectæ C B, CD. Continuetur C B ad A; & jungatur A D. Item, sumpto ubi[vis] in C B, puncto E; jungatur E D. Dico; Grave ab A, punc[to] altiore, ad B vel D motum; tantundem Descendisse, quantò B vel D minus quàm A, distat à Centro C: Motum verò ab E, puncto quo[vis] humiliore, ad B vel D; tantum Ascendisse, quantò B vel D, ma[gis] quàm E, à Centro distat.

Est enim (per Def. Gravitatis) Descensus gravium, (seu Motus sec[un]dum Directionem suam,) Motus versus Centrum Terræ.: Tantò ig[itur] Descendisse dicetur Grave, quantò ad Terræ Centrum propius acces[se]rit. Putà, quantò Brevior est C B vel C D, quàm C A. Adeoque ta[ntum] Ascendisse, quantò fuerit contrario motu latum; hoc est, quant[ò] Terræ centro remotiùs abscesserit; putà, quantò Longior est C B, [vel] C D, quàm C E. Quod erat propositum.

Adeoque: Quamquam A D vel E D recta, Longior sit quàm A[B] vel E B; non tamen Altior seu major Descensus est vel Ascensus, G[ra]vis per illam, quàm per hanc lati.

Quodque de Gravitate ostensum est, similiter de aliâ Vi Mot[rice] intelligendum erit. Quod enim est, respectu Gravitatis, Descens[us] idem est, respectu cujusvis Vis Motricis, Latio secundum Direction[em] suam: Et contrà. per Def. 21. Cap. 1.

SCHOLIUM

SCHOLIUM.

NOtandum interim; pro Peripheriâ BD, indifferenter ut plurimum sumi Rectam Horizontalem BH; quæ, propter immensam Centri distantiam, & planorum quibus maximè versatur parvitatem, cum illâ quasi coincidens haberi solet. Si quando tamen vel immensa plana tractanda veniant, vel accuratius philosophandum sit; secernenda erunt.

Necui interim mirum videatur; quod de Gravi, tanquam in uno Puncto, verba faciamus; cùm interim Grave non sit nisi Corpus solidum: Monendum erit, considerare nos hìc loci, *Grave* ut abstractum à *Magno*, (abstractione, ut loquuntur, Mathematicâ.) Consideramus utique, non quam Grande Corpus, nedum quâ Figurâ sit, sed quanta Ponderis Vis hoc in puncto applicatur: Perinde habentes, mole magnâ sit, an parvâ, aut etiam nullâ sed Punctulo vis illa insit; Item, planum sit, an rotundum; plenum, an excavatum; quod ita ponderat. Quamquam enim, in *Hydrostaticis*, aut alias etiam ubi de Medii resistentiâ agatur, aut alibi aliis de causis; magni intersit, quâ mole quâve figurâ, sit Grave ponderans: ea tamen omnia hic secludimus, (eâdem libertate quâ, post *Archimedem*, alii, de Planorum, Linearum, aut etiam Puncti gravitate philosophantur; quod & nos inferiùs facturi sumus.) Atque hoc ipsum ne à veritate Physicâ nimis abhorrere videatur; ostendetur, in sequentibus, (ubi de Centro Gravitatis agetur,) Gravis quantumvis magni vim totam ita distribui ut perinde omnino ponderando valeat atque si in unico illius puncto esset. Verùm eâ consideratione posthabitâ, quæ hujus loci non est; (quippe quum nondum definivimus Centrum gravitatis, nedum esse demonstravimus, aut quanta vis huic insit; (adeoque, utut in Scholio, ubi laxiùs agimus, illius mentionem faciamus; in Demonstrationibus tamen non eâ libertate utimur;) sufficit hìc loci monuisse, nos id saltem hìc inquirere, quid futurum sit, si hoc aut illo puncto tanta vis Ponderis (aut etiam quæ ponderis instar erit,) adhibeatur, undecunque demum fuerit. Quod & subinde sæpiùs, in sequentibus, intelligendum erit.

PROP. IV.

Fig. 31. Eà, cæteris paribus, propendet Grave, vel ex pluribus gravibus Aggregatum; (Hoc est, eà potiùs fertur:) quà plus Descenditur: idque in eâdem ratione quâ plus Descenditur. Eáque magis repugnat, & in eadem ratione, quà plus Ascenditur. Et contrà.

Quà verò æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur; æqualiter vel Propendet vel Repugnat. Et contrà.

Cæterisque motibus idem similiter accommodabitur. Eà potiùs feretur Mobile, (& in eâ ratione potius,) quà magis secundum virium Directionem proceditur.

Cum enim tendat Grave (per def. Gravitatis) simpliciter *Deorsum*; adeoque, quàm potest maximè; (Naturaliter siquidem agentia, non agunt ex delectu, sed cæco impetu pro summâ virium:) Ea potius feretur, cæteris paribus, qua magis erit Deorsum, seu minus Sursum; (adeoque contrario motui magis repugnat:) Hoc est, qua plus Descenditur, quáque Ascenditur minus, (& contrà; Quà minus Descenditur, quaque Ascenditur magis, ægriùs feretur.) Et quidem (per 7 cap. 1.) in eadem ratione. Quod erat propositum.

Qua vero æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur: Æqualiter vel Propendet vel Repugnat. A Gravitate siquidem (per def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergô, vel omnino fertur, vel hac magis quam illac fertur.

Contra vero; Quà, cæteris paribus, æqualiter vel Propendet vel Repugnat; æqualiter vel Descenditur vel Ascenditur. (Nam siquâ vel magis Descenderet, vel minus Ascenderet; eà magis propenderet, minúsve repugnaret; per jam Demonstrata.) Quod itidem erat propositum.

Et eâdem ratione ostendetur conversa primæ partis; Nempè, quà plus propendet Grave, eà magis Descenditur; & quà plus repugnat, eà magis Ascenditur, &c. Cæteris paribus.

Et similiter in aliis motibus ostendetur.

PROP. V.

Gravium Descensus, invicem comparati, in eâ ratione pollent, quæ ex Ponderum ratione & ratione Altitudinum Descensuum componitur. Atque Ascensus similiter.

Adeoque; Si Pondera sint æqualia; in ratione Altitudinum: Si Altitudines sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera & Altitudines, vel utraque sint æqualia, vel sint Reciprocè proportionalia; Æquipollent.

Et, universaliter, Virium Motricium quarumcunque Progressus Regressusve, pollent in ratione, quæ, ex ratione Virium, & Progressuum Regressuúmve secundum lineam Directionis Virium æstimatorum, componitur.

$$\begin{array}{cccc} P. & G :: & nP. & \\ D. & & D. & \\ \hline PD. & & nPD. & nG. \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} P. & G :: & P. & \\ D. & & mD. & \\ \hline PD. & & mPD. & mG; \end{array}$$

Fig. 32, 33.

$$\begin{array}{cccc} P. & G :: & nP. & \\ D. & & mD. & \\ \hline PD. & & mnPD. & mnG. \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} P. & G :: & nP. & \\ nD. & & D. & \\ \hline nPD. & & nPD. & G. \end{array}$$

Fig. 34, 35.

$$\begin{array}{cccccccccc} P. & & nP. & & P. & & nP. & & nP. & \\ D. & & D. & & mD. & & mD. & & \frac{1}{n}D. & \\ \hline PD. & G :: & nPD. & nG :: & mPD. & mG :: & mnPD. & mnG :: & PD. & G. \end{array}$$

Pluta; Si Grave ut P, per D descendens, valet ut G; etiam alterum P (cæteris paribus) tantundem descendens, valebit ut G alterum; tertium, ut tertium, *&c.* Adeóque nP, ut nG; in ratione Ponderum. per 7 cap. 1.

Item; Si Ponderis ut P, descensus per D, valet ut G: ejusdem Ponderis (cæteris paribus) per D alterum descensus, tantundem valebit; adeoque ut alterum G: per tertium, ut tertium, *&c.* Adeoque per mD, ut mG; in ratione Altitudinum. per 7 cap. 1.

Si itaque Pondus P, per D descendens, valet ut G: etiam *n* P, per D descendens, valebit ut *n* G; Adeoque, per *m* D descendens, ut *m n* G; (ut ostensum est:) Hoc est; in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositâ, (per 2 cap. 1.) Quod erat probandum.

Quæ quidem rationes si sint Reciprocæ; quæ ex his componitur, Æqualitas est, *&c.* per 4, 6, cap. 1.

Similiter de Ascensu judicandum.

Et, in aliâ quâvis Vi Motrice, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

POsset quidem hæc, & subsequentium Propositionum aliquot, in plures distrahi, & similiter demonstrari, atque in capite præcedente factum est, in Prop. 13, 14, 15, 16. item, 17, 18, 19, 20. item 22, 23, 24, 25. Quum autem illud semel iterúmque, perspicuitatis gratiâ, factum fuerit; malebam tum hic tum in sequentibus succinctius agere, ne videam vel nauseam creare, vel propositionum numerum præter necessitatem in immensum augere velle. Ob quam rationem etiam Corollaria Propositioni principali toties subnectere visum est.

Ex hac autem Propositione (quæ Descensuum Ascensuúmque *Magnitudinem*, ex Gravium Pondere simul & Motuum Altitudine, æstimat,) potissimum dependet, de Machinarum quarumvis Potentiâ, judicium.

PROP. VI.

Conjunctis invicem Descensu & Ascensu; Si præpollet Descensus, pro Descensu simpliciter habendi sunt: Pro Ascensu verò, si Ascensus præpollet: (Et quidem utrobique tanto, quanta est Præpollentia:) Sin æquipollent, pro Neutro.

Si verò vel plures Ascensus conjuncti sint, vel plures Descensus: tantundem simul pollent atque eorundem summa.

Idemque motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, accommodabitur.

Patet ex Prop. 8. cap. 1.

PROP. VII.

Comparata Gravia, cæteris paribus, eâ ratione Ponderant (Descensum moliendo, aversando Ascensum,) quâ pollent eorum si moveantur Descensus Ascensúsve; sive, quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur.

Idémque aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

Puta; Tantundem ponderant Unum Pondo per Duo Spacia, atque Duo Pondo per Unum Spacium, sursum deorsúmve (eodem tempore) ferenda. (Quippe utrobique Duplum Unius Pondo per Unum Spacium.) Adeoque Duo Pondo per Duo spacia, quadruplum ponderabunt, Unius Pondo per Unum Spacium eodem tempore ferendi. Et in reliquis proportionibus similiter.

Cùm enim eâ ratione plus ponderant Gravia, cæteris paribus, quâ sunt majoris Ponderis, (per 1 hujus;) quàque plus Descenditur, (per 4 hujus;) Eâ ratione ponderabunt (utriusque ratione habitâ) quâ pollent eorum (secundum utramque considerationem) Descensus Ascensúsve: Hoc est, (per 5 hujus,) eâ quæ ex Ponderum & Altitudinum rationibus componitur. Quod erat demonstrandum.

Exempli gratiâ: Si duo Gravia (seu Vires Motrices) V, P, sint, vel Pondere æqualia & (pro situ quo ponuntur) æqualiter (dum moventur) aut Descensura aut Ascensura; vel, quod Gravius est, in eadem ratione (eodem tempore) minus sit Descensurum; Æquiponderabunt: (propter Descensus Ascensúsve æquipollentes, per 5 hujus.) Sin alterius præpolleat, quæ ex Pondere & Altitudine oritur, Descensûs magnitudo: præponderabit illud; atque in eâdem ratione cum illâ præpollentiâ. Puta; Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 3 D, cum Descensu Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D comparatus; Æquipollebit,) propter $2 \times 3 = 3 \times 2$;)adeóque quæ sic movenda sunt, Æquiponderabunt. At, Descensus Ponderis 2 P per Altitudinem 4 D, Descensui Ponderis 3 P per Altitudinem 2 D, præpollebit, (propter $2 \times 4 > 3 \times 2$;) Adeóque,quod sic movendum erit, præponderabit. Et in aliis similiter. Fig. 37, 38, 39, 40.

PROP.

PROP. VIII.

Si (cæteris paribus) ad duos (pluresve) motus æqualiter propendeat Grave (vel ex pluribus conjunctis Gravibus Aggregatum,) neque ad alium ullum magis propendeat: Nullo feretur. Fig. 36.

Sin ad unum aliquem, præ cæteris, maximè propendeat: illo (nisi aliàs impeditum) feretur.

Idem intellige, mutatis mutandis, de quâcunque Vi Motrice.

PUta: Si ad A, B, æqualiter propendeat Grave G: neutrà feretur. Nam (per 12 Cap. 1.) propensiones contrariæ (siquidem utrinque simul ferri non possit) cùm sint Æquales, se mutuò perimunt. (Et similiter si ad plures adhuc motus æqualiter propenderet.) Sed nec alio feretur motu (siquis sit) cui minus propendeat; puta ad C. Nam (per eandem) huic præpolleret utravis duarum ad A, B, Propensio; & grave præriperet. Adeóque, si ad nullum magis propendeat, nullo feretur. Quód erat primò probandum.

Sin ad unum aliquem motum, puta ad D, quam ad cæterorum ullum, magis propendeat: singulis hæc præpollebit; Adeóque (nisi alias impeditum) hac feretur Grave: (per eandem 12 Cap. 1.) Quod itidem probandum erat.

SCHOLIUM.

AT interim, nequis metuat, imperfectam esse hanc Demonstrationem, eo quod, utut conatus seu Propensio ad D uni cuivis ex reliquis præpolleat, non inde tamen sequatur, quod præpolleret itaque & simul omnibus, cùm tamen omnes huic adversentur: Monendum hic erit; non cum simul omnibus reliquorum comparandum esse conatum hunc ad D, sed cum singulis sigillatim; eo quód non simul omnibus illis ferri possit, sed nec pluribus simul, sed uno saltem ex omnibus: Adeóque, conatus ad D, si sigillatim singulis præpolleat, omnibus præripiet grave.

Secus

Secus autem omnino est, ubi plures consentientes conatus, uni alicui adversantur. Putà, si plura Minora gravia, uni alicui (singulis quidem, sed non omnibus) Majori, in opposita Libræ lance, contra-ponderarent. Quamquam enim Majus illud in unâ lance, reliquorum singulis in alterâ, præpolleat; Minora tamen hæc simul sumpta, Libram in suas partes trahent; Quia, cùm simul omnes illi conatus minores in eundem motum conspirant, pro Conjunctis habendi sunt conatibus, non Disparatis. Contra quàm hìc obtinet.

Quodque hìc monemus, alibi (siqui similes occurrunt casus) intelligendum erit.

P R O P. IX.

Gravis in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, utcunque moti, nullus est vel Descensus vel Ascensus.

Idem dicendum est, de Plano Horizontali; dummodo, propter Parvitatem plani & immensam à Centro distantiam, quasi cum illâ Sphæricâ superficie coincidens habeatur.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi motrice.

CB = CD. CB − CD = 0. Fig. 30.

PUta; Si à B ad D, in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, moveatur grave: (vel etiam in Horizontali Plano, quousque hoc cum illâ coincidens habeatur;) Nihilo fit vel Propius vel Remotius à Centro Terræ; (propter æquales CB, CD, Sphæræ radios:)

Adeoque (per 5 hujus) non vel Descendit quicquam vel Ascendit sic latum Grave. Quod erat propositum.

Idem in motis ab aliâ Vi Motrice, mutatis mutandis, similiter ostendetur. Nempe nihil vel profecisse, vel contrà, Vim illam; dummodo secundum Vis Motricis Directionem nihil vel processerit vel recesserit, utcunque aliàs moveatur.

PROP. X.

Gravis per rectam Horizonti perpendicularem Descendentis, Descensus tantus est quanta est ea recta per quam fertur. Et similiter Ascendentis Ascensus.
Adeóque Obliquè vel Descendentis vel Ascendentis; tantus quanta est perpendicularis æquè alta.
Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

ABC — BC = AB = ABC — DC.

Fig. 30. DC — EC = BEC — EC = BE.

PUtà: Si in ABE rectâ, quæ ad Horizontalem rectam HB perpendicularis sit, (adeoque ad C centrum Terræ rectà tendit, per 19 Elemen 3.) feratur Mobile, ab A vel E, ad B: Manifestum est, tantò vel propius vel remotius à Centro fieri, quanta est ipsa AB vel EB, recta quâ fertur, (per 3 Elemen. 1.) Adeóque (per 3 hujus) tantundem vel Descendere vel Ascendere. Quod erat propositum.

Adeóque: Si utcunque Obliquè, ab A vel E, feratur ad D punctum quod tantundem atque ipsum B a Centro distet: tantundem utrobique vel Descendisse vel Ascendisse censendum erit; per 3 hujus: Hoc est (per modò demonstrata) quanta est AB, vel EB, perpendicularis æquè alta. Quod item probandum erat.

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi, similiter ostendetur.

PROP. XI.

Gravis, per rectam utcunque declivem descendentis, Descensuum Altitudines sunt emensis Longitudinibus proportionales. Atque Ascensuum similiter.
(Intellige; Dummodo planum Horizontale, cum superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, coincidens habeatur. Et similiter in sequentibus aliquot, quæ hinc dependent.)
Idem de alia Vi, mutatis mutandis, intelligendum.

FO

FO. FL :: FP. FD.

SIt P O, Horizontalis recta; F P, ad Horizontem perpendicularis; F O, inclinata recta, per quam vel Descendit vel Ascendit Grave; Et, rectæ P O, parallela D L, (trianguli crura secans proportionaliter, per 2 Elem. 6.) Ergo: ut F O, ad F L, Longitudo ad Longitudinem; sic F P, ad F D: Hoc est, (per 3 & 10 hujus,) Descensus ad Descensum (si Deorsum,) vel (si sursum moveatur) Ascensus ad Ascensum. Quod erat propositum. Fig. 41

Idem, mutatis mutandis, de motis ab aliâ Vi quâvis, similiter ostendetur.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Demonstratio: Horizontalis rectæ PO, puncta omnia, ut P, O, æquè-alta: adeoque P O rectam, quasi in superficie Sphæricâ, Terræ concentricâ, jacere. Sin ἀκριβῶς loquamur, pro rectis P O, D L, substituendi sunt arcus circulares, Terræ concentrici; (& quidem pro singulis in F O punctis, mutabitur Perpendiculi positio, & inclinatio declivis rectæ:) Sed tantillum à Rectis differunt Arcus illi, ut pro Rectis tutò usurpari soleant, ob causas ad Def. 15. Cap. 1. memoratas.

PROP. XII.

Rectis, sive ad Horizontem perpendicularibus, sive utcunque inclinatis; Si per Æquales Longitudines feratur Grave: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt Longitudinibus portionum æquè-altarum reciprocè proportionales.

Si, per Inæquales Longitudines ferantur: Descensuum Ascensuúmve Altitudines, sunt in eâ ratione quæ componitur ex ratione Longitudinum per quas fit motus, & reciprocâ Longitudinum portionum æquè-altarum.

Adeóque; Si emensæ Longitudines, sint Longitudinibus æquè-altis proportionales: Descensus Ascensúsve sunt æquales.

Idem intellige, mutatis mutandis, de aliâ Vi motrice.

$$FO . FP :: FL = FP . FD :: FK . FM$$

$$mL . L :: M = D . \frac{1}{m} D :: nM . \frac{n}{m} D .$$

Fig. 41.

SIt FP, ad Horizontem recta; FO, inclinata: per FP, descendat Grave: in FO, grave L; per Longitudinem FL rectæ FP æqualem. Jungatur PO Horizontalis recta, (abscindens portiones FP, FO, æquè-altas:) &, huic parallela, LD. Descensus itaque gravis P, tantus est quanta recta FP; gravis L, quanta est recta FD; (per 10 hujus.) Estque (per 2 Elem. 6.) ut FO (longitudo portionis obliquæ,) ad FL, vel huic æqualem FP, (longitudinem perpendiculi æque-alti:) Sic, vice versa, FP (altitudo Descensus in perpendiculo descendentis, P,) ad FD (altitudinem descensus, obliquè descendentis L, per longitudinem æqualem.) Idemque de Ascendentium per easdem LF, PF, Ascensibus, similiter ostendetur. Quod erat probandum.

Adeóque; Si per Inæquales Longitudines ferantur; (putà, per FP & FK $= \frac{1}{2}$ FP;) erunt Descensus Ascensúsve, in ratione quæ ex illa & longitudinum per quas feruntur, compositâ; (nempe FM $= \frac{1}{2}$ FD, per præced. Quod porro probandum erat.

Ideóque; (per 6 Cap. 1.) Si rationes illæ, (nempe, reciproca portionum æque-altarum, & directa longitudinum emensarum,) sint invicem reciprocæ; Hoc est, si longitudines emensæ, sint longitudinibus æque-altis proportionales; (Puta, FL, FD, longitudines emensæ ipsis FO, FP, longitudinibus æque altis, proportionales:) Descensuum Ascensuúmve Altitudines, æquales erunt. Quod erat ultimo probandum.

Idem viribus aliis motricibus facilè accommodabitur.

PROP. XIII.

Gravium, per rectas utcunque ad Horizontem inclinatas Descensus, in eâ ratione pollent, quæ componitur ex rationibus & ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Atque Ascensus similiter.

Idémque motis ab aliâ Vi motrice facilè accommodabitur.

Valent

VAlent enim (per 5 hujus) in ratione ex Ponderum & Altitudinum rationibus compositâ: Hoc est, (per præcedentem,) ex rationibus Ponderum, & Longitudinum emensarum, & Reciproca Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

PROP. XIV.

Rectarum Declivitas Longitudine æqualium, est Altitudinibus proportionalis.

Rectarum Declivitas æque-altarum, est Longitudinibus Reciprocè proportionalis.

Adeóque; Rectarum quarumvis Declivitas, est in ea ratione, quæ ex ratione Altitudinum & Reciprocâ Longitudinum componitur.

Atque; Si Rectarum Longitudines sint Altitudinibus proportionales; earum Declivitas æqualis est.

Quod & aliis perinde ac gravium motibus accommodabitur.

$$\frac{A}{L}, D.\ \frac{A\ \ A}{L}, \frac{2}{1} D.\ \frac{A}{L\ \ \ I}, \frac{1}{2} D.\ \frac{A\ \ A\ \ A}{L\ \ L}, \frac{3}{2} D.\ \frac{A\ \ A}{L\ \ L}, \frac{2}{2} D = D.$$

$$\frac{A}{L} . D :: \frac{mA}{L} . mD :: \frac{A}{nL} . \frac{1}{n} D :: \frac{mA}{nL} . \frac{m}{n} D :: \frac{mA}{mL} . \frac{m}{m} D = D.$$

Fig. 42

A Puncto F, ducantur æquales rectæ quotlibet F P, F O, F B, quæ continuatæ occurrant Horizontali Rectæ (vel Plano saltem) in punctis P, S, T.

Rectarum F P, F O, F B, longitudine æqualium, Declivitates, sunt earum Altitudinibus, puta, F P, F Q, F R, proportionales. per Def. 17, 18. Cap. 1.

Rectarum F P, F O S, F B V T, æque-altarum, Declivitates, sunt earum Longitudinibus, hoc est, ipsis F P, F S, F T, Reciprocè proportionales. per easdem Def. 17, 18. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

(Quas

(Quas quidem rationes easdem esse; adeoque geminam quæ habetur Def. 18. Cap. 1. *Majoris Declivitatis* definitionem tantundem valere, (& *Minoris* similiter;) hinc constat: Quoniam; Sive sumantur rectarum F P, F O S, portiones longitudine æquales F P, F O, quarum Altitudines sint F P, F Q; Sive portiones æque-altæ F P, F S, quarum longitudines reciprocæ sunt F S, F P, hoc est F S, F O; Eadem utrobique provenit Declivitatum ratio: Nam, ut F P, ad F Q; sic est F S ad F O: per 2 Elem. 6. Similiter, in rectis F P, F B T; portionum æqualium F P, F B, altitudines F P, F R; & portionum æque-altarum F P, F T, longitudines reciprocæ F T F P, hoc est F T, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6. Item; rectarum F O, F B V, portionum æqualium F O, F B, altitudines F Q, F R; & portionum æque-altarum F O, F V, longitudines reciprocæ F V, F O, hoc est F V, F B; proportionales sunt: per 2 Elem. 6.)

Ideoque; rectarum, puta F P, F V, Declivitates; sunt in ratione F P ad F R; nempe in ratione quæ componitur, ex Altitudinum ratione, puta F P ad F Q; atque F Q ad F R, sive F V ad F B, hoc est F V ad F P, reciproca Longitudinum. Quod itidem demonstrandum erat.

Adeoque (per 6. Cap. 1.) Si rationes illæ (directa altitudinum, & reciproca Longitudinum) sint invicem reciprocæ; hoc est, si Altitudines sint Longitudinibus directè proportionales; Declivitates sunt æquales. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

NOtandum hic; Dummodo Terræ Centrum intelligatur tamquam infinitè distans; eadem est ubique ejusdem rectæ, puta F B T Declivitas; propter parallelam Perpendiculorum positionem: Si vero intelligatur ut in certâ distantiâ finitâ; varia est in singulis punctis Declivitas: Quippe cùm Perpendicula omnia in Centro coëant; quamquam eadem sit directio Motûs, Motricis tamen vis directio subinde mutatur: adeoque alia erit illius ad hanc Positio, aliúsque ad perpendiculum Angulus, puta in B quàm in F puncto: Quæque ex præsenti Figurâ & demonstratione colligitur Declivitas, soli F puncto convenit; aliaque pro aliis, ut B, V, T, punctis, similiter colligenda erit; demissis inde ad Terræ Centrum Perpendiculis.

PROP

PROP. XV.

Lineæ curvæ Declivitas, in singulis respectivè punctis; eadem est atque rectæ ibidem contingentis. Et superficiei curvæ; eadem atque ibidem contingentis Plani.

Quod aliis perinde atque Gravium motibus accommodabitur.

SIt FP, perpendiculum; FC, curva; FT, recta contingens. Cùm eandem curvam in variis sui partibus variè declivem esse constet, (decliviorem alibi, alibi minus declivem:) Eandem dico, in F puncto, declivitatem FC curvæ, atque contingentis rectæ FT, censendam esse. Cùm enim CFT angulus contactûs (sive Circulorum, per 16 Elem. 3. sive Conicarum sectionum, per 32 Lib. 1. *Apollonii*; sive, quod similiter ostendetur, curvarum quarumvis;) sit vel nullius magnitudinis, (quod nos, peculiari Tractatu, *De Angulo Contactûs*, multis ostendimus;) vel saltem, infinitè exiguæ, (utpote qui sit vel minimo possibili rectilineo minor; quod apud omnes in confesso est: eadem erit, in puncto F, Directio, sive FC curvæ, sive FT contingentis rectæ; (saltem, differentia quàvis assignabili minor erit:) Adeóque, & eadem utriusque in illo puncto Declivitas. Quod erat propositum. Fig. 43.

Idemque de superficiei curvæ punctis singulis, similiter ostendetur.

PROP. XVI.

Si ad duos motus ita sit comparatum Grave, cæteris paribus; ut, altero si feratur, Descensurum sit; Ascensurum, si altero: Eà præponderat, quà Descensurum est.

Si, altero latum, plus Descendet; altero, minùs: Eà præponderat, quà plus descendet.

Si, altero, plus Ascendet; altero, minùs: eà minùs Repugnat, quà minùs Ascendet.

Sin

Sin æqualiter, utrovis feratur, vel Descendet, vel Ascendet: Æquiponderat utrinque.

Contrà verò: Quà, cæteris paribus, præponderat, vel minùs Repugnat; Eà vel plùs Descensurum est, vel Ascensurum minùs: Sin neutrà; Æqualis utrinque futurus est vel Descensus vel Ascensus.

Fig. 41. PUtà; Si in puncto G sit constitutum Grave; vel per G A, vel per G B ferendum: sitque G A, cæteris paribus, vel magis deorsum, vel minus sursum, quàm G B: Per illam potiùs quam per hanc feretur. Sin æqualiter; neutra propendet magis. Et contrà.

Sequitur ex 4 hujus.

PROP. XVII.

Eà præponderat Grave, cæteris paribus, & in eâ ratione quâ motus est Declivior: Quâque est Acclivior, magis repugnat.

Adeóque, omnium maximè in perpendiculo.

(Quâre & Ponderis simpliciter tanta Vis censeri solet, quantam in Perpendiculo habet.)

Quáque æqualiter vel Declivis est vel Acclivis, æqualiter vel propendet vel Repugnat.

Súntque hæc perinde vel Gravium motibus, vel aliis, accommodanda.

Fig. 42. PUtà; In rectis F P, F O S, F B T; eà ratione ponderat Grave quà sunt Declives illæ rectæ. Est enim Declivitas in Reciproca ratione Longitudinum æque-altarum; sive, quod eodem recidit in Directâ Altitudinum æque-longarum; (per 14 hujus.) Hoc est in ratione Descensuum (Ascensuúmve) cæteris paribus; (per 10, 12 hujus:) Adeoque, in ea ratione ponderant; per 4 hujus. Quod erat propositum.

Quare &, in perpendiculo, omnium maximè: ut quæ ex æque-altis Brevissima est; & ex æque-longis Altissima.

E

II,
en-
mi.
en-
eſt
ve
cor
p:
one
agi
an
ite
a:
rav
roc.
idt
eſt
1:
era
altis
E

P

vi

in
fu
qu

N
tel
Pe
Si
dif
óq
mo
Gr
F I
can
ctis
V
Per
lis f
ante
tudi
etia
erit

Si C
v
g
n
v
C
p
Idén
m

Et propterea (quod Definitionis instar esto) tantam Ponderis cujusvis Vim censemus, quantam in Perpendiculo habet.

Quodque de F T rectâ ostensum est; idem de curvæ F C puncto F, intelligendum est. Utpote cujus Declivitas, adeóque Tendentia deorsum, eadem est atque Contingentis rectæ F T: (per 15 hujus:) Adeóque & gravitatio; per 4 hujus. Fig. 43.

SCHOLIUM.

MOnendum tamen est: In rectarum, ut F T, punctis singulis, eandem intelligendam esse gravis Ponderationem, dummodo intelligatur Centrum Terræ tamquam infinitè distans; adeóque, propter Perpendiculorum quasi parallelismum, eandem ubique Declivitatem. Si tamen (quod ad Prop. 14 monuimus) Centrum intelligatur in certâ distantiâ finitâ; mutabitur, in singulis punctis, rectæ Declivitas; adeóque & Gravis, in eo puncto, ponderatio. Quo casu; quod de Curvâ modò dictum est, idem de rectâ pariter dicendum; Nempe eam esse Gravis, *in rectæ* F T *puncto* F, Ponderationem, quæ ex rectarum F T, F P, reciprocâ ratione colligitur: Atque in aliis punctis similiter judicandum. Quippe, ut in curvis, sic Rectis, pro mutata in singulis punctis Declivitate, mutabitur & Ponderatio.

Verùm cùm Centrum soleat, tanquam infinitè distans, reputari; & Perpendicula parallela: tutò solent (quoad sensum) & Rectæ in singulis sui punctis pariter Declives æstimari. Quamquam (quod & subinde antea monuimus,) si tantæ longitudinis Rectæ, Planáve tantæ amplitudinis, consideranda veniant; ut notabile hinc discrimen emergat; etiam hujus mutatæ Declivitatis, adeóque & Ponderationis, habenda erit ratio.

PROP. XVIII.

Si Grave, ubivis in eodem Perpendiculo, vel Incumbat, vel Dependeat, vel in ipso sustentationis puncto intelligatur, (vel cum ipso ita utcunque connexum, ut vel simul quiescant, vel simul æqualiter moveantur contrariæ vires; altera secundum, altera contra directionem suam:) Quò sustineatur, requiritur, æqualis Ponderi, vis Impediens; atque hæc sufficit.

Idémque intellige, mutatis mutandis; de quacunque Vi motrice.

Fig. 44. INtelligatur Pondus (seu Vis quælibet Motrix) in P; atque ibidem Vis Impeditiva motûs V. Si Vis Ponderis (seu Motiva) Major sit, præpollebit: adeóque descendet (sive secundum Directionem suam feretur,) non sustinebitur. Si Æqualis, æquipollebit: adeóque sustinebitur Pondus. (per 11. Cap. 1.) Unde constat propositum. (Si Vis Impediens sit major; eò fortius impediet: Non requiritur tamen, quia æqualis sufficit.)

Idem ostendetur; Si ubivis in eodem perpendiculo (sive Directionis Lineâ) constituatur P; dummodo quantum Descendit (sive secundum directionem suam movetur) P, tantum deprimatur (seu contra directionem suam revellatur) contraria Vis V. Nam (per 5 hujus) æqualium virium æquales progressus æquipollent: Adeóque, cum sint contraria (putà, secundum directionem suam altera, altera contra suam,) propter Impedimentum Momento æquipollens, non fit motus; (nedum si Impedimentum majus sit:) Fit autem; si minùs valet impedimentum, per 11 Cap 1.

Idem ostendetur; Si utcunque cum Pondere, seu Vi Motrice, ita Fig. 45. connectatur Vis Impediens, ut contrarii motus (alter secundum, alter contra Virium Directionem,) sint æquales. Putà; Si intelligatur P Pondus, ex funiculo P F (brevi an longo perindè est) liberè dependens, qui orbiculo circumpositus ex adversa parte pertingat ad V; ibíque æquale Pondus seu Vis æqualis applicetur; ita quidem ut, descendente P pondere, tantundem ascenderet, vel contra directionem suam revelleretur, pondus seu Vis V; (sive contrà; ascendente P, tantundem descenderet V, &c.) Nam (per 5 hujus) æqualium Virium, æquales progressus, æquipollent: Adeóque, contrariæ cùm sint, non fiet motus; fiet autem, si Vis Impediens minor sit. Per 11 Cap. 1.

SCHOLIUM.

HInc sequitur; Gravia ex filo longiori an breviori dependentia tantundem ponderare: Item, propius an remotius distent quæ incumbunt pondera, aut dependent; dummodo in eodem perpendiculo.

Hinc etiam sequitur; In construendis Machinis; Vectes, Juga, Fulcra, Funes, cæteráque Machinarum armamenta, tantæ firmitudinis intelligenda esse singula, ut oneri quod respectivè sustinent sint ferendo paria. Alioqui citiùs rumpetur Machina, vel incurvabitur, quàm perficietur expectatus motus.

PROP.

PROP. XIX.

Gravia, cæteris paribus, in ea ratione gravitant, quæ componitur ex rationibus Ponderum & Declivitatum; (sive Ponderum & Altitudinum rectarum longitudine æqualium; vel Ponderum & reciprocâ Longitudinum rectarum æque-altarum.)

Adeóque; Si Pondera sint Æqualia; in ratione Declivitatum: Si Declivitates sint Æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint Declivitatibus reciprocè proportionalia, (sive proportionalia Longitudinibus æque-altis;) æqualiter gravitant.

Idémque aliis Viribus Motricibus accommodabitur.

P. G :: *n*P.	*n*G :: P.	*m*G :: *n*P.	*mn*G :: *n*P.	G.
D.	D.	*m*D.	*m*D.	$\frac{1}{n}$D.
PD.	*n*PD.	*m*PD.	*mn*PD.	PD.

PUta: Si Pondus P, in Declivitate D, gravitet ut G: Pondus *n* P, in eadem declivitate, gravitabit ut *n* G, (per 1 hujus:) Adeóque in Declivitate *m* D, gravitabit ut *m n* G, (per 17 hujus:) Hoc est, in ratione ex Ponderum & Declivitatum rationibus compositâ, (per 2 Cap. 1.) Hoc est, (per 14 hujus,) ex Ponderum & Altitudinum rectarum Longitudine æqualium, vel ex Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum. Quod erat probandum.

Corollaria constant, ex 4 & 6 Cap. 1.

Alia Demonstratio.

Idem sic aliàs demonstrabitur. In F P ad Horizontem rectâ; sit Pondus D; & huic æquale L, in inclinatâ F O æque-altâ. Et connecti intelligantur Pondera D, L filo flexili D F L, punctum F immobile ambiente: ut moto D, versus P, tantundem moveatur L versus F; & contrà. Erit ut F P ad F O; puta ut *m* ad 1; sic vice versâ, Descensus Ascensúsve ponderis L in hac, ad Descensum Ascensúmve ponderis æqualis D in illa; (per 12 hujus:) adeóque & (quæ huic proportionalis est, per 5 & 17 hujus,) Gravitatio Ponderis in L, ad æqualis ponderis D gravitationem. Hoc est, si D gravitat ut G; æquale pondus L, gravitabit ut *m* G; hoc est, in reciproca Longitudinum æque-altarum; sive in Declivitatum ratione. Fig. 41.

Adeoque; Si Inæqualia sint L, D, pondera; Puta $L = nD$: gravitabit illud L, ut mn G: (per 1 hujus:) Hoc est, in ratione quæ ex Ponderum & Declivitatum rationibus componitur; sive ex ratione Ponderum & reciprocâ Longitudinum æque-altarum.

Quapropter; Si Pondera sint Declivitatibus reciprocè proportionalia, sive Proportionalia Longitudinibus æque-altis; æquè gravitant. per 6 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

PROP. XX.

Si, circa Punctum quodvis (extra Terræ Centrum) in Horizontali rectâ, ut Centrum, Recta linea, manente uno extremo, altero describat Circuli peripheriam, in plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato: Altissimum peripheriæ punctum, illud est, quod supra Horizontalem rectam est in rectâ ad illam perpendiculari; Humillimum, illud quod est in eâdem perpendiculari infra Horizontalem rectam: Punctorum verò in peripheriâ intermediorum; illud Altius est, quod est supremo propius; Inferius, illud quod est propius infimo, seu à supremo remotius: Quæ autem æqualiter utrinque vel à summo vel ab imo distant; sunt æque-alta. Idem, mutatis mutandis, aliis motibus accommodabitur.

Fig. 46. Circa Punctum F (quod Terræ Centrum non sit) in Horizontali rectâ AB, (cui ad rectos angulos insistit SFP recta,) conversi recta FA intelligatur peripheriam ASBP describere, in plano ad Horizontem vel recto vel utcunque inclinato. Erit, inquam, peripheriæ punctum Altissimum, S; Infimum, P: Intermediorum verò, ut C, quod propius ab S distat, ut G, Superius; quod propius à P, ut H, inferius; Quæque æqualiter vel ab S, vel à P distant; puta G, G; vel H, H: æque alta.

Sit primum ASBP peripheria, in plano ad Horizontem recto: Adeoque Centrum Terræ in eodem plano, (per 19 Elem. 3.) putà, in C, extra Circulum. Ductis, ab assignatis punctis, lineis rectis, in C Terræ Centro coeuntibus: constabit propositum; per 8. Elem. 3.

Si

Sin tantæ magnitudinis intelligatur Circulus A S B P, ut ad ipsum Terræ Centrum, vel ultra, pertingat; sitque C, verbigratiâ, vel intra Circulum, vel in ipsâ peripheria. Constabit propositum, per 7 Elem. 3.

Sit deinde, Circuli planum A S B C non ad Horizontem rectum, sed utcunque inclinatum: Adeóque nec Centrum Terræ in eodem Circuli plano, puta in C; sed extra planum, ut in K: Unde, ad obliquum Circuli planum, duci intelligatur K C perpendicularis, (punctum C, omnium in obliquo Circuli plano punctorum, proximum ad Terræ Centrum, adeóque omnium infimum designans.) Et jungantur tum S C, G C, H C, P C; tum S K, G K, H K, P K. Ostendetur, ut prius, (sive contingat C intra vel extra Circulum,) omnium ad C ductarum, longissimam esse S C; brevissimam, P C; item G C, longiorem quàm H C; æquales autem tum G C, G C; tum H C, H C. Adeóque, sumptis quadratis; Quadratum S C, maximum; P C, minimum; G C, majus quàm H C; Quadrata G C, G C, item H C, H C, invicem æqualia. Ideóque, addito communi augmento, quadrato C K; erunt quadratorum S C, C K, aggregatum, hoc est (per 47 Elem. 1.) quadratum S K, omnium maximum; quadratorum P C, C K, hoc est quadratum P K, minimum; quadratorum G C, C K, hoc est quadratum G K, majus quàm quadratorum H C, C K, hoc est quadratum H K; quadratorum G C, C K, & G C, C K, hoc est quadrata G K, G K, invicem æqualia; & similiter, quadratorum H C, C K, & H C, C K, hoc est quadrata H K, H K, invicem æqualia. Ergo &, sumptis lateribus; Recta S K, omnium ad K ductarum, maxima; P K, minima; G K, longior quàm H K; & G K, G K, item H K, H K, invicem æquales. Adeóque, punctum S, omnium à Terræ Centro Altissimum; P, Infimum; G, altius quàm H; & G, G, vel H, H, æquè-alta. Quod erat propositum.

Alia Demonstratio.

Idem ostendetur, Si intelligatur Centrum Terræ tanquam infinitè distans. Nam, ductis à punctis S, P, G, H, ad subjectam rectam Horizontalem quamvis perpendicularibus: Si planum Circuli sit, ad Horizontem Rectum; constabit propositum, ex Prop. 15. Elem. 3. Fig. 47.

Si verò planum Circuli ad Horizontem sit Obliquum. Intelligantur ab assignatis punctis S, P, G, H, demitti ad planum Horizontale quodvis subjectum perpendiculares S σ, P π, G γ, H η: & ab iisdem punctis, ad communem planorum Horizontalis & Inclinati Sectionem, totidem ad angulos rectos, S s, P p, G g, H h: (& compleantur Triangula.)

Ostendetur

Ostendetur, (ex 10 Elem. 11.) has illis (propter similia triangula S*σs*, P*πp*, G*γg*, H*nh*.) proportionales esse. Adeoque; quæ à communi Sectione *gsph* longius distant puncta in obliquo plano posita, eadem ab illo Horizontali plano longius distabunt, eruntque (secundum perpendiculum) altiora. Ostenso igitur ut priùs (ex 15 Elem. 3.) à communi sectione *gsph* (quæ ipsa est Horizontalis recta;) ostendetur etiam, ab ipso subjecto plano Horizontali *gshγσ*; punctum S, maximè; P, minimè; G, G, & H, H, æqualiter; & G, magis quàm H, distare. Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

QUoniam (ut suprà monitum est aliquoties) consideratur Terræ Centrum nunc quasi infinitè distans, nunc autem tanquam in distantia finita; adeóque perpendicula, nunc ut parallela, nunc ut in puncto concurrentia. Visum est propositionem hanc secundum utramque suppositionem demonstrare.

Notandum interim in propositione disertè dici, *In plano ad Horizontem vel Recto, vel utcunque Inclinato:* Quoniam in Horizontali plano, hoc est, in plano Horizonti parallelo, nullum erit peripheriæ vel Altius vel Humilius punctum, sed æque-alta omnia.

PROP. XXI.

Descendens Grave, cæteris paribus, rectâ ad Horizontem Perpendiculari feretur: Ex obliquis verò, eâ potiùs quæ minùs est obliqua.

Ascendens; contrà.

Ponderat autem (pro variâ Ascensuum Descensuúmve obliquitate) in ratione Rectorum Sinuum, Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi Obliquitatis.

Idémque aliis motibus accommodabitur.

OStendetur enim (ex præcedente) rectarum longitudine æqualium, perpendicularem (ut FP) esse omnium altissimam; adeóque, & maximè declivem (per 14 hujus.) Hac igitur, præ cæteris feretur Descendens grave; contrà vero, Ascendens. per 17 hujus.

Ex

Ex obliquis verò, ut F O, F B; ſimiliter oſtendetur (ex præced.) illam quæ minus eſt obliqua, Puta F O, altiorem eſſe; adeóque (per 14 hujus) & magis declivem. Ideoque (per 17 hujus) per hanc potiùs latum iri Deſcendens Grave; Aſcendens, contrà. Fig. 41.

Utrobique verò ponderat Grave (Deſcenſum promovendo, adeóque Aſcenſum impediendo) in ratione F P, F Q, F R, altitudinum rectarum Longitudine æqualium F P, F O, F B, (per 14 & 17 hujus:) Hoc eſt (quod ex Trigonometricis conſtat) in ratione Sinuum rectorum, angulorum Inclinationis F P S, F O Q, F B R; qui ſunt angulorum Obliquitatis P F P, P F O, P F B, complementa. Quod erat propoſitum.

PROP. XXII.

Grave, quatenus non impeditur; per rectam Horizonti perpendicularem deſcendet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliis motibus.

DEſcendet enim, quatenus non impeditur; per 2 hujus. Et, hac præ cæteris; per præcedentem.

PROP. XXIII.

Super impenetrabili Plano Horizontali conſtitutum Grave, vel ſuperficie Sphæricâ, Terræ concentricâ; Gravitate ſuâ non movebitur.

Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque ſit Vis motrix. Nempe quum planum eſt Directioni virium ad angulos rectos.

SIt, in B, Grave; impenetrabili Plano Horizontali H B O incumbens; vel ſuperficiei Sphæricæ, quæ ſit Terræ concentrica, D D B. Fig. 30.
Manifeſtum eſt (propter æquales Sphæræ radios) nullum in ipsâ DDB Sphæricâ ſuperficie punctum, (nedum quod ſupra ipſam eſt, aut etiam ſupra planum Horizontale,) propiùs à Terræ Centro diſtare, quàm ipſum B punctum. Adeóque; ſi nec ſuperficiem illam (ſive Sphæricam,

cam, sive Horizontalem,) penetrare possit, (quod supponitur;) in nullas movendo partes, descendet, (per 3 hujus) Cùm itaque (per Def. Gravitatis) non nisi Descensûs ergo, gravitate suâ moveatur grave, nec possit (per jam demonstrata) descendere: Non movebitur, gravitate suâ, sic constitutum Grave. Quod erat Demonstrandum.

SCHOLIUM.

IDem ostenderetur de Gravi, in B, superficiei concavæ incumbenti quæ in B tangat Horizontale planum; seu cujus punctum infimum sit ipsum B. Item, de convexâ Sphæricâ cujus Centrum sit ultra Centrum Terræ, quam tamen in B continget planum Horizontale; utpote cujus punctum infimum sit ipsum B. Idem verum est de superficie minoris Sphæræ quam sic contingat B: non autem ob hanc causam, quia punctum illud non sit reliquis altius, (est enim;) sed propter Prop. 5 hujus: quippe non est una aliqua declivitas, reliquis omnibus major.

Per *Impenetrabile planum*, &c. illud intelligimus, quod, eâ saltem quæ adhibetur Vi, non penetrabitur; utut Vi majore penetrari possit.

Notandum est hic porro, Dummodo, ob immensam Terræ Centri distantiam, & expositi plani parvitatem, intelligatur Horizontale planum cum superficie Sphæricâ, terræ concentricâ, coincidere; adeóque ipsius puncta singula, quasi-æqualiter à Terræ Centro distare: perinde est sive in B, sive in H, alióve Horizontalis plani H B O puncto, intelligatur Grave constitutum. Sin ἀκριβῶς consideretur; non erit illud nisi unius B puncti respectu, planum Horizontale. Quare & in H constitutum grave, poterit ad B moveri gravitate suâ; utpote punctum inferius.

PROP. XXIV.

Super impenetrabili plano ad Horizontem sive recto, sive utcunque inclinato, constitutum Grave; nec aliàs impeditum; per illam Plani rectam descendet quæ est rectæ Horizontali ad angulos rectos, deorsum. Quæ quidem recta, in erecto plano, est ipsum *Perpendiculum*; in obliquo plano, *Perpendiculi succedaneum*, appello.

(Adeoque

P. II.

in nul-
per De:
grave,
, gravi-

ambent
nfimum
ra Cen-
utpote
icie ni-
n, qui
Prop.
ajor.
 falten
rari pos

entri di-
planum
ue ipsis
nde es
, intell
it illud
n H con-
ctum i-

o, sive
iàs im-
st recta
quiden
in ob-

deoque

PRO

(Ac

ij

ta

Et,

P

O

Ide

V

M

r

g

S

orſu

ſunt

Uni

impe

ligat

ſcen

Id

cæte

cæte

liqui

F

alibi

I

Gra

ea r

Decl

jectu

(Per

Intel

pene

C

HO

ſtru

I

(Adeoque; eadem est, Descensûs Gravis in Declivi plano, ipsiúsque Declivis plani, tum Declivitas, tum Obliquitas, & Inclinatio.)

Et, universaliter; in quâcunque superficie Declivi, illo præ cæteris ductu feretur (siquis sit) qui est reliquis omnibus Declivior.

Idem intellige, mutatis mutandis, de motis ab aliâ quâvis Vi motrice; Nempe secundum illam plani rectam feretur Mobile, (nisi aliàs impeditum,) quæ est ad angulos rectos illi rectæ quæ Lineam Directionis Virium ad angulos rectos secat.

Sit, in Declivis Plani puncto F, constitutum Grave; rectæque Horizontali AFB ad angulos rectos FP recta, in eodem Plano, deorsum. Ostendetur (ex 20 & 14 hujus) omnium quæ in illo plano sunt (nedum quæ supra planum) longitudine æqualium, ad F ductarum, Unicam FP rectam, maxime declivem esse. Adeóque (cùm, propter impenetrabile planum, ad illas infra Planum ne transeat, impediri intelligatur) per ipsam FP (per 17 & 5 hujus,) nisi aliàs impediatur, descendet Grave. Quod erat demonstrandum. Fig. 46, 47.

Idem aliis superficiebus accommodandum erit, pro re natâ; Nempe, cæteris paribus, illo semper ductu (siquis sit) latum iri Grave, qui est cæteris omnibus declivior: per 17 & 5 hujus. Sin talis nullus sit (reliquis omnibus declivior) ductus; non movebitur. per 8 hujus.

Alia Demonstratio.

Potest hoc idem demonstrari, ex Prop. 21. propter Obliquiorem alibi Descensum: hoc modo. Fig. 48.

In Declivis Plani PGOH puncto G, constitutum intelligatur Grave: Atque, in eodem plano, tum Horizontalis recta PG (nempe ea recta secundum quam Horizontale planum, per G transiens secat Declive planum,) tum huic ad angulos rectos GO: Indéque ad subjectum Planum Horizontale HOR, demissa perpendicularis GR: (Per quam itaque, nisi impedietur, descendet Grave; per 22 hujus.) Intelligatur autem, ob duritiem Declivi Plano subjectam, impediri nè penetret. Dico per GO descensurum Grave.

Cùm enim duo Plana Horizontalia, adeóque Parallela, alterum in HO, alterum in PG, secet idem declive planum PGOH (per constructionem:) erunt HO, PG, parallelæ rectæ. per 16 Elem. 11.

Item, propter PG rectam, rectis GO, GR, ad angulos rectos,

(per constructionem,) erit ad planum O G R recta, (per 4 Elem. 11.) Adeóque & (huic parallela) H O, eidem O G R plano recta erit, (per 8 Elem. 11.) rectisque O G, O R, ad angulos rectos; per 3 Def. Elem. 11.

Et, si Centro R S in plano H O R, ducatur per O, peripheria O S; eam contingens H O, extra peripheriam jacebit; per 16 Elem. 3.

Si itaque ad rectæ H O, aliud quam O, punctum quodvis T, ducatur G T recta, & R T jungatur; secabit hæc peripheriam; Puta in S. Et, junctâ G S, erit (propter G R ad planum Horizontale rectam, adeóque angulos G R O, G R S, æquales rectos; & R O, R S, æquales radios; rectámque G R communem) S G recta, æqualis rectæ O G, & angulus S G R æqualis angulo O G R; per 4 Elem. 1.

Est autem angulus T G R, major angulo S G R (parte sui,) ergo & (huic æquali) angulo O G R major est. Adeóque Descensus obliquior est per G T, quam per G O.

Cùm igitur Grave, quàm potest rectà ad Centrum descendat, (per 21 hujus;) per G O potius quam G T feretur.

Atque similiter de aliis ejusdem Plani rectis ostendetur. Adeóque a fortiori, de rectis ultra planum, aut etiam curvis.

Ideóque (cùm nec Planum penetrare possit) per rectam G O (non aliàs impeditum) descendet Grave in G, (ut qui reliquis rectior est Descensus:) Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

HAnc Demonstrationem præcedenti subjungere visum est, propter quæ apud Mechanicorum Scriptores de Obliquitate Descensus occurrunt, Angulíque Obliquitatis magnitudine. At priorem ego prætulerim, quæ ex Declivitate, hoc est, ex Altitudine rectarum longitudine æqualium, vel Longitudine æque altarum, dependet: tum ut simpliciorem; tum, præcipuè, quoniam quod ex Obliquitate hac oritur Gravitationis impedimentum, Augmento longitudinis Descensuum æque-altorum proportionale est; & non Obliquitatis Angulo; (quod ex jam dictis & post dicendis manifestum erit:) Adeóque illi potius quàm huic, ut veræ causæ referendum.

Hinc autem sequitur; Eandem esse Descensûs Gravis in Declivi Plano, ipsiúsque Declivis Plani, ad Horizontem Inclinationem; (Nam per Def. 5 & 6, Elem. 11. Angulus G O R est Inclinationis Mensura, tum rectæ G O, tum plani P G O, ad Horizontem. H O R:) Adeóque eandem utriusque tam Obliquitatem, tam Declivitatem: Nempe idem Obliquitatis Angulus O G R; eadémque Declivitas sive rectæ G O, ad G R, ratio.

PROP.

PROP. XXV.

Obliquitas motûs, eâ ratione minuit Gravitationem, (adeóque Descensum impedit, adjuvat Ascensum;) quâ Longior est obliqua recta, illam determinans, quàm perpendicularis æque-alta; sive Secans Anguli Obliquitatis, quàm Radius.
Idémque aliis motibus accommodabitur.

NAm (per 17 hujus) Grave, pro variâ Declivitate, gravitat in ipsâ Declivitatis ratione; hoc est (per 14 hujus) in reciprocâ ratione rectarum æquè-altarum. Puta, quâ ratione longior est F S vel F T obliqua, quàm perpendicularis æque-alta; sive (quod in Trigonometricis dicitur) F S vel F T Secans Anguli Obliquitatis P F S vel P F T, quam Radius; Eâ minùs gravitat in F S vel F T ferendum grave, quam in F P. Quod erat probandum. Fig. 42.

Adeóque (per 17 Cap. 1.) in eâdem ratione minùs Descensum promovet, vel Ascensui repugnat; sive (quod eodem recidit) in eâ ratione Descensus Obliquitate impeditur, & facilitatur Ascensus. Quod itidem probandum erat.

PROP. XXVI.

Obliquatio Plani in quo fit Motus; in eâdem ratione minuit omnium in illo ferendorum Gravitationem: eâ nempe quam ipsa Plani Obliquitas postulat.
Et in aliis motibus similitèr.

SIt in Obliquo Plano G O T, recta quævis G T. Atque à puncto G, demittatur, ad Horizontale Planum T O R, perpendicularis G R. Atque, ad communem Planorum intersectionem T O normalis G O, (ut sit G O R Inclinatio Plani, per Def. 6. El. 11. & O G R Obliquitas.) Si igitur intelligatur G O T planum, super Horizontalem rectam O T erectum esse; erit utriusque rectæ G O, G T, communis Fig. 48.

I 2 Altitudo

Altitudo G O: In eodem verò Plano Obliquato, Communis Altitudo est G R. Ideóque; quâ ratione G R brevior est quàm G O, (hoc est, Radius quàm Secans Anguli Obliquitatis,) Eâdem ob Plani Obliquationem minuitur Altitudo (adeóque Declivitas, & Gravitatio, per 14 & 17 hujus) sive per G O, sive per G T, ferendi Gravis. Quod erat probandum.

PROP. XXVII.

Grave, situ Declivi ferendum; sponte suâ movebitur: Situ Horizontali (sive secundum Superficiem Sphæricam Terræ concentricam;) Vi quantumvis exiguâ: Situ Acclivi; eâ Vi movebitur quæ Impedimento ex Acclivitate (cum Pondere comparatâ) orto præpollet. Idem aliis motibus accommodabitur.

Fig. 49. PEr Declivem ductum, ut F P, F S, (adeóque Descendentem, per Def. 16. Cap. 1.) sponte suâ (nisi aliàs impeditum,) feretur grave; per 2 hujus. Per Horizontale Planum, vel superficiem Sphæricam, Terræ concentricam, ut P H, (cùm nullus sit vel Descensus vel Ascensus; per 9 hujus;) nec sponte suâ movebitur, (per 23 hujus:) nec tamen motui adversatur, (per 4 hujus;) adeóque Vi quantumvis exiguâ movebitur, per 11 Cap. 1. Per Acclivem ductum, ut P F, P O, (adeóque Ascendentem, per Def. 16. Cap. 1.) motui adversatur Gravitas, (per 4 hujus,) impeditque, (per 8 vel 10 Cap. 1.) Huic tamen Impedimento Vis præpollens, movebit; per 11 Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHOLIUM.

NOtandum verò, tum hic, tum toto hoc Capite, (aut etiam alibi,) ubi variam planorum motuúmve, sive Declivitatem, sive Acclivitatem; quódque hinc oritur motûs vel Adjumentum vel Impedimentum; consideramus: Nullam omnino habitam esse rationem vel Resistentiæ medii, vel Asperitatis aut scabritiei planorum aut superficierum super quibus movetur, & siqua sunt ejusmodi Impedimenta alia: Sed solius, quod ex Obliquitate Descensuum Ascensuúmve oritur, Impedimenti vel

Adju-

Adjumenti: tanquam si in medio vacuo peragendus esse motus, nullaque aliunde remora adveniret. Quippe illa omnia sunt huic considerationi planè extrinseca; & seorsum, si opus est, perpendenda, Quamquam igitur, verbi gratiâ, super Horizontali Plano, aut etiam aliquantum Declivi, nonnisi magnâ Boum aut Equorum Vi trahatur Plaustrum: Non tamen illud ex plani Positione oriri censendum est; sed ex aliis insuper superandis motûs impedimentis, quorum hic rationem non habemus.

PROP. XXVIII.

Datum Pondus, datâ Vi, movere; pro variâ motuum Acclivitate.

Idem intellige, de quâvis aliâ Vi Impediente, per aliam quam Directionis suæ lineam revellendâ.

V . G :: *n*V . *n*G.

Sint PH, FG, rectæ Horizontales; FP, GH, perpendiculares. Fig 50. Atque intelligatur elevandum Pondus, in P: & huic affixum Filum flexile, seu Funiculus, PFGV; puncta fixa F, G, ambiens: & in V, Vis Motrix applicata. Adeò ut, quantum trahatur funiculi extremum, secundum Vis applicatæ directionem GV; tantundem elevetur, contra directionem suam, pondus P, in PF perpendiculari. Atque intelligatur Vis V, Vi ponderis P æqualis. Æquipollebit igitur, (per 7 hujus;) Adeóque sustinebit; &, si vel augeatur, vel Ponderis Vis minuatur (rectâ PF vel tantillum reclinatâ, puta in situm PO, per 25 hujus;) movebit. per 9, 11. Cap. 1.

Requiratur autem, ut idem vel Æquale Pondus, Vi minore moveatur, (Nam de Æquali, vel Majore, jam constat:) Puta Vi *n*V; quæ nempe sit ad V, in ratione datâ *n* ad 1.

Dico; Si aptetur angulo PFG, recta PO, quæ sit ad PF, ut 1 ad *n*, (nempe, in reciprocâ ratione virium,) & movendum Pondus, super Acclive Planum, in PO rectâ, per POGV Filum flexile trahatur: Vis data *n*V, ponderi P, in hoc situ Æquipollebit; &, si tantillum adhuc augeatur Obliquitas, movebit.

Nam, propter PO ad PF, in ratione 1 ad *n*: Si P in PF Gravitet ut G, idem in PO gravitabit ut *n*G, (per 14 & 17 hujus:) Ideóque, cùm illi æquipolleat Vis V, huic æquipollebit Vis *n*V, (per 17 Cap. 1.) Adeóque (per 25 hujus) si fiat PO adhuc vel tantillum longior, Vis præpollebit, adeóque movebit; per 9, 11, Cap 1.

PROP.

PROP. XXIX.

Datum Pondus, per Datam Acclivitatem movere. Idem intellige, de quâvis aliâ Vi impediente.

V . G :: *m* V . *m* G .

Fig. 50. Reliquis, ut priùs, constructis: Intelligatur Vis V, æquipolle[ns] Ponderi P, per Acclivitatem P O movendo. Et requiratur, [ut] per Acclivitatem Majorem (nam de Minore satis constat) puta P F moveatur.

Dico; Si, quâ ratione Brevior est P F quàm æqui-alta P O, eâde[m] augeatur Vis V; æquipollebit; Adeóque, si ulterius augeatur; m[o]vebit.

Nam, ut P O ad P F; puta ut *m* ad 1; Sic, vice versâ, Gravita[tio] ponderis P in P F, ad ejusdem gravitationem in P O: (per 14 & [..] huius.) Adeóque, cùm Vis ut V, æquipolleat huic; Vis ut *m* V, æq[ui]pollebit illi; (per 17 Cap. 1.) &, aucta, movebit. per 9, 11. Cap.

PROP. XXX.

Datâ Vi, in Acclivitate datâ, motum efficere. Idem intellige, mutatis mutandis, quæcunque sit Vis i[m]pediens.

V . P :: *n* V . *n* P .

Fig. 50. Cæteris, ut priùs, constructis: Intelligatur Vis V, Ponderi P, [per] Acclivitatem datam P O movendo, æquipollens. Et requira[tur] ut datâ Vi, *n* V, (puta quæ sit ad V, ut *n* ad 1,) fiat motus.

Dico; Si pro P pondere, substituatur *n* P, (quæ nempe sit a[d] pondus, in eâdem ratione quâ data Vis *n* V ad V;) huic æquipolle[bit] data Vis (per 17 Cap. 1.) Adeóque, Si tantillum adhuc minua[tur] Pondus; Vis præpollebit, adeóque movebit. per 9, 11. Cap. 1.

SCHOLIU[M]

SCHOLIUM.

SI porro in tribus proximè præcedentibus Problematis, Celeritatis ratio habenda erit; ut non tantum motus utcunque fiat, sed & datâ celeritate fiat. Huic satisfactum erit ex Prop. 29, 30. Cap. 1. Nempe invento (per tres Propositiones præcedentes, respectivè,) quo pacto motus fieri possit aliquâ saltem celeritate: Quâ ratione augenda erit celeritas; eâdem augenda erit, in Prop. 28 hujus, inventa longitudo rectæ PO; &, in Prop. 29, inventa Vis; &, in Prop. 30, eâdem minuendum erit inventum Pondus.

PROP. XXXI.

Grave, ex puncto fixo liberè dependens; Si in Perpendiculo constituatur; manebit: Si extra Perpendiculum, ad Perpendiculum feretur. (Et quidem per arcum circuli in plano ad Horizontem recto.)

In plano autem ad Horizontem obliquo; ad eam rectam feretur quæ est Horizontali rectæ ad angulos rectos; (quam *Perpendiculi Succedaneum* appello:) & in eâ si ponatur, consistet.

Idem intellige, mutatis mutandis, in aliâ Vi Motrice.

SIt FG, Horizontalis recta; FP, perpendicularis. Atque ex F puncto fixo, dependeat, per FP filum, pondus P. Adeóque; Si extrà perpendiculum quocunque moveatur, putà ad S; describet (propter eandem fili longitudinem) arcum circuli PS, (saltem aliquod in superficie Sphæricâ, centro F descriptâ, punctum S designabit, quod PS circuli arcum terminabit:) Est autem (per 20 hujus.) Punctum P (utpote omnium in illa peripheriâ, aut etiam Sphærâ; infimum) ipso S humilius. Non igitur ad S feretur; per 2 hujus. Quod demonstrandum erat. Fig. 49

Si verò extra P constituatur: Propter punctum P omnium infimum, ductúmque SP continuè descendentem, (per 20 hujus;) omniúmque maximè (utpote per circuli peripheriam in Sphæra maximi, in perpen-

dicolari

culari plano positi,) per 24, 25, 26. hujus; eò feretur; per 4 & 8 hujus. Quod itidem erat demonstrandum.

Idem similiter ostendetur: Si in F P G plano ad Horizontem obliquo ferendum intelligatur Grave; propter punctum P omnium in illo plano infimum, per 20 hujus: ductúmque circuli, maximè Declivem, per 24, 25, 26. hujus. Quod erat ultimo demonstrandum.

SCHOLIUM.

SUpponit hæc Propositio, Filum *non Extensile*, sed non & *Inflexile*; adeóque disertè procedit de Gravi Pendulo; quod itaque humilius intelligitur, saltem non altius, quàm F punctum fixum. Verum quidem est; si esset in eâdem P G peripheriâ, supra Horizontalem rectam F G continuatâ; descenderet hoc ad Perpendiculum; at non statim hac de causâ, neque statim secundum peripheriam; sed secundum Perpendiculum, ut Grave adhuc absolutè liberum, (non tantum liberè Pendulum,) per 21 hujus: donec, extenso ad suam longitudinem filo coërceretur ne diutius recta descenderet, sed secundum Peripheriam, Vi Propositionis hujus.

Sin Filum illud etiam Inflexile intelligatur; ubicunque in eâ peripheriâ (extra perpendiculum) ponatur; (sive supra sive infra Horizontalem lineam;) secundum peripheriam descendet, circa Centrum motûs rotando. Verùm illud hujus loci non est; sed ad Libram spectat, & infra demonstrabitur.

PROP. XXXII.

Grave pendulum, in Perpendiculo constitutum, Vis quantumvis exigua, à Perpendiculo dimovebit.

Idem de Perpendiculi Succedaneo, in Obliquo plano, intelligendum. Déque aliis motibus, mutatis mutandis.

Fig. 49. EX puncto F, in Perpendiculo F P, dependeat ex Filo Pondus P. Quod, ex perpendiculo motum, describat P S G Circuli quadrantem; Cui circumscribatur F H quadratum. Et exponatur, secundum directionis lineam P H Horizontalem, Vis quantumvis exigua: puta quæ sit ad Vim Ponderis P, ut *n* ad 1 (hoc est, si intelligatur Vis V Ponderi P in perpendiculo æquipollens, sit exposita Vis *n* V.) Exponatur

ponatur (ex præscripto Prop. 28 hujus.) P O recta, ita declivis, ut Ponderi P in P O movendo æquipolleat Vis *n* V. Nempe, sumatur, in H G rectâ, recta H O quæ sit ad P H in ratione virium expositâ *n* ad 1; & jungatur P O. Cùm enim sit, ut Vis ad Pondus, sic Altitudo H O in perpendiculo (quæ est Directio Ponderis) ad H P lineam directionis Vis Moventis: Exposito Ponderi per P O movendo, æquipollebit Vis exposita; adeóque auctâ vel tantillum Obliquitate, Movebit. per 28 hujus. Est autem (propter S P H angulum contactûs, minorem angulo rectilineo O P H, per 16 Elem. 3.) Obliquior Ascensus per P S quàm per P O. Movebit igitur datum Pondus, Vis Exposita, in P S peripheriâ. Quod erat probandum.

Alia Demonstratio.

Idem demonstrabitur ex 15 hujus: Propter eandem P S peripheriæ in puncto P declivitatem, atque Contingentis rectæ P H; quæ cum Horizontalis sit, constabit propositum, per 27 hujus.

PROP. XXXIII.

Grave Pendulum datum, quousque extra perpendiculum, datâ Vi, movebitur; determinare.

Fig. 49.

Constructis ut prius: Dico; Per arcûs P A (quem abscindit P O recta) Semissem P S, nec ultrà, Expositâ Vi motum iri Pondus P. Nam, quæ P A arcum (adeóque & subtensam, per 30 Elem. 3.) bisecat è Centro recta F S, secat subtensam P A ad angulos rectos; per 3 Elem. 3. Huic igitur subtensæ, hoc est P O rectæ, parallela est quæ Circulum in S tangit S T recta, (per 16 Elem. 3) Adeóque pariter Obliqua, (per 29 Elem. 1.) Cum itaque magis adhuc sit ad Horizontem Obliqua, arcûs P S pars quælibet (ipso S puncto excepto:) minus autem, pars quælibet arcûs S A; (quod ex 15 hujus demonstrabitur:) ad S, nec ultra, movebitur Pondus P, ab eâ Vi quæ ei, per Acclivitatem P O movendo, æquipollet; per 28 hujus. Quod erat determinandum.

PROP. XXXIV.

Grave Pendulum datum, ad datam altitudinem movere quanta Vis requiritur, determinare.

Fig. 49. IN eadem Figura: si velim ad S punctum usque moveri grave Pendulum P; sumatur arcus P A, duplus expositi A S; junctaque P S continuetur donec occurrat, in O, perpendiculari rectæ G H. Cumque arcus P S particulæ minus acclives sint quàm T S vel P A, acclivior autem particulæ omnes ultra S; Si sumatur (per 29 hujus) Vis eadem sufficiat movendo Ponderi P dato in acclivitate P A, seu P O, sufficit eidem movendo per arcum P S. per demonstrata ad Prop. præced.

CAP. III.

De Libra.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Libra (*quæ* & Bilanx *dicitur*) *notissimum est in Officinis Instrumentum, quo Pondera explorantur.*

BIlanx, à *binis lancibus*, nomen habet. Græcis σταθμὸς dicitur, ab ἵστημι *pendeo.*

Libræ nomen, an à Græco λίτρα descendat, an hoc ab illo à posterioribus Græcis deformatum sit; non convenit inter Criticos.

Qui originem Græcam esse volunt; à λίτρα, quæ exigua vel Ponderis vel Monetæ species erat, (sic enim Siculi *Obolum* dixerunt,) posteriores Græcos ejus alteram significationem deduxisse sentiunt, (quâ vel *Pondo* significet, seu duodecim Unciarum Pondus; vel ipsum etiam Ponderationis Instrumentum:) atque hinc fluxisse Latinorum Libram: ut à τέρετρον, *Terebrum*, (nisi quis hoc à *Tero* malit) T in B mutato.

Qui Latinam malunt originem; *Libram* quasi *Liberam* dici volunt, (quod ipsum à *Libet* videatur descendisse, nisi repugnaret primæ syllabæ quantitas; fortassis igitur, ab ἐλεύθερος, *Liber*; ut, ab ἐρυθρὸς, *ruber*; mutato θ in B; sic à πλῆθος, *plebs*; &, ab οὖθαρ, *uber*; unde & nostrum *udder*, mutato θ in *d*; sicut, à θυγάτηρ, *daughter*:) propter Æquilibrii in utramque partem indifferentiam: Inde autem Græcorum posteriorum λίτραν, hoc sensu, deformatum; sicut à multis aliis vocabulis Latinis, Græca descendisse, certum est.

Multas habet partes; putà *Jugum*, *Axem*, *Trutinam*, *Examen*, *Lances*, &c.

II.

Libræ Jugum, *Vectis est seu Trabs oblonga, cujus ab extremi dependent* Lances. *Quod & tantæ firmitatis esse intelligitur, ut appensis ponderibus sustinendis par sit, nec eorum pondere vel rumpatur vel incurvetur.*

I*Ugum*, à *Jungo*, dicitur, (sicut, eodem sensu, à ζεύγω, ζυγὸν,) quod Lancium appensiones interjungat. Nisi quis immediatè à ζυγ Jugum dici malit; sicut, à ζεύγω, ζευγνύω, *Jungo*.

III.

Axis, *est Jugi medio transversim infixus, qui jugum sustinet, & circa quem rotatur: Jugum in duo Brachia dirimens.*

IV.

Jugi Brachia, *utrinque ab Axe ad Appensionum puncta porriguntur.*

V.

Lances, *à Brachiorum extremis liberè dependent, quibus immitti solent Pondera; alteri quidem, Notum; alteri, explorandum.*

VI.

Trutinam *appellant Manubrium sive Scapum, quo Axis extrema utrinque sustinentur, &, cum Axe, Jugum ipsum.*

Trutinam verò ipsam sustinet vel tenentis Manus, vel Uncus aliq fixus, aliúdve sustentaculum.

Dicitur autem à Græco τρυτάνη, quod idem significat; & hinc τρύω, *tero*, *attero*; quod pondere sustinendo Teratur. Usurpa etiam συνεκδοχικῶς pro Bilance totâ.

Solet autem (nec incommodè) Axis, Jugo transfixus, utplurim Jugo firmetur conjungi, tanquam ipsius pars; ejúsque extrema, in duo in infimâ parte Trutinæ foramina, liberè moveri. Quamquam possit Axis ipsius Trutinæ pars fieri, ita ut, circa ipsum immotum, libe rotetur Jugum.

VII.

Examen *dico Lingulam, quæ medio Jugo insistens ad angulos rectos, indicium est vel Æquilibrii, dum intra fissuram perpendicularis Trutinæ continetur; vel Præponderantiæ, prout ad hanc aut illam partem extrà vagatur.*

HUc, credo, respicit illud *Persii* Sat. 1.

——— *Examenve improbum in illâ*
Castiges Trutinâ. ———

Dici videtur (ab *Exigo, Exegi, Exactum,*) *Examen* quasi *Exagmen*: Atque hinc *Examino*. Alii tamen, ab *ἅμμα vinculum, ligamen* Fig. 51.
(quod ab *ἅπτω ligo,*) deducunt *Amen* sive *Amentum*, quod *Lorum* significat, (illud speciatim quod mediis Jaculis annectebatur, quò melius in hostes jacerentur:) Atque hinc *Examen*; tum ubi *Examen Libræ* significat, (quod Filum esse volunt seu Funiculum, quo Trutina regitur;) tum ubi significat *Examen Apum*; quæ quasi vinculo societatis connectuntur: Sicut & ipsum *Apum* nomen ab antiquo *Apio*, atque hoc ab *ἅπτω* deducunt, *quod se invicem pedibus alligent*: Quasi huc respiciat *Virgilianum* illud, *Georg.* 4.

Atque illæ pedibus connexæ ad limina pendent.

VIII.

Æquilibrium *verè dicimus, quum ad Libram contraponderantia, æquiponderant.*

QUódque in Libra speciatim *Æquilibrium* dicimus, idem est in aliis Machinis, sive contrariarum virium quibuscunque complicationibus, virium *Æquipollentia*: quæ tamen & Æquilibrium, (translatione, à Librâ, factâ) non raro dicitur; quum æquipollent contrariæ vires in aliis non minus Machinis, quàm in ipsa Libra: Pariter atque *Propensus, Propensio*, aliáque cognata Vocabula, quamquam primâ significatione, Libram spectent, Metaphoricè tamen de quibuscunque ad motum Inclinationibus usurpari solent.

In adjuncto Schemate: A B, est *Jugum Libræ*; per cujus medium Fig. 51.
C, transit *Axis* X S, dirimens Jugum in duo Brachia C A, C B; unde, ex punctis A, B, dependent duæ *Lances* L, L. Axis autem extrema X, S, sustinet X T S *Trutina*; quæ ipsa, in T, sustinetur; per cujus

cujus fissuram mediam, *Examen* C E huc illuc transit (dum A B Jugum circa Axem X S rotatur,) vel *Æquilibrium* indicans, vel in hanc aut illum partem Præponderantiam.

Estque hæc vulgaris Officinarum *Libra*.

PROP. I.

Dum Axe fixo sustinetur Libra; duo utrinque Brachia (cum suis Ponderibus) contra-ponderant.

NAm, fixo Axe XS, non potest (propter inflexile Jugum AB per Def. 2 hujus) Brachium A (Onúsque suum) Descendere, quin Ascendat (cum suo) Brachium B; neque hoc Descendere, quin Ascendat illud.

PROP. II.

Si utrinque porrecta duo Libræ Brachia, (unà cum Lancibus, reliquâque siqua est armaturâ,) invicem æquiponderant: tantundem est, Librationem quod spectat, ac si nullius essent Ponderis: Axis verò reliquæque Libræ firmitatem quod attinet, tantundem valent, quantum est simul utriusque (cum armaturâ suâ) Pondus.

PUtà; Si Brachium C A tantundem ponderando valeat, ad sui Depressionem, adeóque (propter inflexile Jugum) Elevationem contrarii C B; quantum in contrarium valet brachium C B, (nempe ad sui Depressionem, cum elevatione contrarii C A:) tantundem simul valent atque si nullius essent Ponderis.

Nam (per Prop. 8 Cap. 1) contrarii conatus, cùm invicem æquentur, se mutuo destruunt, seu nullis æquipollent. Nempe, *Librationem* quod *spectat*; quatenus scilicet contra-ponderant duo Brachia.

Ad *Axis* vero (ne ruat) *Jugique* (ne rumpatur aut incurvetur) firmitatem requisitam; ipsiusque *Trutinæ*, *Fulcrive* quo sustinetur, Vires non modo non nullis æquivalent Brachiorum pondera; sed tantundem valent, quantum est utriusque simul Brachii Pondus, & siquid ultra est oneris.

Quippe

Quippe, hoc respectu, non sunt conatus contrarii; sed utriusque deorsum: cui quidem communi Conatui, cùm obstet tum Axis permanentia, Fulcrique quo sustinetur, tum Jugi vis inflexilis, &c. & quidem sigillatim Singula: illi par esse debet singulorum firmitas. per 18 Cap. 2.

DEF. IX.

Libram *igitur* Mathematicam *consideramus, ad instar unius inflexilis Lineæ Rectæ, utrinque quantum opus est porrectæ, librandis Ponderibus adhibitæ.*

DUmmodo enim, positis in Æquilibrio Libræ Brachiis, eorum Pondera nullius instar habeantur; poterit similiter tum Libræ Magnitudo, tum Figura ipsa tutò negligi, ut solius Longitudinis habeatur ratio, ob ea quæ inde dependentia post tradentur.

X.

Centrum Libræ, *dicimus, Punctum illud quod eam dirimit in Brachia invicem Æquiponderantia.*

Æquiponderantia, dico, potius quàm *Æque-gravia*; quoniam fieri potest, ut, quæ sunt (absolutè considerata) æque-Gravia, possint, ratione sitûs seu Positionis, inæqualiter Gravitare vel Ponderare; quod tum ex sequentibus patebit, tum supra ostensum est, Prop. 10, 11. Cap. 2.

XI.

Adeóque Brachia *sunt, quæ utrinque à Centro Libræ porriguntur; quæ vel Longitudine, vel saltem Ponderatione, Æqualia intelliguntur.*

XII.

Appensionum, *vel* Applicationum Puncta, *dicimus, ea Libræ Puncta, in quibus vel actu sunt, vel inde liberè dependent appensa Pondera; vel saltem (in eodem ad Centrum Terræ Perpendiculo) directè vel incumbunt, vel subjiciuntur.*

Notandum

NOtandum igitur; siquando inæqualiter utrinque à Centro Libræ distant Applicationum Puncta; adeóque quæ inter Centrum & illa puncta interjacent Rectæ, sint inæquales: intelligendæ erunt illæ rectæ, (si ullius omnino censeantur ponderis,) vel æqualiter utrinque à Centro porrigi quantumlibet, etiam ultra ipsa Appensionum seu Applicationum puncta; vel ea saltem quæ brevior est recta, in eâdem ratione ponderosior censenda erit; ut una tota toti reliquæ æquiponderet: quò possint tum Brachia invicem æquiponderare (secundum Def. 11;) tum tota Libra quasi nullius Ponderis censeri, (vi Prop. 2 hujus;) ut applicatorum solummodo Ponderum comparandorum habeatur ratio. Siquid autem Inæqualitatis reverâ fuerit in Brachiorum Ponderatione; id appensis Ponderibus accensendum erit.

XIII.

Centrum Æquilibrii, *appellamus, illud Libræ punctum, quo si intelligatur suspendi Libra; quæ utrinque ponderant, invicem Æquiponderant.*

XIV.

Perpendiculum Æquilibrii, *appello, quod per Centrum Æquilibrii transit Perpendiculum, seu recta ad Terræ Centrum.*

XV.

Centrum Motûs, *appello, Punctum circa quod immotum, rotatur Mobile.*

XVI.

Axem Motûs, *appello, Rectam, circa quam immotam rotatur mobile.*

XVII.

Rotari *verò dicimus mobile circa Punctum fixum, vel quiescentem Rectam; quando ita movetur, ut ipsius puncta singula tum inter se, tum ab illo seu puncto fixo, seu Recta quiescente & singulis in eâ punctis, eandem perpetuò distantiam conservet.*

Fig. 52. PUta; Circa punctum M rotari dicetur A B M triangulum modò ita utcunque moveatur (retentâ magnitudine & specie Trianguli, adeóque eâdem inter se punctorum omnium positione,) ut ipsius unumquodque Punctum, ut A, eandem ab M distantiam conservet. Adeóque circ

circa M punctum, vel dextrorsum aut sinistrorsum, vel prorsum aut retrorsum, vel in quamvis plagam rotari potest; puta, in situm αβM. At circa Rectam XS, nonnisi prorsum vel retrorsum rotabitur. Si enim ipsius puncta singula, ut A, aliter moveantur quam Peripherias describendo, quorum omnium planis XS Axis, rectus sit; non eandem ab ipsius punctis singulis distantiam conservabit.

Sive autem intra ipsam Figuram (planam solidámve) sive extra, sive in ambitu, intelligantur punctum M aut Axis XS circa quæ Figura rotetur; perinde est.

XVIII.

Planum Æquilibrii, *dicimus, quod ita per Grave incedit planum, ut, quæ utrinque sunt segmenta Gravis, æquiponderent.*

QUum *quæ utrinque sunt Segmenta* dico; id etiam comprehensum volo, si utrinque nihil ponderet; puta, Si punctum vel linea tota sit in ipso plano.

XIX.

Axem Æquilibrii, *appello, Rectam per quam quodcunque incedit planum, est Planum Æquilibrii.*

XX.

Centrum Gravitatis, *appello, Punctum, per quod quæcunque incedit recta, est Axis Æquilibrii: Adeóque & quodcunque incedit Planum, est planum Æquilibrii.*

HOc utique posterius, ex priori sequitur. Nam quodcunque Planum per illud transit, ejus aliqua recta per illud transit; quæ quidem si sit Axis Æquilibrii, etiam & Planum illud erit Æquilibrii planum; per Def. præced.

PROP. III.

Manente Libræ Centro; sibi permissa Libra non movebitur.

Intellige; de Librâ jam Quiescente, (& similiter in sequentibus:) contra verò, si jam sit in motu.

Fig. 53. SIt Libræ AB, Centrum C. Hoc, inquam manente; ſibi permiſ
Libra, (hoc eſt, nullo Pondere, Vi, aut Impulſu quovis alio quā
Gravitate ſuâ, in has aut illas partes adacta,) non movebitur.

Cum enim CA, CB, Brachia (Æquiponderantia, per Def. 1 hujus,) invicem contra-ponderent (per 1 hujus:) propter contrari Conatus æquales, non fiet motus: per 12 Cap. 1. Nempe, ſi Li jam Quieſcat. Et ſimiliter inde oſtendetur, quod non ſiſtetur, ſi j ſit in motu.

SCHOLIUM.

VAlet hæc demonſtratio, in quocunque Libræ ad Horizontem ſi (puta; vel Horizontali, vel utcunque inclinato:) Siquo enim CB, CA, non æquiponderant; non erit, in eo ſitu, punctum C Libræ Centrum; Sed aliud aliquod; de quo procedet demonſtrati

Et quidem, ſecundum Mathematicum rigorem, in certâ à Te Centro diſtantiâ finitâ, non erit ejuſdem AB Libræ, idem in o ſitu Centrum C. Sed, in ſitu Declivi, à puncto medio (quod in Horizontali eſt ipſum Libræ Centrum) pro varia Declivitate vari movebitur Centrum, verſus declivius extremum. Adeoque, decliv ſemiſſis, ſi ex puncto medio ſuſtineri intelligatur Libra, reliquo præp derabit; totâque Libra, hoc ſitu, poſita, ſuapte ſponte ad ſitum Ho zonti perpendicularem ferri debet: (Contrà quàm aliquibus viſum Nempe, ad ſitum Horizonti parallelum ferri debere; contra quos disputat *Guid Ubaldus*, in Mechanicis, Capite *De Libra*, Prop Quod ſeorſim, ſi opus videbitur, demonſtratu non eſt difficile. Et poſt Propoſitionem 14.

Verum ſi intelligatur Libra tamquam à Terræ Centro infinitè diſt adeóque & Perpendicula invicem Parallela: omnino idem cenſen eſt in quocunque ſitu Centrum; nempe punctum C, libræ AB m um. Quo modo in Mechanicis aſſumi ſolet.

PRO

PROP. IV.

A puncto quovis liberè dependens Grave, aut eidem directè vel subjectum vel incumbens; tantundem gravat illud quo ita sustinetur punctum, atque si in illo ipso puncto intelligeretur. Tantundem scilicet quantum est ipsius Ponderis.

Idem intellige de Vi quâvis aliâ, mutatis mutandis.

NAm, verbi gratiâ, ex puncto B, liberè dependens P pondus, ad perpendiculum feretur gravitate suâ, (per 30 Cap 2.) De quo sic posito, sive alias directè vel subjecto vel incumbente pondere P, (sive propius sive remotius absit, modo in eodem perpendiculo,) constabit propositum; per 18 Cap. 2. Fig. 54.

SCHOLIUM.

EStque hæc Propositio non exiguæ utilitatis: ut quæ ad certam æstimationem reducit Pondera, sive non in eâdem rectâ, sive non ad Jugum rectum applicata. Putà, si intelligatur planum aliquod A D B; atque in eo Libra A C B recta: Ex variis autem hujus plani punctis (sive in ipsa Librâ, sive supra, sive infra Libram) appensa Pondera. Quæ ex A vel B Libræ punctis liberè dependent Pondera, tantundem gravant ea puncta atque si in illis essent. Quod, ex D puncto supra Libram; tantundem gravat huic subjectum libræ punctum δ, atque si in illo esset. Quódque, ex E puncto infra Libram; tantundem gravat punctum ε, cui directè subest, atque si ibidem esset. Intellige semper, ita conjuncta esse puncta D, δ, vel E ε, ut non possit D deprimi nisi depresso δ; aut E deprimi, nisi depresso ε.) Suntque ipsa A ε δ B, quæ *Applicationum Puncta* dicimus; Def. 1 hujus. Fig. 55.

Similiter; Si libræ Jugum inflexum intelligatur, aut incurvatum, ut αCβ. Quum nos *Libram Mathematicam* definivimus *Lineam rectam*, &c. Def. 9 hujus: Pro Jugo illo inflexo, substituere licet quamlibet in eodem plano rectam; (eam potissimùm, quæ per Centrum motus transiens, est Horizonti parallela;) atque ad hanc, ut Libram exigere singulorum appensorum Ponderum momenta: Putà, quæ ex α δ β punctis dependent perinde ac si ex A D B punctis dependerent. Fig. 56.

PROP. V.

Si Æqualiter Gravetur utrumque Libræ Brachium; Æquiponderabunt sic gravata Brachia: Et sibi permissa Libra sic gravata, manente Centro, non movebitur.

Sin altero alterum magis Gravetur; hoc præponderabit, atque deorsum (nisi alias impeditum) feretur: Et simul utraque Ponderando æquipollebunt excessui præpollentis.

Fig. 57. NAm, si æquiponderantibus utrinque Brachiis, ut CA, CB, (per 11 Def. hujus;) accedant adhuc æqualia gravamina, ut P,P, (sive ex appensis Ponderibus, sive adhibita Vi, vel Impulsu quovis aliasve;) Æquales etiamnum manebunt Ponderationes; (quippe Æqualia æqualibus addita, Aggregata faciunt Æqualia.) Ideóque contraria cum sint, (per 1 hujus;) nullis æquipollent; & Motum propterea non efficiunt, per 8, 12 Cap. 1.

Sin magis gravetur alterutrum; Præponderabit, (per 9 Cap. 1.) Adeoque deorsum feretur, per 12 Cap. 1. Æquipollent autem Ponderando, simul sumpta, excessui præpollentis. per 8 Cap. 1.

SCHOLIUM.

P*Onderando*, inquam; nempe quatenus invicem contra-ponderant, Libram in hanc aut illam partem trahendo. At quantum ad Axem ipsum, & quodcunque quo Libra sustinetur fulcrum; pro contrariis habenda non sunt, sed pro conjunctis oneribus: sicut ad Prop. 2. ostensum est. Quod in sequentibus item Propositionibus intelligendum erit; nisi siquando contrarium insinuetur.

PROP. VI.

Si Ponderibus utcunque gravata Libra, Centro Æquilibrii sustineatur: Neutrum prægravatur Brachium.

Et

Et contrà; Punctum illud Libræ, quo si sustineatur sic gravata librâ, neutrum prægravatur Brachium; est Centrum Æquilibrii.

Patet, ex Definitione Centri Æquilibrii.

PROP. VII.

Manente Centro Æquilibrii, utcunque gravatis Brachiis, Libra non movebitur.

SIt A B, Libra. Atque intelligatur Centrum Æquilibrii, vel idem cum C centro libræ, (nempe si æqualiter vel graventur, vel non graventur Brachia;) adeóque constabit propositum, ex 4 & 5 hujus: Vel ab ipso aliud, ut E. Hoc, inquam, manente; Libra non movebitur. Fig. 58.

Cùm enim (per Def. Centri Æquilibrii) E A, E B, prout jam gravantur, invicem æquiponderant; Nec possit (propter inflexilem libram) alterutrum descendere, manente E, quin alterum Ascendat: contrarii conatus invicem æquales, motum non efficient, per 12 Cap. 1.

SCHOLIUM.

QUod autem de Gravitate dicimus, (sive in hac sive in aliis Propositionibus,) deorsum movente; idem de quâvis aliâ Vi movente secundum Directionem suam, intelligendum erit; juxta Def. 21. Cap. 1

PROP. VIII.

Manente in eâdem à Centro Terræ Altitudine, Centro Æquilibrii; neque Descendere censenda est gravata Libra, neque Ascendere, utcunque moveatur. Et contrà; dum neque Descendere, neque Ascendere censenda est gravata Libra; Centrum Æquilibrii manet æquè altum.

Et similiter de aliis motibus à Vi motrice quavis, mutatis mutandis, intelligendum erit.

Fig. 60. INtelligatur A B Libra, utcunque gravata, in situm α β moveri: Manente (primùm) Centro Æquilibrii in eodem E puncto.

Cùm igitur, (propter E Centrum Æquilibrii,) partes E A, E B in quocunque situ, adeóque in toto progressu, invicem Æquiponderant: Sitque, propter inflexilem Libram, unius Ascensus cum Descensu alterius perpetuò conjunctus: Erit Ascensus Descensui Æquipollens, (nam sicubi præpollet alter, eà præponderabitur; per 7 Cap. 2.) Nulli igitur vel Descensui vel Ascensui, simul æquipollent. per 8 Cap. 1. Quod erat demonstrandum.

Idem deinde ostendetur; etiamsi non in eodem E puncto maneat Centrum Æquilibrii; sed in aliud quodvis æque-altum transferatur, ut ε.

Libræ siquidem in situ α ε β, intelligatur parallela in α E β; nempe dum intelligatur. Terræ Centrum infinitè distans: Si verò in distantiâ finitâ, intelligatur circa Centrum Terræ rotari Libra α ε β, in situm α E β; ut sit ε E arcus circuli, terræ concentrici; & similiter α α, β β, &c. Probabitur utcunque (vel ex 33 Elem. 1. Vel ex De Rotationis) singula ipsius α ε β puncta, punctis singulis in α E β respectivè sumptis, æquè-alta, (& similiter de Ponderibus appensis siqua sint, &c.) Adeóque totam α ε β, toti α E β, hoc est (per jam demonstrata) ipsi A E B, æque altam. Quod porro demonstrandum erat.

Atque hinc conversa facilè constabit.

Et similiter de quavis aliâ Vi motrice, mutatis mutandis, idem ostendetur.

PROP. IX.

Tantundem vel Ascendere vel Descendere censenda erit utcunque gravata Libra; quantum vel Ascendit, vel Descendit Centrum Æquilibrii. Quæque

Quæque de Gravium Ascensu & Descensu dicta sunt; pariter de motis ab aliâ quâvis Vi motrice, mutatis mutandis, intelligenda erunt.

SIt A B Libra utcunque gravata : E, Centrum Æquilibrii; quod intelligatur ad ε moveri; Descensu sive recto sive utcunque obliquo: Dico, tantundem censendam esse descendisse Libram cum suo quantocunque gravamine; & quidem, sive eodem manente, sive utcunque mutato, ad Horizontem situ. Fig. 61, 62, 63.

Primò; Descendat E ad ε descensu recto; retinente Librâ eandem ad Horizontem inclinationem, adeóque manente sibi ut priùs positæ Parallelâ; puta in αβ. Manifestum est, tantundem descendisse libram totam. Junctis enim tum Eε, tum aliis quibusvis punctis respectivis, ut Aα: Propter æquales parallelas rectas E A, εα; sunt & (per 33 Elem. 1.) æquales item & parallelæ Eε, Aα; punctorum E, A, descensus mensurantes (per 10. Cap. 2.) qui itaque æquales sunt. Et similiter ostendetur de quovis alio Libræ puncto: adeóque de ipsâ Librâ.

Secundò; Manente, ut priùs, eâdem Libræ ad Horizontem inclinatione, descendat E ad ε, descensu utcunque Obliquo. Reliquisque ut prius constructis; demittantur ab E, A, ad Horizontales rectas εe, αa, perpendiculares Ee, Aa, (descensus punctorum E A mensurantes, per 10 Cap. 2.) Et, demonstrato, ut prius, æquales esse & parallelas, Eε, Aα; æquales item erunt (propter similia Triangula) Ee, Aa; adeóque punctorum E, A, descensus æquales. Et similiter de quovis alio Libræ puncto ostendetur, adeóque de Librâ ipsâ.

Tertiò; Descendat E ad ε, descensu quovis sive recto sive obliquo; & simul utcunque mutetur Libræ ad Horizontem Inclinatio: Puta non ut in αεβ situ parallelo, sed ut in aεb alio utcunque situ. Etiam sic tantundem descendisse Libram, quantum Æquilibrii Centrum, sic ostenditur. Si intelligatur Libra in αεβ situ parallelo; tantundem descendisse, jam ostensum est, (in primo & secundo Membro hujus:) Sed (per præcedentem) æquè-alta censenda est Libra in situ aεb, atque in αεβ: Ergo & sic tantundem descendisse Libra, atque ipsum E Centrum Æquilibrii, censenda erit. Quod erat demonstrandum.

Quódque de Descensu ab E ad ε, ostensum est; similiter ostendetur de Ascensu ab ε ad E. Nempe tantundem Ascendere censendam esse Libram, atque Centrum Æquilibrii. Quod porro demonstrandum erat.

Idem alii cuivis Vi Motrici, mutatis mutandis, facilè accommodabitur.

PROP.

PROP. X.

Si Centrum Æquilibrii ſit in eodem ad Terræ Centrum perpendiculo cum Centro Motûs; in neutram partem præponderabit; ſibíque ſic permiſſa Libra non movebitur. Sin extra perpendiculum conſtituatur; ad perpendiculum, infra Centrum Motûs, feretur Centrum Æquilibrii, (niſi aliàs impeditum,) in plano ad Horizontem recto; ſaltem quàm poteſt omnium maximè Declivi.

Idem aliis motibus, mutatis mutandis, accommodabitur.

SIt M Centrum Motûs; circa quod rotanda ſit A B Libra: E, Centrum Æquilibrii, in eodem Perpendiculo cum M, ſive infra, ſive ſupra, ſive in ipſo M puncto. Quieſcet, inquam, ſic conſtituta Libra, in neutram partem præponderans.

Fig. 64. Primò; ſit E Centrum Æquilibrii, idem atque M Centrum Motûs. Manifeſtum eſt (manente Centro Motûs M immoto, per Def.) immotum manere Centrum Æquilibrii E, (quippe idem.) Non igitur in utramvis partem præponderat; neque movebitur in eo ſitu ſibi permiſſa Libra; per 5 hujus.

Fig. 65. Secundo; Sit E, in M E perpendiculo, infra M. Adeóque (per Def. 15, 16 hujus) motâ Librâ, feretur E in peripheriâ (ſaltem ſuperficie ſphæricâ) ut D E F Centro M deſcriptâ. Cujus cum punctum infimum ſit ipſum E, (per 20 Cap. 2.) quàcunque moveatur, Aſcendet E Centrum Æquilibrii; &, cum eo, Libra, (per præcedent.) non igitur ſuâ ſponte movebitur.

Fig. 66. Tertiò; Sit E, in M E perpendiculo, ſupra M. Adeóque (ut prius) motâ Librâ, feretur E in D E F peripheriâ (vel ſuperficie ſphæricâ,) cujus punctum E (per 20 Cap. 2.) eſt omnium altiſſimum; arcúſque E D, E F, pariter declives; per 15 Cap. 2. & 16 Elem. 3.) In utramvis igitur partem æqualiter propendet E (per 17 Cap. 2.) ipſáque Libra, (per præced.) Neutra igitur feretur. per 8 Cap. 2.

Fig. 67. Denique; Sit E extra perpendiculum S M P. Cum ſit M Centrum Motûs, circa quod Rotando E deſcribet peripheriam (ſaltem in Sphæricâ ſuperficie lineam) puta S E P: Propter arcum E P deſcendentem, aſcendentem

ascendentem verò E S (per 20 Cap. 2) E centrum Æquilibrii (librâ tantundem descendente, per præced.) ad P feretur (nisi alias impeditum) in plano M E P ad horizontem recto (utpote quod est omnium maxime declive, per 25, 26, Cap. 2.) Saltem (si illic impediatur) descensu quam potest omnium maxime declivi, per 2 & 8, Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

SCHOLIUM.

ADeóque si, in P constitutum centrum Æquilibrii, inde vi amoveatur; se restituet, sibi permissâ Librâ, gravitate suâ: Si constitutum in S, amoveatur; non eò restituetur, sed deorsum ad P feretur.

Quod autem de Librâ, strictè sumptâ, ponderibusque liberè appensis (adeóque in plano ad horizontem perpendiculari) ostensum est: Pariter ostendetur, mutatis mutandis, in quâvis aliâ vi. Puta; si planum S E P non Erectum sit, sed utcunque obliquum, in quo A B libra intelligatur, tum super illud moveri appensa pondera: Similiter enim (ex 20. Cap. 2.) omnia procedent de S P ad horizontalem rectam in eo plano normaliter positam (quod *Perpendiculi succedaneum* diximus) atque S P perpendiculo ad Centrum Terræ. Aut etiam; si in Horizontali, alióve quocunque Plano intelligatur Libra (sive quod Libræ instar est) eique in. A & B applicatæ vires quæcunque secundum Directionem ipsi S P parallelam: Eodem planè modo procedet demonstratio.

PROP. XI.

Si circa Centrum suum rotetur Libra; in eâ ratione moventur, vel Ascendendo vel Descendendo, tum ipsius puncta singula, tum quæ ex ipsis liberè dependent gravia; quâ distant ea puncta à Centro Libræ.

CIrca C Centrum, rotetur Libra A B. Dico ipsius puncta singula, ut A, B, D, in eâ ratione, Ascendere vel Descendere (eodem scilicet quæ in eodem Brachio; quæ in contrario, contrario motu;) quâ distant à C Centro. Fig. 68.

M Descri-

Fig. 68. Describunt enim A, B, D, puncta (propter eundem vel æquales angulos ad C) similes arcus (puta A a, B b, D d,) qui itaque tum ipsi, tam & ipsorum altitudines perpendiculo mensuratæ (puta A α; B β; D δ,) sunt (propter figuras similes & similiter sitas, saltem situ contrario positas, quod hic tantundem facit) radiis suis, hoc est, à Centro distantiis C A, C B, C D, proportionales: adeoque & (per 1. Cap. 2.) Punctorum A, B, D, Ascensus, Descensusve. Quod erat demonstrandum.

Quódque de ipsis punctis ostenditur; perinde verum est de Ponderibus inde liberè dependentibus, vel per *Prop.* 4. hujus. Vel etiam, quia, quemcunque arcum describit, verbi gratiâ, B punctum; huic similem & æqualem & similiter situm, describet ab eo liberè dependens P, (utpote quod eidem, per 30. Cap. 2. perpendiculariter ubique subest; &, propter æqualem fili longitudinem, in eâdem distantia. Adeoque tantundem vel ascendit vel descendit; hoc est (per modo demonstrata) in ratione distantiarum punctorum appensionis a Centro. Quod etiam erat Demonstrandum.

PROP. XII.

Si idem sit Libræ Centrum, atque Centrum Motûs: Quæ ex illâ liberè dependent Gravia (aut etiam aliàs directè vel subsunt vel incumbunt) in eâ ratione ponderant (seu gravant sua respectivè Brachia) cæteris paribus; quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum punctorum applicationis à communi Libræ & Motus Centro, componitur.

Adeóque: Si Distantiæ sint æquales; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia; vel sint reciprocè proportionalia; Æquiponderant: Quæ verò ex Centro dependent; neutrum gravant Brachium.

Idem intellige de Viribus aliis: Nempe in eâ ratione movendo pollent, quæ componitur ex rationibus Virium & Distantiarum à communi Centro Motûs & Libræ (sive quod hujus instar est) quibus directè applicantur Vires.

P.	nP.	P.	nP.	nP.
D.	D.	mD.	mD.	D.
PD. G::nPD.	nG::mPD.	mG::mnPD.	mnG::PD. G.	

NAm (per 7. Cap. 2.) in eâ ratione ponderant; quâ pollent, si moveantur Ascensus, Descensusve: Hoc est (per 5. Cap. 2.) in ratione quæ ex rationibus Ponderum, & Altitudinum ascensus descensusve componitur: Hoc est (per præcedentem) quæ ex rationibus Ponderum, & distantiarum punctorum Applicationis) à communi motûs & libræ Centro, componitur. Quod erat Propositum.

Quodque, de Incumbentibus & Dependentibus, additur; constat ex 4 hujus.

Corollaria constant, ex 4. & 6. Cap. 1.

SCHOLIUM.

PRopositio hæc (ut & præcedentes) potissimum respicit Libram tanquam ex unico suo puncto liberrimè dependentem (non ad certam axis positionem, aliter quam gravitate suâ & ponderum dependentium, determinatam) adeoque in plano ad Horizontem recto, sive circa axem Horizontalem, librandam; & quidem, præsertim, ut in situ Horizontali constitutam: (quamquam & ad alium tum Libræ tum Axis situm accommodari poterit.) Saltem Pondera supponuntur omnia in eodem plano, atque ad unam eandemque rectam per Centrum motûs transeuntem, applicata; secus utique non esset idem Libræ atque Motûs Centrum. Eratque hæc propositio neutiquam omittenda, ut quæ tam Celebris sit in re Staticâ, Æqualia Pondera, in ratione Distantiarum à Centro Libræ, gravitare.

Verum omnino evenit non rarò, comparanda venire Pondera, ad Libram exigenda, neque in situ Horizontali, neque in uno aliquo, sed diversis positam: Sed neque in plano ad Horizontem recto, aut circa Horizontalem Axem, libranda; sed circa inclinatum Axem, adeoque in inclinato plano movendam: Vel etiam non ad unam aliquam, sed diversas Libras, easque inæqualiter ad horizontem inclinatas applicata: Ipsaque Pondera neque ex ejusdem rectæ, neque ejusdem plani, punctis suspensa.

Huic itaque casuum varietati ut satisfaciam, visum est sequentem propositionem huic subnectere, quæ rem eandem universalius exponat.

PROP. XIII.

Pondus idem ad idem Libræ punctum applicatum; pro variâ Libræ ad Horizontem positione; in plano ad Horizontem recto (sive circa Axem Horizontalem;) ponderat in ratione *Distantiarum à perpendiculo* per Centrum Motûs.

In Plano autem ad Horizontem inclinato (sive circa inclinatum axem;) in ratione *distantiarum à perpendiculo succedaneo*; seu rectâ quæ est, in illo plano, ad Horizontalem rectam ad angulos rectos.

Et quidem, universaliùs; *Æqualia Pondera*, sive ad ejusdem sive diversarum librarum, utcunque ad Horizontem inclinatarum (modò *circa Axes æqualiter ad Horizontem inclinatos*, sive in planis æqualiter inclinatis, rotentur) puncta quælibet, appensa; ponderant (seu gravant sua respective Brachia) in ratione *distantiarum à perpendiculo* per suum cujusque Centrum motûs, vel *hujus succedaneo* (illo quidem, si in planis ad Horizontem rectis rotentur, hoc, si in planis inclinatis:) Hoc est; utrobique à *Perpendiculari per Axem plano.*

Circa Axes verò *inæqualiter inclinatos* (adeóque in planis inæqualiter declivibus;) in ratione quæ ex rationibus *Distantiarum* illarum à Perpendiculo ejusve Succedaneo vel Perpendiculari per Axem Plano, & *Declivitatum* Planorum, componitur.

Adeóque, *Pondera Inæqualia* circa *æqualiter inclinatos* Axes (adeóque in Planis æqualiter declivibus;) in ratione quæ ex *Ponderum* & *Distantiarum* illarum (à Perpendiculo ejúsve Succedaneo) rationibus componitur.

Circa Axes verò *Inæqualiter inclinatos*; in eâ quæ ex *Ponderum*, & *Distantiarum* illarum, & *Declivitatum*, rationibus componitur.

Intellig-

Intelligatur Libra, à situ Horizontali A C B, ad situm α C β, vel α C b, moveri; puncto sui B, describens arcum Peripheriæ B β b, in plano sive ad Horizontem recto, sive utcunque obliquo. Et compleatur C B β S circuli quadrans. Et ducantur rectæ β κ, b c, ipsi B C parallelæ; Perpendiculo (ejúsve succedaneo) S C, occurrentes in κ, c. Dico in eâ ratione ponderare expositum pondus in punctis B, β, b; quæ est rectarum B C, β κ, b c, distantias ab S C mensurantium. Fig. 69.

Nam, demissis a punctis β, b, ad Libram in situ Horizontali A B, perpendicularibus β δ, b d: Ostendetur, ex 4 hujus (ejúsve Scholio) si C B β S planum sit ad Horizontem rectum; tantundem ponderare, respectu assumptæ Libræ A B, pondera ex B, β, b, punctis suspensa, atque si ex B, δ, d, suspenderentur. Adeoque; si sint æqualia pondera; in ratione Distantiarum B C, δ C, d C, (per præcedentem;) hoc est (propter parallelas) Distantiarum B C, β κ, b c: Sin pondera sint inæqualia; in ratione quæ ex Ponderum & Distantiarum rationibus componitur (per eandem Prop. præced.) Quæ erant proposita.

Idemque in Plano inclinato, constabit ex 26 Cap. 2. Cum enim inclinatio plani (per 26 Cap. 2.) in eâdem ratione omnes in illo plano gravitationes minuit; in eâdem inter se ratione ponderabunt in B, β, b, punctis appensa pondera, in plano inclinato, qua in plano ad Horizontem recto ponderarent (per 5 Cap. 1.) Hoc est (ut jam ostensum est) in ratione Distantiarum, si Pondera sint æqualia; vel, si inæqualia, in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus composita. Quæ itidem probanda erant.

Quod autem eadem sit punctorum β, b, ab erecto per Axem Plano perpendiculari, atque ab S C rectâ (quæ illius est, atque circuli libratione descripti, ad planum illud recti, communis sectio) Distantia: Sive (quod eòdem recidit, propter punctorum, sive a rectâ, sive a plano, distantias, rectis perpendicularibus mensurari solitas) quod rectæ β κ, b c, in circuli plano perpendiculares ad S C rectam, sunt etiam ad illud per axem planum perpendiculares: Constat ex Def. 4. El. 11. Quod etiam affirmatum erat.

Alia Demonstratio.

Eadem aliàs demonstrabimus, ex Prop. 21. Cap. 2. pro varia motûs Obliquitate. Nam (constructis ut prius ductisque contingentibus B T, β τ, b t, ut in Schemate;) Puncti B, quocunque onere gravati (& quidem sive in recto ad horizontem plano sive utcunque Obliquo) per arcum B β b moti; eadem est obliquitas motûs in ipsis

B.

B, β, b, punctis, atque BT, βτ, bt, contingentium; (per 15. Cap. 2.) quarum inclinationum ad horizontem anguli (si planum sit erectum) sunt TBC, τβκ, tbc; & his æquales, anguli SCB, SCβ, SCb (est utique TBC, SCB, uterque rectus; & tum τβκ, tum SCβ, sumpto communi κβC, complent rectum, per 16 El. 3. & 32 El. 1. & similiter tum tbc, tum SCb, sumpto communi cbC;) quorum Sinus recti sunt, BC, βκ, bc: His igitur proportionalia sunt Æqualium ponderum momenta in punctis B, β, b, in erecto plano, per 21 Cap. 2. (Adeoque; Inæqualium, in ratione quæ ex illa & Ponderum ratione componitur; per 19 Cap. 2.) Eadémque plano Obliquo accommoda, ut priús, per 26 Cap. 2. Quæ erant probanda.

Quódque de unâ Librâ ostensum est; de pluribus similiter ostendetur. Puta, si ad Libræ CB, punctum δ; &, Libræ Cb, punctum b appensa sint æqualia pondera: ponderabunt (per jam dicta) in ratione distantiarum δC, bc, cæteris paribus (Adeóque, si pondera sint inæqualia; in rationibus ex Distantiarum & Ponderum rationibus composita, per 1 Cap. 2.) Quod itidem erat propositum.

Denique, quod de Axibus inæqualiter inclinatis, affirmatur; adeoque, Motuum Planis inæqualiter Declivibus: Constat ex Prop. 22, 25, 26, Cap. 2. Quod ultimo demonstrandum erat.

SCHOLIUM.

Notandum interim hic erit; non ita hæc intelligenda esse, quasi si ad Libram AB appensum pondus in B, ponderi in A, æquiponderet; illud in β, huic in α cederet, seu minus ponderaret. Quamquam enim illud in β, minus ponderet quàm in B; non tamen destruitur æquilibrium, quoniam & in eâdem ratione (propter eandem obliquitatem) minus ponderet hoc in α quàm in A. Quódque de Æquilibrio dicitur; pariter & de momentis inæqualibus obtinebit. Puta, quâ ratione pondus in B, præponderat ponderi in A; eâdem & illud in β præponderabit huic in α. Nam utriusque momentum proportionaliter minuitur, ob eandem motuum obliquitatem ratione Perpendiculorum ad terræ Centrum; quæ Ponderum moventium Directiones sunt, & supponuntur invicem parallela.

At vero: Si loco Ponderis in A, α, a, (cujus Directio supponitur eadem cum directione, ponderis in B, β, b; utraque scilicet, deorsum ad terræ centrum; adeóque &, propter Tangentes parallelas, Declivitates æquales:) Substituatur, verbi gratia, Vis humana; quæ non minus applicari

plicari poterit secundum directionem α υ, quam A V perpendiculum; (adeoque ejusdem erit momenti in quocunque libræ situ; dum interim illud Ponderis a B ad β moti minuitur:) Minuetur continuo ratio Resistentiæ ponderis (a B ad β, b, moti) ad æquale momentum Virium in A, α, a. Adeoque Vis in α, facilius movebit pondus in β; quam vis eadem in A, pondus idem in B. Quæ ex propositione sequente apertius constabunt.

PROP. XIV.

Si duo pondera (aut aliæ quæcunque vires) ad Libram applicata, ita se habeant, ut, in quocunque Libræ situ, eadem utriusque sit obliquitas motûs: Quam habent inter se horum momenta rationem in uno Libræ situ; eandem & in quovis alio habitura sunt.

Si verò (vel, propter curvatum libræ Jugum; vel Centrum Motûs extra ipsam Libram; vel, non easdem applicatarum virium Directiones; vel, aliàs undecunque;) contingat, pro vario Libræ situ, inæquales subinde futuras esse duorum motuum obliquitates: Non eadem erit, in omni Libræ situ, momentorum ratio: Sed variabitur, pro variâ ratione Declivitatum, sive Sinuum Angulorum Inclinationis ad Horizontem, sive Complementi obliquitatis.

Quódque de duobus ponderibus dictum est, de pluribus similiter constabit.

I. INtelligantur, ad libram A C B, duo Pondera (seu vires aliæ) in A, B, ita applicata, ut directiones motuum A V, B T, vel nullam habeant vel æqualem obliquitatem (hoc est, ad directionem Moventis, quæ in Gravibus est Perpendiculum, vel nullum faciant, vel æquales angulos:) Eadémque si, motâ Librâ, in alium quemvis situm pervenerint, ut α β; eadem adhuc sit Directionum Motus α υ, β τ, obliquitas. Eadem, inquam, erit inter se momentorum ubique ratio. Putà, si pondus in B ponderi in A æquiponderet; illud in β huic Fig. 69.

in

in α æquiponderabit. Si illic præponderet: &, hic, præponderabit atque in eadem ratione. Cum enim, ex hypothesi, eadem utriusque sit ubique Obliquitatis variatio; adeoque (per 21 Cap. 2.) eadem ratione vel augeatur vel minuatur utriusque momentum: Erunt adhuc in eadem ad invicem ratione, quâ prius, constituta; (per 5 Cap. Quod erat primo demonstrandum.

Fig. 70. II. Deinde: Sit *Libræ Jugum incurvatum* A M B: Seu (quod eodem recidit) *Centrum motus* M, *extra libram* A C B. Et sunto, verbi gratiâ, utraque A, B, infra L M N horizontalem rectam per Centrum Motûs transeuntem; sed ad perpendiculi M P partes oppositas. Adeóque, utut fieri possit eandem esse in A & B motûs obliquitatem; sit tamen moveatur A ad α versus P; adeóque (propter rotationem, quæ angulos A M B, α M β, æquales postulat) B ad β versus N; (nec tamen vel A ad P, vel B ad N perveniat:) Manifestum est, majorem esse motûs obliquitatem in α quam in A; minorem tamen in β quam in B (majorem utique angulum cum perpendiculo faciet Tangens in α quam Tangens in A, minorem verò Tangens in β quam Tangens in B. Adeoque (per 21 Cap. 2. vel Prop. præced.) minuitur momentum ponderis ab A ad α moti; moti verò à B ad β, augetur. Et propterea (per 8 El. 5.) major erit ratio momenti in β ad momentum in α, quam momenti in B ad momentum in A. Et similiter ostendetur (mutatis mutandis) in aliis libræ positionibus alias variari momentorum rationes. Et quidem, pro variâ ratione sinuum Angulorum inclinationis seu complementi obliquitatis; per eandem 21 Cap. 2. Quod erat iterum demonstrandum.

Fig. 71, 72. III. Idem ostendetur, si ex A C B Libræ puncto aliquo, ut B, dependant, non quidem liberè (ut eidem semper libræ puncto directe sit) sed in certo angulo, ut C β E, fixum pondus E: Aut etiam, similiter supernè affigatur. Manifestum utique est (rotatione facta circa centrum C) punctum E (vel huic affixum pondus) circulum describere, non quidem radii C B, sed C E: Idémque planè accidere, ac si jugum esset incurvatum A C E; de quo modo ostensum est, quod erat propositum.

Atque hinc ostendetur (per Prop. præced. vel 21 Cap. 2.) *Pondus E infra libram fixum; prout altiùs elevatur, ita plus ponderat, seu majori in A ponderi æquipollet: At, fixum supra libram; minori.* Quod inspectis figuris, statim patebit. Quippe distantiæ æstimandæ sunt non secundum longitudines C B, C β; sed C D, C δ: ut ex 4 hujus patebit.

IV. At verò, si nec supra libram, nec infra, sed à latere, affixum sit Pondus E; (intellige, ita ut, rotata librâ A C B circa axem X C S, sint ubique C X, B E, in eodem plano:) erit eadem ubique momentorum ratio ponderum in A & E, non minùs quam in A & B, positorum. Cum enim parallelos arcus, æquales similes & similiter positos, describunt B, E, puncta; eadem semper utriusque erit obliquitas motus. Adeóque & eadem ratio momentorum; per primam partem hujus. Atque omnino perinde est, atque si librâ X E (ipsi C B parallelâ) circa centrum X ferretur. Fig. 73.

SCHOLIUM.

Atque hujus ope, quæ utcunque ad varias circa eundem Axem libras (connexas tamen) in variis Planis applicantur Pondera (puta in parallelis planis Perpendicularibus per A B, X E, &c.) ad eorum unum reducuntur. Perinde siquidem Ponderat E Pondus, ubicunque in B E rectâ infinitâ fuerit, atque si esset in ipso B puncto. Ut jam ostensum est.

Quæ autem ita ad unum Planum reducuntur Pondera: eadem per hujus, ad unam ejusdem rectam quamlibet (utcunque infra, supráve fuerint) reducuntur. Perinde siquidem ponderant, ubicunque fuerint in eodem Perpendiculo (sive revera, sive huc ut modo dictum est, reducta) atque si in ipsâ quam quis velit istius Plani rectâ essent. Ut ibidem probatum erat.

Quæque ita ad unam libram reducta sunt pondera; eadem & ad unum ipsius Punctum, Æquilibrii Centrum, mox reducentur, per 20 hujus. Quippe ita perinde Ponderant simul omnia, atque si ex illo puncto dependerent. Ut ibidem probabitur.

V. Porro; Manente Jugo recto A B, & centro motûs in ipsâ Librâ, C: Si tamen alia sit directio virium in A & B adhibitarum; variatur, pro variâ Libræ positione, momentorum inter se ratio; atque id quidem ut in propositione est affirmatum. Esto enim, verbi gratiâ, A B libræ Jugum, in situ Horizontali positum; ejúsque puncto B applicatum grave; adeóque virium Directio B P ad Horizontem perpendicularis: Puncto autem A vis alia quævis (puta, humana,) adhibita, secundum directionem A F (ipsi B P minime parallelam;) cui quidem A F parallela L Φ, peripheriam puncto A (circa C rotando) descriptam tangat in L; (infra vel supra punctum A, prout contigerit) manifestum utique est, moto A ad α versus L (priusquam ad L pertingat) Fig. 74.

tingat) Minui Obliquitatem motûs; (sive angulum quem facit directio motûs cum directione virium A F, vel huic parallelâ:) Adeóque (per prop. præced. vel 21 Cap. 2.) Augeri Momentum: Dum interim moto B, per similem arcum, ad β, hujus Obliquitas Augetur, adeóque Momentum Minuitur. Et propterea (per 8 El. 5.) alia ratio erit, pro mutato libræ situ, momenti virium in A ad momentum Ponderis in B; atque momenti Virium in α ad Ponderis in β momentum (Et quidem in eâ ratione quàm innuit propositio: per 21 Cap. 2.) Quod erat affirmatum.

Fig. 75. VI. Contrà verò; Si pro A C B jugo recto, substituamus (hic in casu) L C B jugum inflexum; atque ita quidem inflexum, ut quem angulum facit C B ad B P directionem Gravitatis seu vis moventis in B, eandem faciat C L ad L Φ directionem vis in L moventis: Manebit eadem ubique ratio momenti Virium in L, λ, ad momentum Ponderis in B, β. Quippe idem hic præstabit jugum inflexum L C B, atque in primo hujus demonstrationis casu, rectum A C B. Et ut illic (propter similes arcus A α, B β,) æquales erant obliquitates in α, β, non minùs quàm in A,B; sic hic,ob easdem causas eadem erit in β,λ, non minùs quàm in B,L, eadem Obliquitas. Cæteráque, ut illic ostenderentur. Dummodo (quod hic intelligendum est) directio virium in L,λ, punctis sit semper eadem; putà,rectæ L Φ parallela: sicut eadem supponitur directio Ponderum, in B, β; putà Perpendiculum ad Terræ Centrum.

VII. At verò; si in punctorum altero, ut B, β, ponderis directio eadem sit (puta, recta ad Centrum Terræ, seu Perpendicularis ad Horizontem;) in altero verò, ut A, α, directio moventis in singulis A α curvæ punctis alia atque alia; sitque, verbi gratiâ, secundum ductum ipsius curvæ, vel Rectas in iisdem punctis Tangentes: Propter motûs obliquitatem in A, α, sive nullam,sive eandem; mutatam verò in B, β; (adeóque virium momentum illic æquale, hic continnuò immutatum;) vel utrobique immutatum quidem, sed non similiter immutatum: Variabitur & momentorum inter se ratio (siue rectum sit jugum, sive Inflexum) pro vario libræ situ; ita quidem ut in Propositione determinatum est. per 21 Cap. 2.

Quódque in expositis casibus ostensum est; similiter ostendetur (per iisdem Prop. 21. Cap. 2. & præcedente hujus) in aliis quibusvis casibus. Constat igitur, quod erat propositum.

SCHOLIUM.

VIsum est,in hac Propositione generaliter propositâ plures casus exhibere, & strictim comprehendere; potius quam totidem Propositione

sitionibus singulos exhibere: tum quia eodem principio nituntur omnes, eàdemque demonstratione confirmantur; tum quia infiniti esset laboris singulos recensere qui huc adduci casus possent. Expositis igitur hisce paucis, facile erit alios hiscè similes, prout res tulerit, huc referre; & tanquam generali propositione comprehensos, ejusdem demonstratione confirmatos reputare.

Estque opportunus hic locus demonstrandi illud quod supra insinuavimus in Scholio Prop. 3. Nempe [*Si intelligatur Centrum Terræ tanquam in infinitâ distantiâ*; *Libra* (vel non gravata, vel utrinque æqualiter gravata) *quocunque situ ponatur, quiescet: Si verò intelligatur Centrum Terræ tanquam in distantiâ finitâ; quiescet quidem Libra in situ Horizontali posita; vel etiam in situ ad Horizontem Perpendiculari; posita verò in situ ad Horizontem Obliquo, neque sic quiescet* (quod volunt aliqui) *neque* (quod volunt alii) *ad situm Horizontalem feretur; sed ad situm Horizonti Perpendicularem.*

Intelligantur, in A B Libra, duo quævis puncta, A B, æqualiter utrinque à Centro C remota, invicem æquiponderantia (sive æqualiter gravata) à situ A B Horizontali, per situm Obliquum $\alpha\,\beta$, ad situm a b Horizonti Perpendicularem lata, arcus similes & æquales rotando describere A α a, B β b; quos tangant rectæ A T, α T, a T, B T, β T, b T; quæ itaque *Directionem Motûs* in illis respectivè punctis designabunt, per Prop. 15. Cap. 2. Fig. 59.

Atque Intelligatur, primò, Centrum Terræ (quò tendunt Gravia) tanquam in Infinitâ Distantiâ; adeóque Perpendicula, seu Rectæ-Deorsum (*Directionem Moventis*, seu Vis Motricis, designantes) A D, α D, a D, B D, β D, b D, invicem parallelæ. Erunt igitur, in situ Horizontali (propter tum rectas A D, A T, tum B D, B T, coincidentes) eadem utrobique Declivitas; (utpote utrobique perpendicularis:) Item, in situ ad Horizontem Perpendiculari (propter angulos D a T, D b T, rectos) eadem etiam Declivitas (quippe utrobique nulla:) Sed & in situ Obliquo (propter tum α T, β T, tum α D, β D, invicem parallelas; adeoque Obliquitatis angulos æquales D α T, D β T, quos cum directione Moventis facit Directio Mobilis;) æqualis utrobique Declivitas (per Declivitatum Definitiones;) adeoque (cum cætera sint paria) æquiponderabunt (per 13 hujus:) Cum itaque contraponderant (per 1 hujus) se mutuò sustinebunt, nec fiet motus (per 12 Cap. 1.) Quiescet igitur Libra, quocunque situ posita. Quod erat propositum.

Intelligatur deinde Terræ Centrum, tanquam in Distantiâ Finitâ; adeoque Perpendicula seu Rectæ ad Centrum (*Directionem Moventis* designantes) invicem convergentes putà, A K, B K, α K, β K, a K,

 b K,

b K, in Terræ Centro K coeuntes. Si itaque ponatur Libra in situ ad Horizontem Perpendiculari; erit (propter K a T, K b T, angulos rectos) æqualis utrobique Declivitas (quippe nulla:) Item, in situ Horizontali (propter tum angulos C A T, C B T, rectos, tum C A K, C B K, invicem æquales) æquales item erunt Obliquitatis Anguli K A T, K B T. Adeóque (propter æqualem utrobique Declivitatem) æquiponderabunt, & sese mutuo sustinebunt, A, B; Libráque propterea quiescet, per modò demonstrata. Si verò ponatur Libra in situ Obliquo: Obliquitatis Anguli K α T, K β T, inæquales erunt; & quidem major ille qui est ad Brachium elevatius, puta K α T. Nam duorum æqualium angulorum D α T, D β T, altero semper Major est angulus ille K α T; Altero verò, angulus K β T vel Minor erit (nempe quoties ob magnam Libræ declivitatem, vel magnam Centri distantiam, β K cadit inter β D & β T;) vel erit Nullus (nempe, si β K circulum contingat, adeóque coincidant β T, β K;) vel saltem Minus eum superabit (nempe si quando propter exiguam Libræ Declivitatem, vel exiguam a Centro Terræ Distantiam, β T cadat inter β K & β D) ob angulum K β C, majorem angulo K α C (per 18 El. 1. Euclid.) adeóque (qui ad rectum reliquus est) K β T minorem (reliquo) K α T: (Quæ Schema contemplanti satis obvia sunt.) Erit igitur (quocunque situ Obliquo ponatur Libra; modo Terræ Centrum intelligatur in distantia finita) in motu depressioris puncti β minor Obliquitas (adeoque Declivitas major) quam elatioris α; adeoque β præponderabit, per 13 hujus. Et consequenter (cum de punctis reliquis utriusque Brachii respectivè sumptis, idem sit judicium; sintque cætera paria;) deorsum feretur Brachium depressius (per 12 Cap. 1.) donec redigatur Libra ad situm Horizonti Perpendicularem a b. Quod erat propositum.

Sunt qui contrarium hujus affirmant, inter quos Jordanus & alii, asserentes Libram obliquo situ positam, latum iri in situm Horizontalem: contra quos prolixè disputat Guid-Ubaldus in Mechanicis. Qui tandem concludit, permansuram fore libram quocunque situ positam, etiamsi consideretur Centrum Terræ tanquam in distantiâ finitâ. Quorum neutrum dicendum esse, ex supra demonstratis constat.

Hinc sequitur, *Ejusdem Rectæ non unum aliquod statum esse Centrum Æquilibrii*; quod nempe idem sit pro omni situ: sed, in situ obliquo, à puncto medio magis magisque ad partem decliviorem procedere, prout obliquitas major fuerit; dummodo Centrum Terræ intelligatur in distantiâ finitâ. Quodque hic de Rectæ Centro Æquilibrii dicitur; similiter infra intelligetur *de Centro Gravitatis* in Solidis, Planis, aliisve.

Sed & ex iisdem principiis probabitur, Ejusdem *Gravis* (*cæteris paribus*)

ribus) gravitatem minorem continuò fieri, prout Centro Terræ magis appropinquat. Si enim, verbi gratiâ, rectæ A B, punctum medium C, intelligatur rectâ C K ad Centrum directè ferri; adeoque eâdem semper Declivitate, & eodem impetu: reliqua tamen puncta, ut A, B, majorem continuò Obliquitatem sortientur prout Centro fiunt propiora. Nam, eâdem manente A K B trianguli base A B, prout altitudo C K minuitur, obtusior fiet angulus A K B; adeóque reliqui K A C, K B C, minores; & consequenter, majores fient Obliquitatis anguli K A T, K B T: (Idemque in situ obliquo $\alpha\ \beta$ similiter ferè ostendetur.) Et quanquam de rectæ situ Perpendiculari a b, non idem contingat (eo quod tota recta sit in perpendiculo) tamen de rectis extra hunc situm, sed & de curvis omnibus, omnibúsque tum superficiebus, tum solidis (ut quæ non possint tota in perpendiculi rectâ jacere) idem ostendetur.

Verùm ubi Centrum Terræ consideratur tanquam in infinita distantiâ; adeoque Perpendicula tanquam parallela; (quod in staticis plerumque fit;) hæc omnia locum non obtinent. Quam qaidem hypothesin (post Archimedem, aliosque) nos etiam sequimur, nisi cum contrarium insinuatur: quod & aliquoties monuimus.

PROP. XV.

Ex tribus his, Pondere, Ponderatione, & Distantiâ puncti applicationis (sive, à communi Motûs & Libræ Centro; nempe siquod sit; sintque ad eandem per centrum motûs rectam applicata pondera: Sive, à Perpendiculo per Centrum motus; si in eodem recto ad Horizontem plano rotentur: Sive, à perpendiculi succedaneo; si saltem in eodem plano rotentur: Sive denique à perpendiculari plano per axem motûs:) Datis duobus quibusvis, datur tertium.

Nempe; Datis Pondere & Distantiâ; datur Ponderatio: Datis Pondere & momento seu Ponderatione; datur Distantia: Datis ponderatione & Distantiâ; datur pondus.

Excipe; Si (quod unâ cum ponderatione datur) Distantia vel pondus nullum sit.

Intel-

Intelligitur autem Propositio, præsertim de Librâ in plano ad horizontem rectò libratâ; saltem in datâ declivitate. Et similiter in sequentibus.

$$PD = G. \quad \frac{G = PD}{P} = D. \quad \frac{G = PD}{D} = P.$$

CUm enim (per 12 ut 13 hujus) Ponderationis sive Momenti ratio ex rationibus Ponderum & Distantiarum componatur: Datis componentibus; datur composita: Item; Datis compositâ, & componentium alterâ; datur reliqua; (per 2 & 3 Cap. 1.) Adeóque constat propositum.

Exceptio item inde patet. Quoniam Pondus nullum, nihil Ponderabit, in quâcunque Distantiâ: Et, Nullius Distantiæ, nulla est Ponderatio, quodcunque sit Pondus.

SCHOLIUM.

MOmentum illud hic intelligo, quo Pondus gravat suum respectivè Libræ Brachium; quod itaque speciatim *Ponderationem* appello. Non quatenus vel Centrum Libræ gravat, vel punctum illud ex quo rectè dependet.

Propositionem hanc (& sequentes aliquot) multiplicem facere, pro variâ Distantiæ interpretatione secundum varios casus, potius quam propositionum numerum augere, visum est; quoniam eadem totius erit repetenda demonstratio. Quámque hic adhibui variarum interpretationum Distantiæ, variis casibus accommodationem; eadem in sequentibus Propositionibus intelligenda erit.

PROP. XVI.

Dato Pondere, in datâ (à communi motûs & Libræ Centro; vel à Perpendiculo per Centrum motûs, ejúsve succedaneo; vel à Perpendiculari Plano per axem motûs;) Distantiâ: Pondus aliud investigare, quod, in assignatâ distantiâ, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Ite

Item; Distantiam investigare, in quâ, Pondus assignatum, dato vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

$$\begin{array}{cccccccccc} P. & & \frac{1}{n}P. & & nP. & & \frac{m}{n}P. & & nP. & \\ D. & & nD. & & \frac{1}{n}D. & & nD. & & \frac{m}{n}D. & \\ \hline PD. & G:: & PD. & G:: & PD. & G:: & mPD. & mG:: & mPD. & mG. \end{array}$$

SIt P, datum pondus; in distantiâ C D, quam D dicimus, suspensum. Sitque alia exposita distantia, puta n D, (quæ sit ad D datam ut n ad 1;) idque vel in eodem vel in contrario Libræ Brachio. Dico; Pondus $\frac{1}{n}$ P (quod sit ad datum P, ut 1 ad n) in assignatâ distantia n D, priori in D, æquiponderare. Fig. 76.

Item: Sit assignatum Pondus, ut n P (quod ad datum P, sit ut n ad 1.) Dico; In distantiâ $\frac{1}{n}$ D (quod sit ad datum D, ut 1 ad n) assignatum n P pondus, priori in D æquiponderare.

Cum enim utrobique posteriora Pondus & Distantiâ, sint prioribus reciprocè proportionalia; (alterum ut n ad 1, alterum ut 1 ad n:) Æquiponderabunt. per 12 & 13 hujus.

Similiter: Si imperetur, non ut æquiponderent; sed, ut in datâ ratione: puta, ut m ad 1: Pro $\frac{1}{n}$ P, $\frac{1}{n}$ D; positis $\frac{m}{n}$ P, $\frac{m}{n}$ D; habetur quæsitum. Quippe hæc, ad prius posita, ponderant in ratione m ad 1. per easdem 12 & 13 hujus.

PROP. XVII.

Æqualis; ejusdem, vel æqualium Ponderum; (sive, ad commune motûs & Libræ Centrum; sive, ad Perpendiculum per centrum motûs, ejusve succedaneum; sive, ad Perpendiculare Planum per motûs Axem:) Propinquatio; aut inde Elongatio: (sive Pondus Centro illi, aut Perpendiculo Planóve, admoveatur; sive Centrum, Perpendiculnm, Planúmve, Ponderi; vel contra:) Æqualiter Auget, Minuítve Ponderationem. Et; Inæqualis: vel, Inæqualium Ponderum: Proportionaliter.

Sequitur

SEquitur ex 12 & 13 hujus. Cùm enim Æqualia Pondera ponderant in ratione Distantiarum: Quâ ratione Augetur Minuitúrve Distantia; in eâdem similiter vel Augetur vel Minuitur Ponderatio. Tantundem autem Addit, qui ex Duplo Triplum facit, & qui ex Triplo Quadruplum, &c. Quodque de Æqualibus dicitur; de Proportionalibus similiter inde constat.

PROP. XVIII.

Datis Ponderibus quotlibet: Datísque, vel communi motûs & Libræ Centro (aut perpendiculo per centrum motûs ejúsve succedaneo, aut perpendiculari Plano per motûs axem) atque Applicationum punctis; vel horum ab illo Centro (aut perpendiculo, perpendiculíve succedaneo, aut Plano) ad datas partes Distantiis: Investigare; Quanta sit tum singulorum, tum simul omnium ponderatio; &, ad quas partes; Tum denique quantum gravant ipsum quo sustinent Centrum, aut Axem.

+1D.	+3D.	+4D.	±0D.	−2D.	−3D.
P.	5P.	3P.	4P.	3P.	4P.
+DP.+G::	+15DP.+15G::	+12DP.+12G::	±0DP.±0G::	−6DP.−6G::	−12DP.−12G

Fig. 77.

+1G, +15G, +12G } = +28G.
±0G = ±0G.
−6G, −12G } = −18G.
+10G.

IN Distantiis: verbi gratiâ, ad Centri (Perpendiculi, hujúsve succedanei, Planíve) Dextram (quas signo + insignimus) D, 3D, 4D; dependeant Pondera P, 5P, 3P: quæ (posito P in Distantiâ D ponderare ut G) ponderabunt ut G, 15 G, 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeóque simul gravant brachiûm Dextrum, ut 28 G; per 8 Cap. 1.

In Distantiis ad sinistram (quas contrario signo — insignimus) 2D, 3D; dependeant Pondera 3P, 4P: Quæ itaque contraponderabunt, ut — 6 G, — 12 G; per 12 & 13 hujus: Adeóque simul gravant sinistrum brachium ut 18 G; per 8 Cap. 1.

Atque ex ipso Centro, quod itaque neutrum gravat Brachium, Pondus 4 P: Cujus Ponderatio est, ut ± 0 G. per 12 & 13 hujus.

Quæ simul omnia valent, ut +28G—18G±oG=+10G; per 8 Cap. 1. Adeóque prægravant Brachium Dextrum, ut 10 G. Hoc est (propter positum DP=G) quantum Decuplum Ponderis P in distantia D, dextrorsum, appensi.

Et similiter faciendum erit, quotcunq; & quantacunq; in quibuscunq; distantiis, ad utramvis partem appendantur Pondera: (habentur enim vel ex 12 & 13 hujus, vel ex 15 hujus, singulorum Ponderationes:) Idque, sive dentur ipsæ Distantiæ; sive Centrum (Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planúmve) una cum Appensionum Punctis; (nam, his datis, Distantiæ simul dantur; nempe ductis ab Appensionum Punctis, vel rectis ad Centrum illud, vel perpendicularibus ad Perpendiculum, Perpendiculi Succedaneum, Planúmve.) Invenimus ergo, tum singulorum, tum simul omnium, Ponderationem; &, ad quas partes. Quod erat faciendum.

Quod verò C commune motûs & Libræ Centrum spectat, vel siquod aliud est motûs Centrum, vel Axem etiam; quo substinetur cum ponderibus Libra, ne tota ruat: tantundem valent atque simul omnia pondera +P+5P+3P+4P+3P+4P=20P, ex centro æquilibrii directè dependentia; (saltem in eâ declivitate inde dependentia, quâ cum Ponderibus Libra librari intelligitur:) per 2 hujus vel 18 Cap. 2. Utpote quorum Descensus eo impeditur. Quod itidem investigandum erat.

SCHOLIUM.

Dico autem; *Ex centro æquilibrii*: Quoniam, dum, propter Præponderantiam dextri Brachii, Libra (si sibi permittatur) circa Centrum motûs rotatur; Eatenus descendens, quatenus descendit Centrum Æquilibrii (per 9 hujus:) Fixum illud Centrum motûs (vel motûs Axis) non ulterius impedit Descensum Libræ, quàm, quatenus Descensus ille ex Rotatione proveniens, minùs valet, quam directus eorundem Ponderum, totiúsque Libræ, Descensus. Et quantum valet horum Descensuum Differentia, tantundem gravatur Centrum (vel Axis) sustinens.

At verò; si addito, ad Brachium sinistrum, Pondere quod gravitet ut 10 G, quò ad Æquilibrii statum redigatur Libra; unde propterea impediatur ne ascendat sinistrum Brachium, quo itaque impediatur Rotatio: jam totum descensum impedit Centrum illud (vel Axis) fixum; Adeóque tantundem gravatur, quantum sunt (tum ipsius Libræ Pondus; tum adventitium illud, quod additur, quantumcunque sit, quod, situ quo ponitur, valet ut 10 G, libram reducens ad æquilibrium; tum) illa simul omnia appensa Pondera.



Obex

Obex verò, siquis superne objectus Rotationem impedit, tantâ vi pre-
mitur, quanta est Ponderis, quod eò loci appensum, Libram reduceret
ad Æquilibrium: Nec tamen Centrum (Axémve) tantillo onere le-
vat; (quia nihil sustinet; hoc est, nihil impedit quin tota moles simul
descendat:) Sed gravat potius.

Sin, loco hujus ad Brachium sinistrum Obicis, intelligatur Fulcrum
Brachio dextro subjectum, quo Rotatio impediatur: Sustinet quidem
hoc partem oneris, eâque Centrum levat.

Verùm hæc consideratio non est hujus loci; sed ad Vectem spectat
duobus Fulcris sustentum.

Si quis interim (præcedentem hanc demonstrationem quod spectat)
Calculi methodum aversetur; (utut Demonstrationes Arithmeticas
Linearibus intermistas, non refugiat vel Euclides ipse, vel quantumcun-
que severus quisquam ex Veteribus Demonstrator;) Lineisque mallet
illud præstari: Facilè erit quicquid est Calculi, sive hîc, sive aliàs, ad
Lineas revocare (quod tamen ad Pompam magis faciet, quam ad De-
monstrationis Robur vel Perspicuitatem:) Cujus quidem ad hanc pro-
positionem Instantiam libet exhibere. Ad cujus exemplar, quicquid
hujusmodi hîc aliàs occurrat, poterit similiter in Lineis, cui id libitum
erit, quispiam exhibere.

Alia Demonstratio.

Fig. 78. Expositis, ut prius, Distantiis, Ponderibúsque: Super rectis, quæ
expositis Distantiis D, 3D, 4D, &c. sint æquales, vel proportionales
totidem construantur Rectangula, vel, similiter Inclinata Parallelogram-
ma; quorum altitudines, sint respectivis Ponderibus proportionales.
Puta; Ad Dextram, DP seu G; 3D 5P seu 15 G; 4D 3P seu 12
G: Ad sinistram, 2D 3P seu 6 G; 3D 4D seu 12 G; Quæ quidem
Parallelogramma, quum Bases habeant expositis Distantiis proportio-
nales; & Altitudines, proportionales Ponderibus; (ex constructione)
sunt ipsa, in ratione ex his compositâ (per 23 El. 6.) hoc est; in
quâ ponderant appensa Pondera; per 12 & 13 hujus.

Fig. 79. His demum Rectangulis seu Parallelogrammis (per 44, 45, El. 1.)
totidem respectivè æqualia (putà, primum primo, secundum secundo,
&c.) invicem æque-alta & æquangula utrinque ad eandem rectam, pu-
ta CH infinitam, tanquam communem basem, continuè ponantur: Puta
ad Dextram, ea quæ ponderibus dextris respondent, ut G, 15 G,
12 G,

12 G; ad ſiniſtram quæ reſpondent Ponderibus ſiniſtris, ut 6 G, 12 G.

Quæ quidem Parallelogramma, tum ipſa (quia prioribus ſunt reſpective æqualia) tum ipſorum Baſes (per 1 El. 6 cum ſint æquè alta) puta CB, BE, ED, CF, FS; ſunt (per modò demonſtrata) Ponderum quibus reſpondent Ponderationibus proportionalia. Adeóque: Ut CD ſumma baſium ad dextram; ad CS ſummam baſium ad ſiniſtram; ita ponderum omnium ad Dextram, Ponderatio; ad Ponderationem omnium ad ſiniſtram. Atque ut SD differentia, ſive ad CD, ſive ad CS, ſive ad CB, &c. ſic eſt Præponderantia ponderum à dextrâ, ad Ponderationem vel omnium à dextrâ, vel omnium à ſiniſtrâ, vel ipſius ſpeciatim Ponderis cui reſpondet baſis CB, &c. Quæ erant inveſtiganda.

Pondus verò, quod ex Centro (vel Axe) dependet, ut nullam habet inde diſtantiam; ſic quæ huic reſponderent Parallelogramma (puta C4P, CA) nullius ſunt Latitudinis; adeóque nullius magnitudinis; ut & ipſum (librationem quod ſpectat) nihil gravat vel hoc vel illud Brachium.

Denique; ipſum quo omnia ſuſtinentur Centrum (vel Axem) cum ſimul omnium pariter deſcenſui recto reſiſtat, in eâ ratione gravant ſingula, quâ ſunt ipſa reſpectivè Pondera; & ſimul omnia, quantum eſt omnium Aggregatum ex æquilibrii centro ſuſpenſum: (per 2 hujus, vel 18 Cap. 2.) Hoc eſt, ut $P+5P+3P+4P+3P+4P=20P$. Quod erat ultimò inveſtigandum.

PROP. XIX.

Datis Ponderibus quotlibet (vel ſumma Ponderum;) datáque eorum ad datum commune motûs & Libræ Centrum (vel ad datum per centrum motûs Perpendiculum, aut Perpendiculi Succedaneum, vel ad datum Motûs Axem; Planúmve per illum Axem perpendiculare) Ponderatione ad datas partes: Ponderationem illam Augere vel Minuere, datâ quantitate; ſive manente hoc centro (Perpendiculo, perpendiculi Succedaneo, Axe, Planóve;) ſive manentibus Ponderibus ſic appenſis.

 Sunto

SUnto data pondera, vel ſumma Ponderum, verbi gratia, 20 P. Sit-que omnium Ponderatio ad datum Centrum, vel Axem C (vel Perpendiculum, Planúmve perpendiculare per Axem) + 10G = +10DP, dextrorſum: Quæ verbi gratia, Minuenda ſit (vel Ponderatio ſiniſtrorſum Augenda) quantitate 5 P D; hoc eſt, expoſitæ Ponderationi + 10 P D, auferenda ſit 5 P D.

Inveniatur (per 15 hujus) diſtantia dextrorſum, quâ datum Pondus 20 P, ponderet ut 5 P D (nempe quantum expoſitæ Ponderationi auferendum eſt) puta $\frac{1}{4}D = \frac{5\,PD}{20\,P}$. Cui ſit æqualis, verbi gratia, C E. Dico; ſi, manente C, omnia ſimul Pondera ſiniſtrorſum moveantur; quantum eſt E C recta; Vel, manentibus Ponderibus tantundem dextrorſum transferatur C: Utrumvis fiat, tantò minor erit ponderum ſingulorum Diſtantia dextrorſum (vel major ſiniſtrorſum) quanta eſt $EC = \frac{1}{4}D$. Adeóque (per 17 hujus) expoſitæ ponderationi dextrorſum, tantum aufertur (vel additur ponderationi ſiniſtrorſum) quanta eſt 5 P D. Quod erat imperatum.

Fig. 77.

Similiter omnino fieret, ſi Augenda eſſet Ponderatio dextrorſum (vel ponderatio ſiniſtrorſum minuenda;) niſi quod tunc vel Pondera dextrorſum movenda eſſent, vel C (Centrum, Axis, Perpendiculum, perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare per axem Planum) ſiniſtrorſum; quo appenſionum diſtantiæ dextrorſum augeantur, vel minuantur ſiniſtrorſum.

SCHOLIUM.

HInc fieri poteſt, ut quæ priùs fuerat ſive Dextrorſum ſive Siniſtrorſum Ponderatio, in Æquilibrium evaneſcat; (putà, ſi Ponderationi + 10 P D, tantundem auferatur; quippe +10PD—10PD = ±0PD:) vel, ut Ponderatio prius Dextrorſum, jam fiat Siniſtrorſum; vel contra; (putà ſi Ponderationi + 10 P D, auferatur 15PD; quippe + 10 P D — 15 P D = — 5 P D:) Quod per 16 hujus (quâ docetur, *in datâ ratione* minuere) non fiet; in quâcunque enim ratione (quæ infinita non ſit) minuatur, verbi gratia, + P D; manebit adhuc, ſigno + affectum.

PROP. XX.

Datis Ponderibus quotlibet; unà cum communi Motûs & libræ Centro (vel perpendiculo per Centrum Motûs, ejúsve Succedaneo, vel motûs Axe, aut per hunc plano Perpendiculari;) atque applicationum Punctis, aut horum inde Distantiis.

Vel; Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes.

Punctum Libræ datæ (vel Perpendiculum illud, aut Perpendiculi Succedaneum; vel Perpendiculare Planum per Axem; prout ab hoc aut illo Distantia data fuerit;) invenire: quo si suspenderentur omnia, similiter ponderarent; Nempe, tantundem, atque ad datas partes.

Quod ipsum inventum Libræ Punctum; est Centrum Æquilibrii; estque Unicum. Et Perpendiculum inventum, aut Perpendiculi Succedaneum; est Perpendiculum Æquilibrii, aut Succedaneum hujus; estque item Unicum. Et inventum Herpendiculare Planum; est Planum Æquilibrii Perpendiculare; estque hoc (ex planis plano huic per Axem parallelis) Unicum.

$$\frac{+10G=10PD}{20P}=+\tfrac{1}{2}D. \qquad \frac{+lrDP+msDP-ntDP}{+rP+sP+tP}=\frac{+lr+ms-nt}{r+s+t}D.$$

Esto (ut in Prop. 18.) expositum C centrum motûs & libræ (vel Perpendiculum per motûs centrum, aut perpendiculi Succedaneum, vel Perpendiculare Planum per motûs Axem; juxta conditiones ad Prop. 15 memoratas:) Atque exposita Pondera; quorum summa sit, verbi gratiâ, 20 P: Et simul omnium Ponderatio, ut 10 G, vel 10 PD; dextrorsum. Fig. 7.

Vel, exponantur singula seorsum Pondera, cum suis Distantiis; unde, per 18 hujus, hæc summa & Ponderatio colligi possint.

Datur,

Datur, inquam, Diſtantia (per 15 hujus) quâ ſi ad datas partes hoc totum Pondus, vel ſumma Ponderum, ſuſpendatur ſimiliter ponderabit. Nempe $\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\frac{1}{2}D$. Hoc eſt; ſi Dextrorſum (quod innuit ſignum $+$) in Diſtantiâ $\frac{1}{2}D$ (putà in puncto E, diſtantiæ CD medio; vel ubivis in perpendiculo, aut perpendiculi ſuccedaneo, per E tranſeunte; vel in perpendiculari per E plano, plano per axem motûs parallelo;) ſuſpendantur ſimul omnia Pondera ſeu ſumma ponderum $20P$: Similiter ponderabunt, atque jam in ſuis ſingula ſuſpenſa locis; nempe ut $+10G$, vel $+10PD$. Quod erat inveſtigandum.

Vel, Univerſaliter: In diſtantiis $+lD$, $+mD$, $-nD$, &c. appenſa pondera rP, sP, tP, &c. ponderant ut $+lrDP$, $+msDP$, $-ntDP$, &c. (per 18 hujus.) Horum Aggregatum, ſi per ſummam Ponderum dividatur; quod prodit $\left(\frac{+lrDP + msDP - ntDP}{rP + sP + tP} = \right)\frac{+lr + ms - nt}{r + s + t}D$, eſt Diſtantia (Dextrorſum, aut ſiniſtrorſum, prout notata ſignis $+$ aut $-$ præpollent) quâ ſi ſumma Ponderum ſuſpendatur, ſimiliter Ponderabunt: per 15 hujus. Quod erat inveſtigandum.

Dico porro; Libræ punctum E ſic inventum, Æquilibrii Centrum eſſe; (Quódque per hoc tranſit Perpendiculum, vel Perpendiculi Succedaneum; eſt Perpendiculum Æquilibrii; vel Succedaneum hujus. Et, Perpendiculare planum per E, perpendiculari per axem Plano parallelum; eſt Perpendiculum Æquilibrii Planum.)

Cum enim ita gravant Libram omnia ſimul Pondera, atque ſi ex puncto (vel per illud tranſeunte Perpendiculo, Planóve perpendiculari) dependerent omnia (per jam demonſtrata:) Si ipſum E libræ centrum fiat (vel ubivis in eo Perpendiculo, Planóve ſuſpendantur;) nihil ponderabunt, ſive neutrum prægravabunt Brachium, per 12 & 13 hujus. Eritquè propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) libræ punctum E, Centrum Æquilibrii: Et (per def. Perpendiculi Æquilibrii, hujúſve Succedanei, & Plani Æquilibrii) Perpendiculum illud, ejuſve Succedaneum; erit Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; & Planum illud, erit Perpendiculare Planum Æquilibrii. Quod erat demonſtrandum.

Vel etiam; Quia, poſito C Centro libræ, tantundem ſimul omnia dextrorſum Ponderant, atque ſi in diſtantiâ C E dextrorſum, ſuſpenderentur omnia: Si Centrum transferatur a C in E (vel a Perpendiculo, Succedaneóve, vel Perpendiculari per Axem Plano, per C, ad parallelum per E Planum rectamve) tantundem omnium (ubicunque dependeant)

vel minuitur distantia dextrorsum, vel (quod eodem recidit) augetur sinistrorsum, quanta est C E recta (vel parallelorum distantia.) Adeóque (per præced.) tantundem Ponderationis, vel dextrorsum demitur, vel additur sinistrorsum, quanta est simul omnium Ponderatio in distantiâ C E: hoc est, per modo demonstrata, tota Ponderatio dextrorsum tollitur. Eritque propterea (per 6 hujus, vel def. Centri Æquilibrii) E Centrum Æquilibrii. (Et similiter, per suas respective definitiones, ostendetur, de Perpendiculo Æquilibrii, ejúsve Succedaneo; & Perpendiculari Plano Æquilibrii.) Quod demonstrandum erat.

Denique: Centrum Æquilibrii unicum esse dico: (& similiter unicum esse Perpendiculum Æquilibrii, aut hujus Succedaneum; Unicum item Perpendiculare planum plano per Axem parallelum.)

Posito enim, verbi gratia, E centro æquilibrii; quo scilicet suspensa libra in neutram partem propendet: Si inde in utramvis partem ad quamcunque distantiam transferatur Centrum Motûs, putâ ad C; vel ex illâ parte minuetur, vel ex alterâ augebitur omnium distantia; adeóque & Ponderatio (per præced.) Præponderabit itaque brachiorum alterum (per 9 Cap. 1.) Adeóque non erit C centrum Æquilibrii. (Et similiter de Perpendiculo Æquilibrii, ejúsve Succedaneo, vel de Perpendiculari Plano, ostendetur.) Quod erat ultimò demonstrandum.

PROP. XXI.

Datâ dati Ponderis (sive unius, sive ex pluribus aggregati) ad datum aliquod libræ punctum ut commune motûs & libræ Centrum (vel ad datum Perpendiculum, Succedaneúmve, vel Perpendiculare planum per axem) Ponderatione: Datur ejusdem, ad aliud quodvis libræ punctum ut commune Centrum motûs & libræ (vel Perpendiculum, Succedaneúmve, aut Perpendiculare planum parallelum, ut dictum est) assignatum, Ponderatio.

NAm, propter data duo Centra (vel Perpendicula, Succedaneáve, aut parallela Plana) adeóque secundi a priore Distantiam ad datas partes: Datur (per 12, 13, & 17 vel 19 hujus) quantum dati ponderis Ponderationi datæ ad datas partes, addendum erit vel auferendum, propter translatum Centrum (vel Perpendiculum, Succedaneúmve, aut Perpendiculare

pendiculare planum.) Adeóque quanta erit, & ad quas partes, Ponderatio respectu posterioris. Quod erat propositum.

Puta; si Pondus, vel ponderum Aggregatum, ut 20 P, ponderet ad Centrum (vel Perpendiculum, Planúmve perpendiculare) ut + 10 PD dextrorsum; & transferatur centrum (Perpendiculum, planúmve) ad E ut sit, verbi gratia, distantia CE = $\frac{1}{4}$ D dextrorsum; auferendum + $\frac{1}{4}$D × 20 P = + 5 PD. Adeóque ponderabit ad E, ut + 10 PD — 5 PD = + 5 PD.

Si CE = $\frac{1}{2}$ D: auferendum + $\frac{1}{2}$ D × 20 P = + 10 P D. Adeóque ponderabit, ut + 10 P D — 10 P D = 00.

Si C E = D: auferendum + D × 20 P D = + 20 PD. Adeóque ponderabit, ut + 10 P D — 20 P D = — 10 P D; hoc est, 10 P D sinistrorsum.

Similiter omnino, si sumeretur E sinistrorsum; nisi quòd quæ jam auferenda sunt, tunc essent addenda; & contra.

PROP. XXII.

Datâ Centrorum Libræ motúsque & Æquilibrii (vel Perpendiculorum per Centrum æquilibrii & per Centrum motûs; vel Plani Perpendicularis per motûs axem huic paralleli Plani Æquilibrii) ab invicem Distantiâ ad datas partes: Ex cognito Pondere (vel summa ponderum) cognoscitur Ponderatio; vel, cognitâ ponderatione, pondus vel summa ponderum.

$$+D\times P = +DP = +G. \qquad \frac{+G = +DP}{+D} = P.$$

CUm enim appensum Pondus, vel summa Ponderum utcunque appensorum, perinde libram gravant atque si omnia ex Centro Æquilibrii (vel in perpendiculari Plano per Centrum Æquilibrii, plano per Axem motûs perpendiculari Parallelo) dependerent; per 20 hujus. Adeoque per 12 & 13 hujus, in ratione quæ ex Distantiæ, & Ponderis (seu summæ Ponderum) rationibus componitur; atque ad eas partes qua est æquilibrii Centrum Planúmve. Datis, tum ad datas partes Distantia

Diſtantiâ, tum ſummâ Ponderum; datur Ponderatio (quanta, & ad quas partes:) Vel, Datis Diſtantiâ & Pondertaione; Pondus datur vel ſumma Ponderum. per 15 hujus. Quod erat probandum.

PROP. XXIII.

Datis Pondere (ſeu ſummâ Ponderum) & Ponderatione ad datas partes: Datur Centri Æquilibrii (Perpendiculi, Planive, in quo eſt) à Plano per axem motûs tranſeunte, (vel, in datâ librâ per centrum motûs tranſeunte, à Centro libræ) Diſtantia ad datas partes.

Adeóque; Plani Perpendicularis per axem motûs, & huic paralleli Plani Æquilibrii: Vel, in dato Libræ Plano, Perpendiculorum (aut Succedaneorum) per centrum Motûs & Centrum Æquilibrii: Vel, in datâ librâ per centrum motus tranſeunte, Centrorum Motûs & Æquilibrii: Uno dato, datur reliquum.

Cum enim Ponderatio ad datas partes, ſit in ratione quæ componitur ex rationibus Ponderis (ſeu ſummæ ponderum) & Diſtantiæ Centri Æquilibrii (perpendiculivè aut plani in quo illud eſt) ſive a communi Motûs & libræ Centro; ſive a Perpendiculo per centrum motûs eiúſve Succedaneo; ſive à plano per axem motûs perpendiculari; ad datas partes: per 12, 13, & 20 hujus: Datâ Ponderatione ad datas partes, & ipſo pondere ſeu ſumma Ponderum; datur ad illas partes Diſtantia, per 15 hujus.

Adeóque (in datâ librâ) diſtantium punctorum uno inſuper dato, datur reliquum (puta, dato centro libræ per centrum motûs tranſeuntis, datur Centrum Æquilibrii; vel, dato centro Æquilibrii, datur iſtius libræ Centrum:) Similiter, diſtantium Perpendiculorum (per Centrum Motûs, & per Centrum Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum: Item, Planorum perpendicularium (per Axem motûs, & paralleli Plani Æquilibrii,) dato uno, datur reliquum. Quod propoſitum erat.

PROP. XXIV.

Libram vulgarem Officinarum Conſtruendi, rationem exponere.

Fig. 51. Libra vulgaris Officinarum, intelligitur Centro ſuo ſuſpendi; Brachiáque æquali præciſè a Centro longitudine utrinque porrigi: Atque ab horum extremis dependere Lances, ad Æquilibrium redactas: Quarum uni impoſito noto Pondere, ignotum prius Pondus in altera æſtimatur. Quippè cum æqualibus utrinque a Libræ Centro diſtantiis, ſint appenſa: Quod noto Ponderi, ſic appenſum Æquiponderat, Æquale Pondus eſt: Sin majus; præponderabit, adeóque deorſum feretur: Si minus; elevabitur. Sequitur ex 12 hujus.

SCHOLIUM.

Quò exactiores ſint hæ Libræ; requiritur, ut hæc quæ ſequuntur Obſerventur.

1. Ut Brachia utrinque ab Axe (quo ſuſtinetur Libra) porrecta (unà cum Lancibus reliquiſque armamentis) ſint ejuſdem præciſè ponderationis; (præſertim dum ſitu Horizontali ponitur, à quo ponderationis initium ſumi ſolet:) Hoc eſt, ut in ipſo præciſè Æquilibrii perpendiculo ſuſtineatur Libra, cum armamentis. Quippe ſi alterum Brachiorum (cum armamentis ſuis) prædonderet, ea propendebit Libra, indéque appenſo Ponderi inique favebit, per 2 hujus.

2. Ut ex ſui Jugi Centro æquilibrii præciſè dependeat. Sive, ut Axis Libræ ſit Axis Æquilibrii. Nam (per 10 hujus) ſi Axis fuerit tantillum infra Centrum æquilibrii; libra in alteram partem detruſa non revertet, ſed planè præcipitabitur, ut uſui omnino futura ſit incommoda. Si ſupra Centrum Æquilibrii ſit Axis; Revertet quidem detruſa Libra; ſed hoc habet cum priori ſitu commune incommodum, quod Libra ipſa in alteram partem præponderabit, eam ſcilicet quà est Æquilibrii Centrum. Unde, ut in priori caſu præcipitatio promovetur (propter Libræ præponderantiam ad ſitum decliviorem) ita in hoc caſu (ubi præponderantia Libræ eſt ad partem contrariam) revocatur quidem Libra ne præcipitetur, ſed ſimul minùs ſincerè ſuum munus peragit; dum illa Libræ præponderantia, ponderis ex eâ parte appenſi partibus favet. Quæ conſtant omnia ex 10 huius.

3.

3. Ut ejusdem sint præcisè longitudinis ipsa Brachia: Quæ quidem ab ipso Axe seu Centro Motùs, ad ipsa Appensionum Puncta, æstimanda est. Quippe si Brachiorum alterum altero longius sit; minus ex illo dependens Pondus, majori ex altero dependenti, æquiponderabit. per 12 hujus.

Atque hinc oriri potest insignis impostura. Putà, si, qui merces vendunt pondere æstimandas, Bilancem ita constitutam habeant, ut vacuæ lances æquiponderent, brachiorum autem alterum altero sit longius: Positis enim in lance ex longiori brachio dependente Mercibus; &, in contrariâ, noto Pondere: Mercium Pondus minus, majori Ponderi in oppositâ lance æquiponderabit, in fraudem emptoris.

4. Ut liberrimè ex Appensionum punctis dependeant (cum suis oneribus) Lances. Eo nempe fine, ut, in quemcunque ad Horizontem situm reciprocetur Jugum, Onus tamen (vi prop. 31. Cap. 2.) eidem semper Jugi puncto subsit; adeóque æquali semper à Centro distantiâ suspendi intelligatur, Quippe ex eo Libræ puncto suspendi intelligitur, cui directè subest: per 4 huius.

5. Ut ipsa, in libræ Jugo, Appensionum puncta, sint in eâdem præcisè Lineâ Rectâ cum ipso Motùs Centro; sive (quod eodem recidit) in eodem cum Axe Plano cui Examen Perpendiculariter insistit. Quippe si vel infra, vel supra, sint Appensionum Puncta; (cum tantundem valeant appensa Pondera, atque si in ipsis essent, per 4 hujus) pro vario libræ situ, variabitur momentorum ratio: ut ad 14 huius ostenditur, in casu 2; ubi Centrum Motùs est extra Libram; hoc est, extra rectam illam quæ appensionum puncta conjungit; per 9 & 12 def. hujus.

6. Ut duo Brachia, sint, quàm commodè fieri potest, Longa. Quò enim longiùs à Centro distant Appensionum puncta, eò plus ponderant, tum sigillatim appensa Pondera (per 12 hujus) tum (quod inde sequitur) comparatorum Ponderum Differentia: (cui ponderando æquipollent simul utraque pondera, contrariis Lancibus imposita; per 5 hujus.) Unde, quod, in brevi Jugo, sensum fugiat discrimen, idem, pro Jugi longitudine auctum, evadet satis notabile.

7. Ut Jugi firmitas tanta sit (pro ratione Ponderum ad illud exigendorum) ut non vel rumpatur, vel inflectatur. Hoc utique adversaretur def. 2 & 9 hujus; quæ Libram Jugúmque inflexile supponunt. Et (ne cæteris immoremur) illis saltem incommodis obnoxium erit, quæ, ex Centro Motûs extra libram posito oriunda; modò memoravimus.

8. Ut Axis Acies, quâ sustinetur jugum (quæque per ipsius Centrum gravitatis, vel Æquilibrii, transire intelligitur) Tum Acuta sit (ad instar quasi lineæ Mathematicæ, quam referre intelligitur) quò facilius

 cilius

ciliùs in utramvis partem reciprocetur Libra: Tum situ Horizontali constituta (quippe Libra circa Horizontalem Axem sincerius libratur, utpote in Plano ad Horizontem recto, in quo, cæteris paribus, Pondera magis gravitant, & suapte sponte feruntur, per 25, 26, Cap. 1.) Tum denique ut Declivitatem habeat utrinque æqualem (nam si qua motus est declivior, eà magis propendebit Libra; per 17, Cap. 1.) Adeóque ut Axis Cuneum referat, cujus duo plana in Aciem coeuntia sint (posito Jugo in situ Horizontali) ad Horizontem æqualiter inclinata; & simul Trutinæ foramina, quibus sustineri solent Axis extrema, ita subtus comparata sint ut ab infimo puncto, cui incumbit Axis acies, æquali utrinque acclivitate assurgant; utrinque enim (nempe tum ob formam Axis indebitam, tum foraminum Trutinæ inæqualem acclivitatem) oriri poterit inæqualitas in declivitate motûs.

9. Ut, quam fieri possit per alia incommoda, tenue sit & leve Jugum cum armamentis suis. Nam (per 2 huius) utut, cæteris ut dictum est comparatis, ipsum Jugi Pondus, cum Lancibus reliquâque armatura, Librationem quod spectat, nullius instar habeatur: Axem tamen, quo sustinetur premit, ejúsque obtundit aciem, quo minus circa illum libere rotetur libra. Adeóque quo minus fuerit Jugi pondus, eò minus hinc incommodi, cæteris paribus, oborietur.

10. Denique; pro variâ Gravium ad Examen exigendorum pondere & magnitudine, aliter atque aliter prospiciendum erit in fabrica Libræ. Nempe, in Aurifabrorum & Gemmariorum Bilancibus quibus res minutissimæ ad examen revocantur; maximè prospiciendum est ut accurate omnia fiant, quó levissimum Ponderis discrimen detegatur. Quos quidem tantâ cum accuratione fieri nonnunquam dicitur ut $\frac{1}{400}$ unius grani huc illuc vertatur, imò (quod in Honoratissimi *Boylii* nostri accuratissimâ quâdam Bilance observatum est) parte unius grani, $\frac{1}{1024}$; (quod coram compluribus testibus fide dignis experimento facto sæpius comprobatum fuit.) Ubi autem res, magnæ Molis & Ponderis, librandæ veniunt (ut in Fabrorum ferrariorum negotiis aliisque magni moliminis rebus fieri solet) magis prospiciendum erit firmitati totius machinæ: Adeóque ita attemperanda sunt quæ de Longitudine Brachiorum, de tenuitate & levitate Jugi, de Aciei Axis acumine, reliquísque hujusmodi, suprà diximus; ut firmitati totius machinæ non officiatur. Et quidem, quæ ad Centipondium pendendum paratur Libra, non minùs accurata censebitur, si uno scrupulo vertatur; quam quæ ad Drachmam pendendam comparatur, si vertatur parte $\frac{1}{410}$ unius grani.

grani. Nam ut Centipondium in ſe contineat ſcrupulos 28800; ita Drachma continet $\frac{28800}{480}$ unius grani; computando ſcilicet in Librâ ſeu Pondo 12 Uncias; in Unciâ, 8 Drachmas; in Drachmâ, 3 Scrupulos; in Scrupulo, 20 Grana:) Adeóque; utrobique eâdem appenſi Ponderis parte aliquotâ vertitur.

PROP. XXV.

Stateram Romanam conſtruendi rationem exponere.

STatera, quam (ob uſum ejus frequentem Romæ) *Romanam* vocant; à vulgari Librâ, Brachiorum longitudine, potiſſimum differt: Quæ non, ut Vulgaris Libra, Æqualia habet; ſed, pro variâ Ponderum comparandorum ratione, variè Inæqualia. Porrecto nempe ab Axe Motûs (qui & Axis Æquilibrii eſſe debet) Brachiorum altero, ut CA, in certam longitudinem, putà unius Pollicis, aut etiam minorem; in altero Brachio, ut CB, quantumvis porrecto, diſtinguunt partes ipſi CA longitudine æquales, quot opus videbitur, diſtantiis 1, 2, 3, 4, &c. terminatas; (quas etiam in particulas quotlibet æquales diſtribuunt.) Fig. 80.

Appenſo itaque Q Quæſito Pondere ſeu explorando ex A; Pondus datum ſeu notum P, ex Brachio contrario dependens, à puncto C removendo & admovendo explorant in quâ diſtantiâ fiet æquilibrium. Atque invento, verbi gratia, pondus P in diſtantiâ 5, ponderi Q in A, æquiponderare: hinc colligunt (propter Pondera Diſtantiis reciprocè proportionalia) Pondus Q, ponderis P noti, quintuplum eſſe. Cujus Demonſtratio ex 12 hujus dependet.

SCHOLIUM.

HOc habet Statera hæc, præ vulgari Librâ commodum: Tum ut uno Pondere noto, quodcunque explorandum ponderent: Tum ut minus gravetur Centrum vel Axis Libræ. Quamquam enim rotationem quod ſpectat tantundem valet P in 5, atque 5 P in 1; non tamen æqualiter gravant Axem; Ut ad 18 hujus oſtenſum eſt.

FINIS.

Errata sic emendentur.

PAg. 9. *l. pen.* *l* ad *r.* p. 10. *l.* 28. quàm quod. p. 25. *l.* 6. *marg.* Fig. 20, 21. p 38. *l.* 22. judicium. p. 57. *l.* 32. impediatur. p. 61. *l.* 1. esset. p. 70. *l.* 11. Ascendat. p. 75. *l.* 9. per 31. p. 86. *l.* 1[illegible] accommodanda. p. 96. *l.* 16. sustinentur. p. 98. *l.* 27. 3D4P. p. 9[illegible] *l.* 23. 20P, illic suspensa. p. 108. *l.* 26. Quas.

I

D

Aut
G
de
Sc
M

Typis
A

MECHANICA:

SIVE,

De MOTU,

TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS* S S. Th. D.
Geometriæ Profeſſore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majeſtati* à Sacris.

PARS SECUNDA.

IN QUA,
De Centro Gravitatis;
Ejuſque Calculo.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impenſis *Moſis Pitt*, ad Inſigne *Albi Cervi* in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXX.



MECHANICORUM, SIVE *Tractatûs* DE MOTU:

PARS SECUNDA:

Quæ est DE CENTRO GRAVITATIS, Ejusque CALCULO.

Ad Lectorem Monitio.



Equis miretur, quòd Pars *hæc* Secunda, *præter solitum, ex abrupto inchoari videatur; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, tum Paginarum Numeris: Lectorem monendum duxi, id pluribus de causis contigisse. Primò quidem, quòd non ab initio statueram particulatim edere; sed simul & semel opus integrum emittere. Et quidem (ut dicam quod res est) Partis hujus Secundæ pars quasi dimidia jam ante impressa fuerat, quàm vel Partem Primam (anno præterito) ediderim, vel Opus ipsum in Partes distribuendum putaverim. Sed partim Operarum Mora, quæ Opus Typothetis difficile, atque inusitatum, in longum protraxerant; partim aliorum impatientia, qui ut saltem Partem illam præmitterem efflagitarunt; fecere, ut loco commodo Sectionem facerem. Verùm, si id in causâ non fuisset; alia tamen ratio est (quæ etiam ab initio fecit, ne Opus hoc in* Libros *partirem,) cur sic fecissem. Quippe, cùm frequentissima occurrat Citationum occasio; si, quoties* Figura *vel* Propositio *citanda foret, toties, præter ipsarum Numeros, tam* Libri *seu* Partis, *tum* Capitis *Numeri recensendi essent: Omnino minùs commodè id fieret, quàm (quod hic fit) ubi Figura quælibet unico Numero, & qualibet Propositio vel unico vel saltem duobus Numeris designatur. Atque ob eandem causam, etiam sequentis Partis Numeri cum Numeris Secundæ continuandi erunt.*

CAP.



CAP. IV.

De Centro Gravitatis.

DEFINITIO.

Continuum quodvis (secundum Cavallerii Geometriam Indivisibilium) intelligitur, ex Indivisibilibus numero infinitis constare.

UT, ex infinitis Punctis, Linea; Superficies, ex infinitis Lineis; & ex infinitis numero Superficiebus, Solidum: Item ex infinitis temporis Momentis, Tempus, &c.

Hoc est; (ut nos idem explicamus in nostra Arithmetica Infinitorum, & Tract. de Con. Sect.) ex particulis Homogeneis, infinitè exiguis, numero infinitis; Idque (ut plurimum) secundum unam saltem dimensionem æqualibus.

Fig. 81. PUtà; Linea, ex infinitis punctis, hoc est, Lineolis infinitè exiguis, longitudine æqualibus, vel æquè altis; quarum cujusvis longitudo vel altitudo sit $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitesima) longitudinis vel altitudinis totius lineæ.

Fig. 82. Item, Superficies ex infinitis lineis sive rectis sive curvis parallelis; hoc est, superficieculis (lineis illis interjectis) æquè altis, quarum cujusvis altitudo sit infinitesima pars totius altitudinis; aut etiam ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur constare) hoc est ex superficieculis æqualibus & similibus, quarum cujusvis magnitudo sit $\frac{1}{\infty}$ totius areæ.

Item; Solidum, ex infinitis numero superficiebus, hoc est solidulis æquè altis sive æque crassis, quorum cujusvis altitudo vel crassities sit $\frac{1}{\infty}$ totius; vel, lineis numero infinitis (ex quibus intelliguntur illæ superficies constare) puta ex totidem Prismatis, situ paral-

parallelis, quorum baſes (communi plano ſectorum ad ea recto) ſimiles ſint & æquales, quarum magnitudo ſit $\frac{1}{\infty}$ iſtius quo ſecantur plani; vel etiam, ex punctis (quibus illæ lineæ intelliguntur conſtare) hoc eſt ſolidulis exiguis, æqualibus, quorum ſingulorum magnitudo intelligatur $\frac{1}{\infty}$ totius.

Quæ quidem Lineolæ, Superficieculæ, Solidula, &c. variis modis diſpoſita intelligi ſolent, prout conſtructori videatur expedire. Exempli gratia; Circulus dicetur, hoc ſenſu, ex infinitis numero rectis parallelis conſtare, ad eandem unam aliquam diametrum ordinatim applicatis; hoc eſt, Parallelogrammis æque altis: (Fig. 83.) vel ex infinitis numero Circumferentiis concentricis; hoc eſt, annulis æque craſſis: (Fig. 84.) vel ex infinitis numero radiis; hoc eſt, ſectoribus, vel triangulis ſimilibus, &c. (Fig. 85.) Et Sphæra ſimiliter, ſive ex infinitis numero planis æque craſſis; ſive ex totidem ſuperficiebus Sphæricis concentricis; ſive ex infinitis numero ſectoribus ſphæricis, aut Pyramidulis, &c.

Dico tamen, *ut plurimum*, ita fieri, ut illæ particulæ ſecundum unam ſaltem dimenſionem ſint æquales: Neque enim illud neceſſario exigitur; quin, ſi id aliquando expedire videbitur, pro altitudinibus (verbi gratiâ) æqualibus, poterit conſtructor vel arithmetice proportionalibus, vel ſecundum aliquam aliam ordinatam ſeriem creſcentibus vel decreſcentibus uti.

Hoc eſt (ſecundum Mathematicum rigorem) ſaltem inſcribi poteſt, vel circumſcribi, vel aliàs adaptari, ex hujuſmodi particulis conflatum, quod ab expoſito differat quantitate infinitè exiguâ, ſive quæ datâ quâvis minor ſit.

Puta; in Circuli peripheriâ, ex arcubus numero infinitis, conflabitur curva quæ peripheriæ exactè congruat; ſed & eidem peripheriæ inſcribi poteſt ex ſubtenſis numero infinitis, vel circumſcribi ex infinitis numero tangentibus, conflata linea, quæ à peripheriâ illâ deficiat, vel eam ſuperet, differentiâ quæ datâ quâvis minor ſit. Unde factum eſt, ut Circulus, pro Polygono regulari laterum numero infinitorum, haberi ſoleat. Et, in aliis curvilineis, ſimiliter.

Item Circuli Plano, aptari poteſt, ſive ex Annulis, ſive ex Sectoribus, figura quæ circulo accuratè congruat: Sed & eidem inſcribi poteſt vel circumſcribi, ſive ex Parallelogrammis, ſive ex ſimilibus Triangulis figura, cujus ab expoſito circulo differentia, ſit datâ minor. Atque in aliis ſimiliter.

Atque

Atque hanc, de Indivisibilibus, doctrinam (nunc passim receptam, atque, post Cavallerium, à celeberrimis Mathematicis approbatam) pro Veterum continuâ figurarum Adscriptione, substituere visum est, ut breviorem; nec tamen, minùs demonstrativam, si debitâ cautione adhibeatur.

Hanc interim definitionem, utut Capiti V. maximè subservituram, huic IV. Capiti præfigo, quoniam & hic alicubi usui erit. Ut siquando Grave, per omnia sui puncta, designem, &c. nec velim tamen perperam intellectum iri.

Sin Demonstrandum hoc, non Definiendum, putet quis; Ego quidem pro eatenus demonstrato habeo quatenus demonstratione opus sit, ex demonstratâ ab aliis Methodo Indivisibilium. Hic utique id agitur, ut definiam quo sensu velim hujusmodi quæ occurrunt intelligenda; quod est Definitionis opus.

Definitio *Centri Gravitatis*, habetur in Capite præcedente.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Puncto unico, ut Centro Motûs, sustineatur Grave (vel ex pluribus conjunctis gravibus aggregatum:) poterit nihilo minùs in quasvis partes, circa illud rotando moveri; non aliàs.

Si duobus punctis, pluribúsve in eadem rectâ, ut motûs Axe sustineatur: poterit, circa illam rectam, in utramvis partem rotando moveri; non aliàs.

Si tribus (pluribúsve) non in eâdem rectâ punctis sustineatur: in nullas partes movebitur.

Fig. 86. Intelligatur Grave quodvis A B F, unico puncto M ut Centro motûs sustineri. Manifestum est, stante hoc puncto M, in quascunque circa hoc moveatur partes, eandem posse totius figuram retineri. Quippe in quodcunq; Superficiei Sphericæ centro M descriptæ moveatur (verbi gratia) punctum A; (hoc est, in quascunque partes circa M rotetur;) nihil impedit quin & reliqua puncta, ut B, ita simul moveantur, ut eandem

eandem quam priùs inter ſe poſitionem retineant. Puta, ut A, B, ſint in eâdem quâ priùs diſtantiâ; ſitque A B F idem angulis, iiſdemque ut priùs cruribus comprehenſus, &c.

Sin duobis punctis, ut X, S, (vel pluribus in eâdem rectâ) aut etiam ipſâ X S rectâ, ut Axe motûs ſuſtineatur: Manifeſtum eſt, ſtante rectâ X S, adeóque omnibus in illa punctis, poſſe aliud quodvis punctum, circa hanc ut Axem, vel prorſum vel retrorſum peripheriam deſcribere, reliquáque ſimul puncta, ita ut neceſſe erit quò eandem inter ſe poſitionem retineant, moveri; ſimiles item peripherias circa eundem Axem deſcribendo.

Súntque hæc duo, vel ita ex Elementis perſpicua, vel per ſe manifeſta, ut in 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, deff. 11 Euclidis (quæ Sphæram, Conum, & Cylindrum ſpectant) quaſi pro poſtulatis ſupponantur.

Sed dico porro; Stante centro motûs M, non poſſe, niſi circa hoc rotando, moveri grave: Propter eandem, quam manere ſupponimus diſtantiam, cujus libet ſui puncti, tum ab M puncto, tum à ſui quovis alio. Per def. Centri motûs.

Item; Stantibus X, S, punctis; non poſſe alias quam circa hanc rectam rotando (ut circa Axem) moveri. Quippe omnia ejuſdem X S rectæ puncta, eodem ſitu manere certum eſt; (ſecus enim non poſſent eandem quam priùs ab utroque diſtantiam retinere:) Quæque extra hanc rectam puncta, ſi aliter moveantur quam circulos circa X S axem deſcribendo, non retinebunt eandem ubique tum ab X tum ab S diſtantiam; (quod ex Elementis Sphæricis facilè conſtabit.) Et, niſi ſimul ita moveantur omnia (hoc eſt, niſi totum grave circa X S axem rotetur) non eundem inter ſe ſitum conſervabunt; (quod ſupponitur.) Non igitur alias quam ſic rotando movebitur.

Denique: Si tribus punctis, ut X S A (nedum pluribus) non in eâdem recta, ſuſtineatur: Non movebitur. Cum enim, ſtantibus X S, non poſſe aliter, quam rotando circa X S ut Axem, moveri grave, jam oſtenſum ſit: non poſſe autem ſic moveri, ſtante etiam (extra hanc rectam) puncto A; (utpote quod, cùm extra Axem ſit, non à reliquis moti punctis omnibus, niſi & ipſum ſimul moveatur, eandem diſtantiam retinebit, quod Rotationis definitio poſtulat:) non omnino movebitur.

SCHOLIUM.

INtelligitur Propoſitio, de Gravi (ſeu gravium Aggregato) duro & conſtante; eouſque ſaltem conſtante, ut, ea quæ adhibetur Vi, nec frangatur, nec luxetur aut incurvetur; quin eandem (ſaltem æquipollentem)

tem) retineat figuram omniúmve ipsius partium inter se positionem respectu totius, utcunque situm seu positionem respectu loci mutent: Non de Gravi fluido seu molli, quod promiscue incurvetur, vel figuram suam mutet, partiúmque inter se positionem. Quod & in aliis subinde propositionibus intelligendum erit.

Puncta vero, ut M, X, S, &c. quibus sustineri intelligitur grave, adeóque immotis illis, moveri; sive sint in ipso Gravi, sive extra, perinde est. Sed utcunque ita cum Gravi quod movetur quasi connecti intelligenda sunt, tanquam ipsius puncta essent; & eandem cum reliquis Gravis punctis positionem retineant, utcunque moveatur Grave.

Puncto autem (uno vel pluribus) sustineri dicetur illud Grave, quando (retentâ suâ ad Gravis partes singulas positione) loco suo minimè dimoveri intelligatur punctum illud, seu plura puncta.

Denique; Quod, de Gravium Aggregato (dum ita, ut dictum est, connecti intelligantur) tanquam pro uno Gravi habendo; hic insinuamus: idem in sequentibus intelligendum erit. (Quippe & Gravium Aggregatum, Grave est.) Quod semel moneo; ne singulis identidem propositionibus repetere opus sit.

PROP. II.

Si rectâ quâvis, ut Axe Motûs, ad Horizontem perpendiculari sustineatur grave; in nullam partem gravitate suâ præponderabit; Adeòque, sibi sic permissum non movebitur.

Fig. 87. NAm, stante rectâ, ut X S, ad Horizontem perpendiculari (adeóque ipsius punctis omnibus eodem situ manentibus;) quodcunque, extra hanc, punctum moveatur, ut A, peripheriam describet, ut A α, circa X S ut Axem (per præced.) adeóque in Horizontali plano: (Cum enim X S perpendicularis sit, tum ad planum circuli, utpote cujus Axis est; tum ad Horizontem, ex hypothesi; erit circuli planum illud Horizontale, per 14 El. 11.) In quo quidem plano cum nullus sit Descensus, aut Præponderatio; nec fiet, ob gravitatem, motus. (per 4, 9, 23, cap. 2.) Cúmque de omnibus gravis punctis perinde constet, constat de Gravi toto; Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

REctâ verò sustineri dicetur Grave, si duobus saltem ipsius punctis sustineatur; quippe sic tota recta eodem situ retinebitur; ut ad prop. præced. ostensum est.

PROP. III.

Si Grave rectâ quâvis, ut motûs Axe, non ad Horizontem perpendiculari, sustineatur; sitque in Plano per Axem Motûs incedente constitutum, ad Horizontem recto; (quod, *Perpendiculare planum per Axem*, dicimus;) in neutram partem præponderabit; Adeóque sibi sic permissum, non movebitur.

Sin extra illud Planum constitutum sit; ad Planum illud, infra motûs Axem feretur.

PEr XS motûs Axem (vel Horizonti parallelum, vel utcunque obliquum) incedat Planum Horizonti rectum XSA, in quo intelligatur constitutum Grave. Erit quodcunque Gravis punctum vel in ipso Axe, ut M; vel infra, ut B; vel supra Axem, ut A. Fig. 88, 89.

De puncto M, manifestum est, stante XS, ipsum M item stare; utpote quod est in ipsâ XS rectâ.

De B, constat; Cum enim (per 1 hujus) non possit B moveri, stante XS, quin peripheriam rotando describat, ut BNA; ad cujus planum rectus est XS Axis; Cujus quidem Peripheriæ punctum infimum est ipsum B (per 20 Cap. 2.) Inde non movebitur sponte suâ: Quippe Grave (per def. Gravitatis) non nisi Descensûs Ergò, gravitate suâ movebitur.

Idem denique, de A constat: Quippe cum non possit A moveri (per 1 hujus) nisi peripheriam, ut ANB, circa XS ut axem describendo; cujus (per 20 Cap. 2.) tum supremum punctum est ipsum A, tum Descensus utrinque pariter Declivis; in neutram partem feretur. per 8, 17 Cap. 2.

Cúmque hoc constet de singulis Gravis punctis, sive infra, sive supra, sive

five in ipſo Axe; conſtat de Gravi toto, ſic conſtituto, in neutram partem præponderare; adeóque nec motum iri. Quod erat propoſitum.

Sin extra hoc planum conſtitutum ſit Grave: ipſius puncta ſingula, quæ extra planum ſunt, ut N; intermedia erunt, in ſuis reſpectivè peripheriis, inter punctum ſupremum, ut A, & infimum ut B (per 10 Cap. 2.) adeóque deorſum ad B feretur, per 2, 8, Cap. 2. Quod erat ultimò demonſtrandum.

PROP. IV.

Si circa rectam quamvis, ut Axem, (ſive Horizontalem, ſive utcunque obliquum,) rotetur Grave; eâ ratione ponderant ipſius puncta ſingula æqualiter gravata (aut illis applicata pondera æqualia) quâ diſtant à Perpendiculari per Axem Plano.

Adeóque: Si inæqualiter gravata; in ratione ex Ponderum (ſive Gravaminum) & Diſtantiarum rationibus compoſitâ.

Fig. 90. SIt primum Axis XS, in plano Horizontali; atque in eodem Horizontali plano puncta quotlibet A, B, E. Unde ducantur ad Axem normales AC, BX, ES: (quæ itaque, per def. 4 El. 3. plano per Axem perpendiculari normales ſunt, punctorum ab eo Plano diſtantias menſurantes.) Cúmque, per 1 hujus; non poſſint alias A, B, E puncta, quam rotando ferri; (circulorum peripherias Centris C, X, S deſcribendo; & quidem, propter ſitum Axis Horizontalem, ad Horizontem rectorum;) Erunt AC, BX, ES, totidem Libræ, circa ſua reſpectivè Centra C, X, S, rotatæ: Adeóque, per 12, 13, Cap. 3. A, B, E, puncta, in eodem plano horizontali poſita, æqualiter gravata ponderant in ratione diſtantiarum, AC, BX, CS: Inæqualiter verò gravata; in eâ quæ ex harum, & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propoſitum.

Deinde; Manente Axe XS, in ſitu Horizontali; (quò plana circulorum rotatione factorum, ſint adhuc ad Horizontem recta:) Sint, extra planum Horizontale, puncta Gravis quotlibet, α, β, ϵ: (ſive in eodem

eodem, ſive diverſis Planis, perinde eſt :) Unde, ad Planum Horizontale ducantur perpendiculares; puta αA, βB, εE. Intelligatur autem, per ipſum Axem XS, erigi Planum ad Horizontem perpendiculare; atque ad hoc perpendiculares rectæ, $\alpha\kappa$, $\beta\xi$, $\varepsilon\sigma$; vel his æquales (utpote parallelæ parallelis terminatæ) AC, BX, ES. Oſtendetur (ex prop. 18. cap. 2. vel 4, 13 cap. 3.) tantundem ponderare eadem pondera in α, β, ε, atque in A, B, E,. Hoc eſt; (per jam demonſtrata) in ratione diſtantiarum AC, BX, ES, vel $\alpha\kappa$, $\beta\xi$, $\varepsilon\sigma$, ſi Puncta ſint æqualiter gravata; vel, ſi inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum rationibus componitur. Quod erat propoſitum. Fig. 91.

Denique: Sit ſitus Axis ad Horizontem utcunque obliquus: Reliquáque, ut prius, conſtructa. Nempe, in eodem XSABE plano Inclinationis, rectæ AC, BX, ES, Axi ad angulos rectos; in quas ſcilicet cadunt, à punctis α, β, ε, demiſſæ Perpendiculares ad idem Planum, αA, βE, εE. Similiter omnino procedet demonſtratio, niſi quod Circuli rotatione deſcripti, qui prius erant ad Horizontem recti, nunc fiant obliqui; adeóque propter planorum Obliquitatem, minuuntur Ponderum Momenta. Eſt autem, propter eundem omnium axem, eadem circulorum omnium Obliquitas; Adeóque in eâdem ratione minuuntur Ponderum Momenta, per 26 Cap. 2. Quam itaque rationem inter ſe haberent Momenta Ponderum in A, B, E, α, β, ε, in erectis circulis; eandem & hic habebunt in circulis æqualiter inclinatis (per 5 cap. 1.) Hoc eſt (per jam demonſtrata) in ratione diſtantiarum à Perpendiculari per Axem Plano, ponderabunt, ſi ſint æqualiter gravata; vel, ſi inæqualiter, in ratione quæ ex harum & Ponderum, rationibus componitur. Quod erat ultimò demonſtrandum.

Brevi. Summa Demonſtrationis huc redit. Cùm quæ ad prop. 12 & 13 cap. præced. Ponderationum Rationes traduntur, in hanc univerſalem propoſitionem conſpirent, *Æqualia Pondera, circa axes æqualiter inclinatos, ponderare in ratione diſtantiarum à plano per Axem Perpendiculari; Et, Inæqualia, proportionaliter:* (Quæcunque ſit vel Axis, vel Libræ ad Horizontem poſitio; &, ſive per Centrum Motûs tranſeat Libra, ſive ſecus; item, ſive ſint ad eandem vel diverſas Libras, ſive in eodem vel diverſis Planis librentur:) Conſtat propoſitum, de quocunque Axis ſitu, non ad Horizontem recto; & de quocunque Punctorum ad Axem ſitu. Quod erat demonſtrandum.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

DE Situ vero Axis ad Horizontem recto, non agit hæc Propositio, (ut neque sequentium aliquot:) Quoniam, hoc casu (propter rotationum circulos Horizonti parallelos) nulla erit cujusvis puncti utcunque gravati, ad motum circa axem propensio, seu Ponderatio: ut dictum est, Prop. 2. hujus.

PROP. V.

Si Perpendiculare Planum, per motûs Axem, incedens, secet Grave in partes invicem æquiponderantes: (Hoc est; Si Perpendiculare Planum per Axem sit Planum Æquilibrii:) Non movebitur, sibi sic permissum, Grave.

Sin Segmentorum alterum, reliquo præponderet; (dummodo non sit Axis motûs, ad Horizontem perpendicularis:) Eà feretur; eatenus donec fiat Æquilibrium. Et simul utraque æquipollent excessui præpollentis.

Adeóque; Non erunt, ejusdem gravis (aut Aggregati gravium) duo Æquilibrii Plana invicem parallela.

Fig. 92. DE Axe motûs ad Horizontem recto; constat propositum; ex 2 hujus.

De Axe motûs non ad horizontem recto; sic demonstratur.

Si perpendiculare planum per XS motûs axem, dividat Grave in segmenta A, B: horum utraque (gravia cum sint, & extra perpendiculare planum posita) hac illac Descensum molientur (per 3 hujus;) Et quidem utrumque (propter rotationem circa XS axem, per 1 hujus) cum Ascensu contrarii; adeóque contraponderabunt: Si itaque æquiponderant: contrarii conatus æquales, se mutuò sustinebunt; nec fiet motûs. Si alterum præponderet: hoc reliquum superabit; adeoque motus horsum fiet, donec Æquilibrio impediatur (per 12 cap. 1.) Duoque simul conatus contrarii: æquipollebunt excessui præpollentis (per 8 cap. 1.) Quæ demonstranda erant.

Atque

Atque hinc ſequitur: (Quod etiam ante demonſtratum eſt, ad prop. 20. cap. præced.) Non dari, ejuſdem gravis (aut aggregati gravium) duo parallela Plana Æquilibrii. Nam ſi Planum per X S ſit Planum Æquilibrii; huic Parallelum, puta per Y T, non erit. Nam (poſitis utriſque ad horizontem perpendicularibus) ſi ſegmenta X S A, X S B, æquiponderant; ſegmenta Y T A, Y T B, non æquiponderabunt. Nam X S T Y interſegmentum, æquiponderantium uni ablatum, alteri additum, momenta faciet inæqualia; per 9 cap. 1. Saltem, ſi interſegmentum illud nullum ſit (ſed quaſi vacuum, inter duo connexa Gravia interjectum;) fiet utcunque ſegmentorum alterum, ut X S B, longius ab Y T quam ab X S; propius autem alterum Y T A: Adeoque illius momentum augebitur, hujus minuetur (per 13 cap. 3) & deſtruetur Æquilibrium, per 9 cap. 1. Fig. 93.

SCHOLIUM.

PLana Perpendicularia, *Parallela*, hic appello (& ſubinde aliàs, ubi eadem ratio) quando Horizontales Rectæ unius, ſunt alterius Rectis Horizontalibus, parallelæ. Quamquam enim, perpendicularia cum ſint Plana, in Terræ centro coeant; eâdem tamen ratione (ne longâ periphraſi opus ſit) Parallela Plana dicentur, quà Perpendicula (propter immenſam Centri terræ diſtantiam) pro Parallelis Rectis haberi ſolent.

PROP. VI.

Si rectâ quâpiam, ut Axe, non ad Horizontem perpendiculari, ſuſtentum Grave, quieſcet: Idem Grave, eodem ſitu conſtitutum, aliâ quâvis ejuſdem ad Horizontem perpendicularis Plani rectâ ſuſtentum, pariter quieſcet. Rectâ verò extra hoc Planum, plano Parallelâ (non ad Horizontem rectâ) ſi ut Axe ſuſtineatur: non, eo ſitu conſtitutum, quieſcet.

PUtà: Si A B Grave, Axe X S (non ad Horizontem recto) ſuſtentum, quieſcet: Perpendiculare Planum per hunc incedens, ut Y X S T, grave dirimet in A, B, ſegmenta, invicem æquiponderantia: Fig. 94.

(Nam

(Nam si alterutrum præponderaret, non quiesceret Grave; per præced.) Sumptâ igitur aliâ quâvis in eodem Plano rectâ, ut YT: quum per hanc incedens Planum YXST (ut jam ostensum est) secet Grave in partes invicem æquiponderantes: Axe YT sustentum, sic constitutum Grave, quiescet. per præced.

Sin aliâ quâvis, extra hoc Planum, rectâ (quæ Plano parallela sit, & non ad Horizontem recta) ut Axe, sustineatur: non, eo situ, quiescet. Quippe, si quiesceret hac aliâ rectâ sustentum; esset, per hanc incedens perpendiculare Planum, Planum Æquilibrii; (nam, nisi æquiponderarent segmenta, non quiesceret; per præced.) Estque plano priori parallelum; (quod, propter parallelam plano per quam incedit rectam, non ad horizontem perpendicularem; &, quem supponimus, Perpendiculorum parallelismum; probabitur ex 15 El. 11.) Adeóque, duo essent parallela Plana Æquilibrii. Quod (per præced.) fieri non potest.

PROP. VII.

Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, quiescet.

Et contra; Si Axe motûs sustentum Grave, quocunque situ ponatur quiescet: Axis ille motûs, est Axis Æquilibrii.

NAm; Si Æquilibrii Axe sustineatur Grave; quocunque situ ponatur Grave; (nempe; quocunque ad Horizontem situ ponatur Axis ille; & quodcunque Planum per hunc motûs Axem, constituatur ad Horizontem rectum:) Perpendiculare Planum per Axem, Planum erit æquilibrii: (per def. Axis Æquilibrii.) Adeóque non movebitur, sibi sic permissum Grave; per 5 hujus.

Conversa similiter patet. Nam, nisi motûs Axis ille, sit Axis Æquilibrii; erit saltem aliquod Planum per hunc incedens, quod Planum Æquilibrii non erit (per def. Axis Æquilibrii.) Adeóque, posito hoc Axe non in situ ad Horizontem recto; positoque illo non Æquilibrii Plano, in situ perpendiculari; Movebitur Grave: per 5 hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP. VIII.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: quocunque situ ponatur; saltem unum per punctum illud incedens Perpendiculare planum, est planum Æquilibrii.

Adeóque; Per omne Gravis Punctum incedit aliquod Æquilibrii Planum.

SIt XASB Grave; puncto sui M sustentum; per quod transeat Perpendiculum AMB; perque hoc incedat AMBN perpendiculare Planum. Erit hoc AMBN, vel Planum Æquilibrii (adeóque habetur quod erat probandum;) vel segmentum alterum, puta ABNS, præponderabit. Quo casu; Planum AMBN (cujus faciem alteram, puta quæ S respicit, Anteriorem dicemus; alteram, Posteriorem;) intelligatur, immoto Gravi, imaginatione converti circa AMB axem; donec eo perveniatur ut quæ utrinque sunt segmenta Gravis Æquiponderent. Hoc enim omnino fore certum est: Quippe, factâ semi-conversione, quod erat ab anteriore conversi Plani facie, à posteriore relinquetur, segmentum Gravis præponderans; & contra: Cúmque à præponderantiâ anticâ ad posticam sic continuo motu perventum sit; eo momento quo ab hac ad illam transibatur, neutra erat; sed, æquiponderantia. Quódque cum converso Plano, hoc situ posito, coincidit immotum, per Grave, Planum; est Perpendiculare Planum Æquilibrii. Fig. 88.

Unde & constat Corollarium. Quippe quovis sui puncto sustentum intelligi possit Grave.

PROP. IX.

Si unico sui puncto sustineatur Grave: Per illud incedens Perpendiculare Planum Æquilibrii, manebit Horizonti rectum.

Ideoque; vel quiescet grave; (nempe si perpendiculum per centrum motûs, seu punctum illud quo sustinetur grave, sit Perpendiculum Æquilibrii istius Plani sic gravati.)

Vel (si perpendiculum illud non sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani) rotabitur circa Horizontalem Axem Plano illi rectum, per centrum motûs seu punctum illud quo sustinetur Grave transeuntem; donec ad Æquilibrium redigatur.

Sin Planum aliquod Perpendiculare, non sit Planum Æquilibrii: Segmentum præponderans descendet (adeoque obliquabitur Planum;) donec ad Æquilibrium redigatur.

Unde; Si duo quævis per idem punctum plana perpendicularia sint Plana Æquilibrii: etiam reliqua sic erunt: eritque Perpendiculum per illud Punctum, Axis Æquilibrii.

Fig. 88. PEr punctum M, quo sustineri intelligatur Grave, transeat recta XS recta Horizontalis, quæ pro onusta Libra habeatur; tum huic ad angulos rectos AMBN Perpendiculare planum per Axem, Grave dirimens in duo segmenta AMBX, AMBS; quibus respective onerantur MX, MS, libræ brachia, per 13 cap. 3.

Cumque (per præced.) ex Perpendicularibus per M planis, saltem unum aliquod sit Planum Æquilibrii: Intelligatur, primo, illud AMBN planum Æquilibrii; adeoque (per def. Plani Æquilibrii) AMBX, AMBS, segmenta invicem Æquiponderantia. Erit igitur M (per def. 13. cap. 3.) centrum Æquilibrii. Quo cum (ex hypothesi) sustineatur Libra, in neutram partem movebitur, per 7 vel 10 cap.

cap. 3. Adeoque nec obliquabitur A M B N, sed manebit (ut prius) Horizonti rectum. Quod erat primo demonstrandum.

Adeoque; vel non movebitur Grave, vel circa manentem X M S axem rotabitur, per 1 hujus. Illud quidem; si A M B sit Perpendiculum Æquilibrii istius plani A M B N sic gravati (sive A M S B X perpendiculare planum Æquilibrii per axem X S;) Hoc, si secus (puta si segmentum alterum, ut A M B N præponderet;) per 5 hujus. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin A M B N perpendiculare planum aliquod per M, non sit planum Æquilibrii; hoc est, si segmentum alterum præponderet, puta A M B S, quo gravatur M S Brachium:. Descendet hoc (adeoque obliquabitur A M B N planum) donec ad Æquilibrium redigatur (per 5 hujus, vel 5 cap. 3.) Quod erat item demonstrandum.

Si itaque duo Plana per idem M punctum Perpendicularia, ut A M B N, A M S B X, sint utraque Æquilibria Plana, etiam reliqua per illud punctum perpendicularia plana erunt item plana Æquilibrii (adeoque A M B, axis Æquilibrii.) Cum enim propter Æquilibrii Planum A M B N, non moveatur grave nisi rotando circa illius plani axem; & simili de causa, non nisi circa axem plani A M S B X; (quidem Axes, cum suis respective planis perpendiculares esse debeant, non erunt eadem recta;) non omnino movebitur grave (propter tria saltem, non in eadem recta, puncta permanentia) per 1 hujus. Sed (per præcedens membrum hujus) si quod sit ex perpendicularibus planum, quod non sit planum Æquilibrii, movendum esset Grave: Nullum igitur est. Quod ultimo erat demonstrandum.

PROP. X.

Si Perpendiculum per Centrum motûs, sit Axis Æquilibrii; sibi permissum Grave, non movebitur.

Rectáque illa, quæ si sit Perpendiculum per Centrum motûs, Grave non movebitur; est Axis Æquilibrii.

Cum enim (per def. Axis Æquilibrii) quodvis per illum transiens Planum, sit Planum Æquilibrii: Si Axis Æquilibrii sit in Perpendiculo per Centrum motûs; quodvis per centrum motûs incedens

Perpendiculare Planum, est Planum Æquilibrii. Adeóque sponte sua non movebitur sic sustentum Grave; per præced.

Et Conversa similiter patet. Nam nisi Perpendiculum per Centruum motûs sit Axis Æquilibrii; aliquod saltem per illud incedens Planum, non erit Planum Æquilibrii (per def. Axis Æquilibrii:) Adeoque Grave movebitur; (per præcedentem.) Quod est contra Hypothesin.

PROP. XI.

In quovis Æquilibrii Plano, per quodvis ipsius Punctum, incedit Axis aliquis Æquilibrii.

Adeóque, per omne Gravis punctum incedit aliquis Axis Æquilibrii.

Fig. 88. EXpositum Æquilibrii Planum, ut A M B N, intelligatur in situ ad Horizontem recto constitutum. Ejúsque puncto quovis, ut M, sustineatur Grave Quod itaque (per 9 hujus) non nisi rotando circa Axem plano illi rectum, ut X M S, movebitur. Et Perpendiculum per Centrum motûs, ut A B, erit vel perpendiculum Æquilibrii illius Plani sic gravati: Vel, eatenus circa X M S rotabitur grave, donec hoc contingat; & sic positum, sibi permissum Grave quiescet. per eandem 9 hujus. Eaque Gravis recta, quæ, sic quiescente Gravi, in A M B perpendiculo per M transeunte jacebit, est Axis Æquilibrii. per præced.

Corollarium constat: Cum (per 8 hujus) per quodvis Punctum transeat Planum Æquilibrii.

PROP.

PROP. XII.

Si à puncto fixo libere dependens Grave, unico sui puncto, ut Centro motûs sustineatur: Non priùs quiescet quam illud sui punctum sit in eodem perpendiculo cum puncto fixo; Planúmque quodvis per illud perpendiculum incedens, grave dirimat in partes invicem æquiponderantes.

In eo verò situ constitutum (nempe, cum Perpendiculum appensionis, est Axis Æquilibrii;) sibi sic permissum, quiescet.

Si verò, posito Gravi in hoc situ quietis; solvi intelligatur in gravi vinculum, illudque alio jam sui puncto sustineri; Sítque hoc aliud punctum in eodem quo priùs Axe Æquilibrii; quiescet adhuc sic situm Grave.

Sin extra illum Æquilibrii Axem sit hoc aliud Punctum; non, eo situ, quiescet.

Adeóque; Non erunt, ejusdem Gravis, duo Æquilibrii Axes invicem paralleli.

A puncto F liberè dependens, puncto sui X sustineatur AXB grave. Non priùs inquam, quiescet, quàm ipsum X punctum sit in FX perpendiculo: quod &, ibi, positum, consistet. Cùm enim unico X puncto sustineatur Grave (quod itaque punctum totius onere gravatur, per 18 Cap. 1.) si extra perpendiculum sit, eo feretur: ibique constitutum, consistet X punctum sic gravatum. per 31 Cap. 2. Fig. 95

Sin, posito X puncto in perpendiculo F X, per quod incedet Planum aliquod Perpendiculare, dirimens expositum Grave in A, B, duo segmenta inæqualiter ponderantia: nondum quiescet Grave. per 9 hujus.

Si verò ita constitutum sit, ut, Planorum perpendicularium per F X incedentium, nullum non dividat grave in partes invicem Æquiponderantes: Hoc est, si Perpendiculum illud sit Axis Æquilibrii: non movebitur sic appensum Grave. per 9 hujus.

Dico

Dico porro; Si (posito Gravi in hoc statu quietis) soluto vinculo in X, alio ejusdem perpendiculi puncto ut C, sustineatur Grave: Quiescet adhuc in eodem situ positum. Cùm enim, ex constructione, idem sit perpendiculum F X & F C; sitque F X Axis Æquilibrii; erit & F C Axis Æquilibrii. Adeóque (per 10 hujus) quiescet Grave.

Sin alio, extra hanc rectam puncto, ut Y, sustineatur; puta perpendiculo G Y (priori parallelo; saltem nonnisi in Centro Terræ occurrente. quod pro parallelo jam habemus;) non eo situ quiescet. Intelligatur enim planum quodvis Perpendiculare (aliud quam G Y X) per G Y incedens, Grave dirimens in segmenta Y T A, Y T B; & huic plano parallelum, per F X incedens, Grave dirimens in segmenta X S A, X S B. Cúmque sit ex hypothesi, illud per F X (Æquilibrii Axem) Planum Æquilibrii; non erit huic parallelum per G Y, Planum Æquilibrii (per 5 hujus:) Adeóque nec G Y, Axis Æquilibrii; (per def. Axis Æquilibrii:) Nec hujus, in perpendiculo manentis, uno puncto sustentum, Grave quiescet, per 10 hujus. Non igitur alio, extra hunc F X S Æquilibrii Axem, puncto sustentum; eodem situ constitutum quiescet. Nec erit alius Axis Æquilibrii, exposito F S parallelus. Quæ demonstranda erant.

PROP. XIII.

Si Centro Gravitatis sustineatur Grave: quocunque situ ponatur, sibi sic permissum, non movebitur.

Punctúmque illud, quo si sustineatur, Grave non movebitur quocunque situ positum; est Centrum Gravitatis.

Cum enim (per def. Centri Gravitatis) quævis per illud transiens recta, sit Axis Æquilibrii: Si sui Centro Gravitatis sustineatur Grave, quocunque situ ponatur, perpendiculum per Centrum illud motûs, erit Axis Æquilibrii. Adeóque non movebitur sic sustentum Grave. per 10 hujus.

Et conversa similiter patet. Nam, nisi Punctum illud (quo, ut Centro Motûs, sustinetur,) sit Centrum Gravitatis; aliqua saltem per illud incedens recta, non erit Axis Æquilibrii (per def. Centri Gravitatis) Adeóque, positâ hac rectâ ad Horizontem perpendiculari non quiescet unico illo puncto sustentum Grave. per 10 hujus. Quod est contra hypothesin.

PROP.

PROP. XIV.

In Æquilibrii Axe quovis; eſt Centrum Gravitatis. Nempe; illius Axis, ut Libræ conſiderati, Centrum Æquilibrii.

Cum Æquilibrii Axe, ut XS, ſuſtentum Grave, quocunque ſitu poſitum, quieſcet (per 7 hujus;) Adeóque totum Gravis onus ſuſtineat Axis ille (per 18 Cap. 2. vel 2, 4, 18, Cap. 3.) Intelligatur XS recta, ſic onuſta, ſecundum Libræ longitudinem applicari; vel ipſa etiam, pro Librâ cenſeatur. Hujúſque ſic onuſtæ Libræ, quæratur (per 20 Cap. 3.) Centrum Æquilibrii. Quod ſit C. Dico C, Centrum Gravitatis eſſe, totius Gravis. Fig. 95.

Cum enim idem C punctum, in quocunque Gravis ſitu, ſit illius (ſive Axis ſive Libræ) XS, Centrum Æquilibrii; (quod ſtatim demonſtrabitur:) Manente puncto C, non movebitur XS recta. per 7 Cap. 3. Si itaque C puncto, ut Centro Motûs, ſuſtineatur Grave: Neque circa manentem rectam XS (utpote quæ eſt Axis Æquilibrii) rotabitur; Neque (propter C, centrum Æquilibrii) movebitur Axis ille: (quæ jam oſtenſa ſunt:) Nec poteſt alias moveri Grave; (per 1 hujus.) Adeóque, puncto C ſuſtentum, ſponte ſuâ non movebitur, quocunque ſitu conſtitutum Grave. Eſtque propterea, Punctum C, Centrum Gravitatis; (per præced.) Quod erat demonſtrandum.

Quod autem idem C punctum, ſit, ejuſdem axis Æquilibrii XS, Centrum Æquilibrii, quocunque ſitu conſtituatur Grave: Sic oſtenditur.

Sit primùm, ita utcunque conſtitutum Grave, ut expoſitus æquilibrii Axis XS, ſit in ſitu Horizontali conſtitutus. Per ipſius, ut onuſtæ libræ, Centrum Æquilibrii C, tranſeat Axis libræ; qui itaque ad libram XS normalis erit; & quidem in ſitu Horizontali; (cùm enim intelligatur XS libra unico ſui puncto C, ut centro motûs, ſuſtineri, adeóque ad nullam axis poſitionem aliter quàm gravitate ſuâ determinari, librabitur in plano ad Horizontem recto, utpote omnium maxime declivi; adeóque circa axem Horizontalem; ut in Scholio Prop. 12. Cap. 2. dictum eſt:) atque per hunc axem perpendiculare Planum ACP; quod

quod itaque (propter C centrum æquilibrii, ex constructione) est æquilibrii Planum perpendiculare per axem motus, grave dirimens in duo segmenta A B X, A B S, invicem æquiponderantia. Atque hoc eo usque saltem permanebit, utcunque moveatur grave, dum idem gravis planum X A S Horizontale maneat (puta, vel rotato utcunque circa Perpendiculum per C Gravi, vel etiam altius humiliusve elevato aut depresso :) per 13 Cap. 3. Quippe eadem adhuc manebit omnium tum ad Horizontem inclinatio, tum ab ACB perpendiculari per axem plano distantia.

Deinde ; Manente ut prius, X S axe utcunque in situ Horizontali : intelligatur utcunque circa illum rotari Grave, in quemcunque situm ad axem (nempe ut quodlibet planorum, per X C S transeuntium, perpendiculare fiat :) Dico, etiamnum idem A C B planum, planum esse æquilibrii ; adeoque C, ut prius, æquilibrii Centrum. Cum enim omnia utriusque segmenti puncta, in planis ipsi A C B parallelis rotentur ; Manebunt adhuc in eâdem quâ prius ab A C B, perpendiculari per axem motus, distantiâ : Adeoque in eâdem quâ prius ratione ponderabunt ; per 4 hujus, vel 13 Cap. 3. Cum itaque prius, respectu A C B plani, æquiponderabant segmenta A B X, A B S ; etiamnum æquiponderabunt. Eritque propterea, C, ut prius Centrum æquilibrii.

Denique ; Quocunque Planorum per X S transeuntium, manente ad horizontem recto ; Intelligatur X S libra utcunque ad Horizontem inclinari : Dico etiamnum idem C punctum, esse libræ X S centrum Æquilibrii.

Fig. 97. Ne autem, propter Solidi in Plano repræsentationem, linearum multitudo ducendarum, turbet phantasiam ; eâ projectione in figurâ utor, quæ oculum supponit in ipso motûs axe per C transeunte, atque in distantiâ infinitâ. Et propterea, tum axis ille in unicum C punctum projicitur ; tum Rectæ quævis huic parallelæ, in totidem respective puncta : Planáque per axem omnia, in totidem rectas ; in ipso XC, C B S per libram Plano perpendiculari. Quæ quidem Projectio, ut Phantasiam juvat, ita nec Rationes perturbat : Quoniam (per cas. prop. 14. cap. 3.) perinde omnino ponderat (respectu C axis) quodcunque ejusdem rectæ (puta per D transeuntis) axi parallelæ, punctum intelligatur grave. Eadem utique est singulorum ejusdem punctorum ab A C B perpendiculari per axem Plano distantia, atque ipsius D ab A C B perpendiculo.

Intelligatur itaque, utcunque circa C rotato Gravi, X C S Libra (& simul Planum libræ per axem) ex situ Horizontali in situm ξ C σ utcunque

utcunque ad Horizontem inclinatum delata: Cui respondeat, in eodem Perpendiculari plano, in situ Horizontali, X C S; hujúsque punctis D, E, F, &c. puncta illius *d*, *e*, *f*, &c. Intelligatur autem Grave totum ex partibus (æqualibus an inæqualibus, pluribus an paucioribus, adeoque numero finitis an infinitis, perinde est) puta tribus L, M, N, constare; (& quidem, vel in ipsis perpendicularis plani punctis L, M, N; vel in L, M, N, rectis, axi parallelis, utcunque positis, dummodo sit X C S axis æquilibrii,) ad libræ puncta, in situ horizontali positæ, D, E, F, applicatis; ut quæ (per 4 cap. 2. & cas. 4. prop. 4. ejusdem) similiter ponderent ac si in ipsis D, E, F, punctis intelligantur. Delatâ vero librâ X C S, in Ξ C Σ; delata simul erunt (propter rotationem totius gravis) D, E, F, L, M, N, puncta ponderaque, in *d*, *e*, *f*, *l*, *m*, *n*. Erit, inquam, adhuc A C B perpendiculare planum æquilibrii per axem; adeoque C centrum æquilibrii. Fig. 9.

Nam, translatis D, E, F, punctis, in *d*, *e*, *f*, minuentur quidem horum (propter obliquationem libræ) ponderationes (per 13 cap. 2.) Sed in eadem ratione minuentur; adeóque, quod prius erat æquilibrium etiamnum manebit (per cas. 1. prop. 14. cap. 2.) si ad eadem quæ prius libræ puncta D, E, F, hoc est *d*, *e*, *f*, applicata maneant pondera L, M, N, hoc est *l*, *m*, *n*.

Cum autem; pro ponderum *l*, *m*, *n*, infra supráve libram fixâ positione; motâ librâ mutentur applicationum puncta, puta, ex *d*, *e*, *f*, in δ, ε, φ; adeóque mutetur ponderationum ratio; (per cas. 3. prop. 14. cap. 3.) Ponderum *l*, *m*, quæ supra libram fixa intelliguntur, ponderationibus sinistrorsum auferendum aliquid; addendum vero ponderationi sinistrorsum ponderis *n* infra libram fixi; (nempe, prout in præsenti schemate ponuntur; & similiter, mutatis mutandis, in quacunque sive obliquationis libræ, sive ponderum ad obliquatam libram positione.) Sunt autem Addenda illa vel Auferenda (per 17 cap. 3.) in eâ ratione quæ componitur ex ratione Ponderum *l*, *m*, *n*; & ratione rectarum *d*δ, *e*ε, *f*φ, hoc est (propter similia triangula *l d* δ, *m e* ε, *n f* φ) rectarum *d l*, *e m*, *f n*: Adeóque in eâ ratione quâ ponderarent eadem pondera circa axem Ξ C Σ libranda; per 13 cap. 3. Adeóque (per 12 El. 5.) in eâdem ratione est summa Auferendorum ponderationibus *l*, *m*; ad Addendum Ponderationi *n* (vel summam addendorum, si plura essent;) quâ esset ponderum *l*, *m*, circa axem Ξ C Σ ponderatio; ad ponderationes ponderis *n*, circa eundem axem. Adeóque cum sint Ponderationes hæ (propter X C S vel Ξ C Σ axem Æquilibrii, ex hypothesi) invicem æquales; etiam Addenda Auferendis sunt æqualia: adeóque perinde simul valent, atque si nihil vel adderetur vel auferretur,

per 8 cap. 1. (Quodque de Auferendis Addendisve ponderationi sinistrorsum dictum est, perinde est atque si de Addendis Auferendis ponderationi dextrorsum diceretur: quippe idem valet, plus ad dextram, atque, minus ad sinistram.) Cùm itaque; applicatis ponderibus *l*, *m*, *n*, ad puncta *d*, *e*, *f*, esset A C B planum Æquilibrii per axem, supra ostensum est, (adeóque simul omnium ponderatio, nulli in utramvis partem æquipolleret;) & C centrum Æquilibrii: Erit similiter idem C, centrum æquilibrii; ponderibus ut nunc applicatis ad puncta δ, ε, ϛ.

Est igitur idem C punctum, æquilibrii Centrum, axis æquilibrii X C S, quocunque situ constituatur Grave. Quod demonstrandum suscepimus.

SCHOLIUM.

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +D & -3D \\ \hline \end{array}$$

$$+6DP + 3DP - 9DP = \pm 0DP.$$

$$+6dP + 3dP - 9dP = \pm 0dP.$$

Exempli gratiâ. Si intelligatur pondera L = 1P. M = 3P. N = 3P. Distantia vero CD = +6D. CE = +1D. CF = -3D. Erit Ponderum ad libræ XC puncta D, E, F. applicatorum ponderatio respectu axis C; ut P × +6D = +6DP. 3P × +1D = +3DP. 3P × -3D = -9DP. Adeóque simul omnium, ut +6DP + 3DP - 9DP = ±0DP. (Atque id ex constructione; ponitur enim C, centrum Æquilibrii.)

Et similiter (diminutis in eâdem ratione omnium ponderationibus propter obliquationem libræ, puta in ratione *d* ad D) eorundem ponderum ad libræ ΞCΣ puncta *d*, *e*, *f*, applicandorum ponderationes, erunt +6*d*P + 3*d*P - 9*d*P = ±0*d*P.

$$\begin{array}{ccc} P & 3P & 3P \\ +6D & +3D & -5D \\ \hline \end{array}$$

$$+6DP + 9DP - 15DP = \pm 0DP.$$

$$+6\delta P + 9\delta P - 15\delta P = \pm 0\delta P.$$

Eorundem vero Ponderum a Plano per Axem X C S vel ΞCΣ distantiæ; puta rectæ DL, EM, FN; vel *d l*, *e m*, *f n*; sint -+6D, -+3D, -5D; & his proportionales (puta in ratione δ ad D) *d* δ, *e* ε, *f* ϛ, +6δ, +3δ, +5δ. Adeóque eorundem Ponderationes ad axem X C S, vel ΞCΣ; ut +6DP + 9DP - 15DP = ±0DP. (Idque, ex hypothesi; supponitur enim X C S, axis æquilibrii.)

Atque (his proportionales) ponderationes auferendæ +6δP +9δP - 15δP = ±0δP.

His itaque ritè subductis (additisve respectivè) a ponderationibus prius positis, tanquam in d, e, f, punctis; prodibit Æquilibrium, sive $\pm 0\, dP \mp 0\, \delta P = \pm 0\, 0$.

Verbi gratiâ; Si ponamus d ad δ, ut 3 ad 1; vel, ut 1 ad $\frac{1}{3}$; Ex $+6dP+3dP-9dP$, subductis $+6\delta P+9\delta P-15\delta P$, hoc est, $+2dP+3dP-5dP$; manebunt $+4dP \pm 0dP-4dP=\pm 0dP$.

$$\begin{array}{l} +6dP+3dP-9dP=\pm 0dP \\ -2dP-3dP+5dP=\mp 0dP \\ \hline +4dP\pm 0dP-4dP=\pm 0dP \end{array}$$

Si ponamus d ad δ, ut 3 ad 2, vel, ut 1 ad $\frac{2}{3}$: Ex $+6dP+3dP-9dP$, subductis $+6\delta P+9\delta P-15\delta P$, hoc est, $+4dP+6dP-10dP$; manebunt $+2dP-3dP+1dP=\pm 0dP$.

$$\begin{array}{l} +6dP+3dP-9dP \\ -4dP-6dP+10dP \\ \hline +2dP-3dP+1dP=\pm 0dP. \end{array}$$

Adeóque; Utut ea Portio quæ dextrorsum ponderabat prius vel sinistrorsum; motâ librâ, vel in neutram partem, vel in oppositam ponderet: non tamen destruitur, simul-omnium æquilibrium.

P R O P. XV.

Cujusque Gravis, Centrum Gravitatis unicum est: Idque tum in omnium Axium Æquilibrii, tum in Planorum Æquilibrii omnium concursu.

Estque omne per illud transiens Planum, Planum Æquilibrii; omnísque recta transiens, Æquilibrii Axis.

INtelligatur A B Grave, puncto sui X sustentum, ex F puncto fixo libere dependens, in situ quietis positum; Hoc est, ita dependens ut FXS perpendiculum, sit Axis Æquilibrii; (per 12 hujus.) In quo itaque perpendiculo (per præced.) Est Centrum Gravitatis; Alio autem, extra hoc perpendiculum, puncto sustentum Grave, non, in eo situ, quiescet; (per eandem 12 hujus;) Adeóque, extra hoc perpendiculum, non est Centrum Gravitatis; Nam siquod esset, eo sustentum Grave, etiamnum in illo situ quiesceret, per 13 hujus. Fig. 98.

Intelligatur deinde, soluto vinculo in X alio sui extra rectam F X S continuatam puncto ut Y sustentum, ex puncto fixo ut G liberè dependens, quiescere; Adeóque (per 12 hujus) in eum situm redigi gravitate suâ, ut Axis Æquilibrii per Y transiens, (est utique aliquis, per 11 hujus,)

jus) sit in G Y perpendiculo, puta G Y T. Ostendetur, ut prius, tum in G Y T (infinita rectâ) centrum Gravitatis esse; tum, extra hanc non esse.

Cùm itaque ostensum sit, tum in rectarum (infinitarum) X S, Y T utrâque tum, non extra utramvis, esse Centrum Gravitatis; cùmque illæ non nisi in uno intersectionis puncto, ut C, communicent: unicum erit Centrum Gravitatis, C.

Est autem in Æquilibrii omni sive Axe sive Plano (per 11 & 12 hujus) centrum aliquod Gravitatis: Cum itaque unicum esse, jam ostensum sit; erit hoc unum in omnium concursu.

Quódque omnis per illud transiens recta sit Axis Æquilibrii, omneque Planum per illud transiens, Æquilibrii Planum: ex definitionibus constat.

PROP. XVI.

Manente, in eâdem à Terræ Centro altitudine, Centro Gravitatis: neque Descendere censendum est Grave, neque Ascendere.

Tantundem verò vel Ascendere vel Descendere censendum est Grave, quantum Ascendit, vel Descendit Centrum Gravitatis.

Adeoque (quoniam hoc in aliis Gravis motibus perinde obtinet) perinde Ponderando valet Grave utcunque situm, atque si in illo puncto totum esse intelligeretur, ubi est ipsius Centrum Gravitatis.

Demonstratur eodem modo, mutatis mutandis, atque 8 & 9 Cap. 3.

Fig. 99, 100. Nam, immoto C centro Gravitatis; utcunque rotetur Grave (neque enim aliter, quam rotando moveri potest, per 1 hujus) puta ut ipsius recta A C B in situm α C β deveniat: Quoniam in quocunque situ, adeóque in toto progressu, opposita segmenta, plano quovis ad Horizontem recto ut P D divisa, invicem æquiponderant; (per def. Centri Gravitatis;) Estque (propter rotationem) unius Desce-

sus cum oppositi Ascensu necessario conjunctus; Erit Ascensus Descensui æquipollens (nam sicubi alter præpollet, ea præponderabitur, per 7 Cap. 2:) Adeóque nulli vel Ascensui, vel Descensui simul Æquipollent. Per 8 Cap. 1.

Item; moto Centro C in κ, nec ascendendo tamen vel descendendo, sed in eâdem à Terræ Centro altitudine; sitque ibidem A C B recta, in situm $\alpha \kappa \beta$ translata: Atque hujus similis ad horizontem situs intelligatur, in α C β. Manifestum est, (propter æquè alta puncta C, κ; rectásque Cβ, $\kappa\beta$, æquales & similiter positas;) puncta β, β, utrobique æque alta esse. Idémque de reliquis respectivè punctis similiter ostendetur. Adeóque totum Grave in situ $\alpha \kappa \beta$, æquè altum est à terræ centro, atque in situ α C β; hoc est (per jam demonstrata) æquè altum atque in situ A C B. Adeóque nec Ascendisse nec Descendisse censendum erit.

Sin altius humiliúsve sit punctum κ, quam C; atque similiter ad horizontem sita intelligatur eadem recta in α C β, atque in $\alpha \kappa \beta$: Ostendetur (propter æquales rectas similiter positas) tantò altiora esse vel humiliora singula rectæ $\alpha \kappa \beta$ puncta, quàm puncta rectæ α C β; quantò est ipsum κ, quam C: Adeóque (cum de reliquis punctis eadem sit ratio) tantò altius humiliúsve Grave in $\alpha \kappa \beta$, quàm in α C β; hoc est, (per ante demonstrata,) quàm in A C B. Adeóque tantundem vel Ascendisse vel Descendisse censendum erit Grave, quantum Ascenderit, vel Descenderit centrum Gravitatis; per 5 Cap. 2. Quæ demonstranda erant.

Cùm igitur, per 4 Cap. 2. in eâ ratione ponderat idem Grave quâ, si moveatur, plus vel Ascensurum sit vel Descensurum: tantundem ponderando valere censendum erit; atque si ibidem totum esset Grave, ubi ipsius est Centrum Gravitatis.

SCHOLIUM.

QUæ igitur, in præcedentibus, ostensa sunt, de Punctis Applicationum, eorúmve à Centro vel aliunde distantiis; de Gravium item loco, & motibus variè declivibus; cæteráque istiusmodi: Eorum Centris Gravitatis accommodanda erunt omnia. Quippe totum Grave, hujus ope, in unico illo puncto virtualiter situm intelligatur, in quo est ipsius Centrum Gravitatis. Quódque de integris gravibus jam dictum est; de illorum Particulis quibusvis, & harum centris gravitatis;

perinde

perinde intelligendum est; Quippe & hæ Particulæ sunt totidem Gravia: Sicut & Gravium Aggregatum, pro uno Gravi habendum, cujus est & unicum commune Centrum Gravitatis.

Quæ igitur (per totum Caput 2 aut alibi) de Gravi, tanquam in uno Puncto existente; aut, ad Punctum unum Applicato, eive subjecto, vel supereminente, &c. dicta sunt: De Centro Gravitatis commodè exponuntur omnia. (Quod & obiter insinuatum est, in Scholio Prop. 3. Cap. 2.) Quippe tantundem ponderando valet Grave, utcunque positum, atque si in eo puncto totum intelligeretur, ubi est Centrum Gravitatis: aut etiam, Gravium quotlibet Aggregatum, utcunque positorum, atque si in communi simul omnium Centro Gravitatis essent.

Fig. 101, 102. Atque hinc etiam ampliandum jam erit, & aliquatenus relaxandum quod in Scholio Prop. 1. hujus definivimus: Nempe, singula totius Gravis, vel Aggregati gravium, puncta, intelligenda esse in eodem ad invicem situ permanere. Quippe, motâ utcunque Gravis parte aliqua, vel aliquot partibus, ita tamen ut earum vel singularum vel simul omnium Centrum Gravitatis maneat ut prius situm; perinde est, ponderationem quod spectat, atque si omnino permansissent in eodem situ puncta singula. Adeóque, quod hactenus demonstratum est, supponendo singula totius puncta situm suum ad invicem (atque ad motûs centrum vel axem) retinere: posthac pro demonstrato habebitur, si saltem partium Centra gravitatis, maneant ut priùs sita; aut etiam commune omnium Centrum Gravitatis similiter ad motûs centrum vel Axem situm. Puta, si A C B Grave, (motis utcunque partibus, manentibus partium centris gravitatis,) in situm α C β perveniat; perinde omnino ponderabit. Similiter; Automati rotis quotlibet utcunque circa sua centra motis, manente communi totius centro gravitatis in eodem (vel æquipollente) situ, manet eadem totius Ponderatio.

PROP.

PROP. XVII.

Si Centrum Gravitatis ſit in eodem ad terræ Centrum Perpendiculo cum Centro motûs: ſibi permiſſum Grave non movebitur.

Sin extra Perpendiculum conſtituatur; ad Perpendiculum, infra Centrum motûs, feretur: Idque (niſi aliàs impeditum) in Plano per centrum motûs, centrum Gravitatis, & Centrum Terræ tranſeunte.

Quodque de Perpendiculo dictum eſt, Perpendiculi Succedaneo accommodabitur in obliquè declivi Plano.

SEquitur ex 10 Cap. 3. Nam Centrum Gravitatis, ſaltem Æquilibrii Centrum eſt; (per eorum definitiones:) Nempe, ſi recta quævis per Centrum Gravitatis, pro Librâ cenſeatur. Fig.103.

Vel (ut ea) ſic oſtenditur.

Puta; Si Centrum Gravitatis ſit in M centro motûs; hoc manente, non deſcendet Grave; per præced. Adeóque a Gravitate non movebitur.

Si ſit in perpendiculo infra centrum motûs, ut in P: Centrum Gravitatis, (adeóque & Grave, per præced.) jam eſt in ſitu rotationis infimo, (per 20 Cap. 2.) Adeóque non, ob Gravitatem, movebitur.

Si ſit in Perpendiculo ſupra centrum motûs, ut S; adeóque in puncto ſupremo; (per 20 Cap.2.) In quaſcunque partes rotetur, æqualiter deſcenſurum eſt, (propter æqualem quaquaverſum declivitatem,) tum Centrum Gravitatis, tum (per præced.) ipſum Grave. Adeóque (per 8 Cap. 2.) non movebitur.

Sin extra perpendiculum ſit, ut in G: deorſum ad P feretur, per arcum G P, in M G P plano perpendiculari ſitum, (ut qui omnium, in ſuperficie ſphæricâ rotationem determinante, deſcenſus eſt maximè declivis,) per 24 Cap 2. Quæ demonſtranda erant.

Eademque, in obliquè declivi plano, de perpendiculi Succedaneo, ſimiliter oſtendentur. Puta; ſi ſuper declive planum impenetrabile, volvendum

volvendum esset G grave, circa C centrum motûs ; suo centro Gravitatis peripheriam in illo plano describens S P G. Quippe, cum propter duritiem subjecti plani, aut forsan Axis circa quem rotetur determinatam positionem, similemve causam aliam, in plano perpendiculari descendere non possit ; quam tamen potest maximè declivi feretur.

PROP. XVIII.

Ad datum motûs Axem, (vel similiter inclinatum,) eâ ratione ponderant comparata Gravia; (vel idem, Grave pro vario situ:) quæ ex rationibus Ponderum, & Distantiarum Centrorum Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano, componitur.

Adeóque: Si Distantiæ sint æquales ; in ratione Ponderum: Si Pondera sint æqualia ; in ratione Distantiarum: Si vel utraque sint æqualia ; vel sint reciprocè proportionalia ; Æquiponderant: Quorum verò centra Gravitatis sunt in ipso per Axem Perpendiculari Plano ; nihil in utramvis partem ponderant.

Circa Axes verò inæqualiter inclinatos, adeóque in Planis inæqualiter Declivibus, Libranda : in eâ ratione ponderant, quæ ex Ponderum, & Distantiarum centrorum Gravitatis à perpendiculari per axem plano, & Declivitatum planorum in quibus librantur pondera, componitur.

					P.	nP.
P.	nP.	P.	nP.	nP.	D.	nD.
D.	D.	uD.	mD.	·D.	Δ.	rΔ.
PD. G::	nPD. nG::	mPD. mG::	mPD. mnG::	PD. G.	PDΔ. G::	nmrPDΔ. m(

SEquitur ex 12 & 13 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP.

PROP. XIX.

Ex tribus his; Pondere, Ponderatione, & Diſtantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano; datis duobus quibuſvis, datur tertium.

Nempe: Datis Pondere, & Diſtantiâ; datur Ponderatio: Datis Pondere, & Ponderatione; datur Diſtantia: Datis Ponderatione, & Diſtantiâ; datur Pondus.

Excipe; Si (quod unà cum Ponderatione datur) Diſtantia vel Pondus nullum ſit.

Intellige; *in datâ Axis inclinatione*, (& ſimiliter in ſequentibus:) Secùs enim & hujus habenda erit conſideratio.

$$PD = G. \qquad \frac{G = PD}{P} = D. \qquad \frac{G = PD}{D} = P.$$

SEquitur ex 15 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XX.

Dato Pondere, datâque Diſtantiâ Centri Gravitatis à perpendiculari per Axem Plano: Pondus inveſtigare, quod in aſſignatâ Centri Gravitatis à perpendiculari Plano per axem Diſtantiâ, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

Item: Diſtantiam inveſtigare, in quâ, Pondus Aſſignatum, Dato illi vel æquiponderet, vel in datâ ratione ponderet.

$$\begin{array}{ccccc} P. & \frac{1}{n}P. & nP. & \frac{m}{n}P. & nD. \\ D. & nD. & \frac{1}{n}D. & nD. & \frac{m}{n}D. \\ \hline PD. & G::PD. & G::PD. & G::mPD. & mG::mP. \; mG. \end{array}$$

Fig. 104.

SEquitur ex 16 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXI.

Ejusdem vel æqualium Ponderum, Centri Gravitatis perpendicularis Plani per Axem motûs Appropinquatio aut inde Elongatio, Æqualis, (sive Centrum Plano moveri intelligatur, sive Planum Centro, vel contra) æqualiter auget, minuítve Ponderationem.
Et Inæqualis, vel, Inæqualium Ponderum; proportionaliter.

SEquitur ex 17 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXII.

Datis Ponderibus quotlibet; datisque vel Axe motûs (aut Perpendiculari per hunc Plano) & Ponderum Centris gravitatis; vel horum à Perpendiculari per Axem Plano distantiis ad datas partes: Investigare, quanta sit tum singulorum tum simul omnium Ponderatio; &, in quas partes: tum denique quantum gravant ipsum quo sustinentur Axem.

Fig. 105. $\frac{+D.}{P.}$ $\frac{+3D.}{5P.}$ $\frac{+4D.}{3P.}$ $\frac{\pm 0D.}{4P.}$ $\frac{-2D.}{3P.}$ $\frac{-3D.}{4P.}$

+DP. +G :: +15DP. 15G :: +12DP. +12G :: ±0DP ±0G :: -6DP. -6G :: -12DP. -12G

Ostendit

$$\left.\begin{array}{l}+1G\\+15G\\+12G\end{array}\right\}=+28G$$
$$\pm 0G=\pm 0G$$
$$\left.\begin{array}{l}-6G\\-12G\end{array}\right\}=-18G$$
$$+10G$$

OStenditur ex 18 Cap. 3. propter 16 hujus..

Signum +, innuit distantiam à Perpendiculari per Axem Plano, Dextrorsum: Signum —, Sinistrorsum. Pondera verò eodem signo + rotantur omnia, quia intelliguntur omnia, Deprimentia. Si vero esset Ponderum aliud Deprimens, aliud Elevans: illud signo +, hoc signo —, notari par esset: Et multiplicationum leges insuper essent observandæ.

PROP. XXIII.

Datis Ponderibus quotlibet (vel summa Ponderum) datâque eorum simul omnium Ponderatione ad datas partes, respectu Axis expositi (vel expositi per axem Perpendicularis Plani:) Ponderationem Augere vel Minuere datâ quantitate; sive manente eodem per Axem plano perpendiculari; sive manentibus (in iisdem parallelis Planis) Ponderum centris gravitatis.

OStenditur ex 19 Cap. 3. propter 16 huius.

Nempe: Manente Axe, (saltem similiter ad horizontem inclinato; in eodem perpendiculari plano,) Amovendo vel Admovendo ponderum Centra Gravitatis.

Vel, manentibus ut priùs (saltem in iisdem parallelis Planis) Centris Gravitatis; (vel communi simul omnium Centro;) Amovendo vel Admovendo Axem, similiter inclinatum, in parallelo Plano; tanto quidem intervallo, quanto exposita Pondera (vel summa ponderum) tantundem ponderarent, quantum vel Addendum vel Auferendum ponderationi expositum.

PROP. XXIV.

Datis Ponderibus quotlibet; unà cum Axe motûs,(aut per illum Perpendiculari Plano,) & Centris gravitatis, (aut horum à Perpendiculari per Axem Plano distantiis, ad datas partes:)

Vel, Datis saltem summa Ponderum, & simul omnium Ponderatione ad datas partes:

Distantiam Centri Gravitatis simul omnium, à Perpendiculari per Axem Plano, invenire.

Adeóque; Ponderationem Augere vel Minuere in data ratione. Nempe; in eâ ratione, auctâ vel minutâ Distantiâ.

$$\frac{+10G = +10PD}{20P} = +\frac{1}{2}D.$$

Fig. 105. Ostenditur ex 20 Cap. 3. propter 16 hujus.

Puta; Si $+10G = +10PD$ summa Ponderationum dextrorsum, data; (vel, ex datis, inventa, per 22 hujus;) per 20 P summam ponderum dividatur: Habetur $+\frac{1}{2}D$, distantia Centri gravitatis à Plano per Axem Perpendiculari, dextrorsum: Puta, in Ξ Σ Recta, Planóve.

Corollarium, constabit ex 20 hujus. Quippe jam datur totius Aggregati (tanquam unius Gravis) tum Pondus tum Centri Gravitatis distantia.

PROP. XXV.

Datâ, à Perpendiculari per Axem Plano communis Ponderum quotlibet, utcunque positorum, Centri Gravitatis Distantiâ: Ex cognitis Ponderibus, vel summa Ponderum; cognoscitur Ponderatio: Vel, ex cognitâ Ponderatione; Summa Ponderum.

$$+D \times P = +DP = +G. \quad \frac{+G = +DP}{D} = P.$$

SEquitur ex 22 Cap. 3. propter 16 hujus.

PROP. XXVI.

Datis, in Gravi quovis, tribus Æquilibrii Planis, quæ non in unâ rectâ concurrant omnia; Vel, Datis duobus quibuſvis Axibus Æquilibrii: Datur ejuſdem Centrum Gravitatis. Nempe in communi ſecantium concurſu.

Et quidem; Figuræ Planæ, vel Lineæ utcunque curvæ in Plano deſcriptæ: Datis duobus (præter ipſum Planum) Planis Æquilibrii, (non in hujus rectâ aliquâ concurrentibus:) Vel, Uno Axe Æquilibrii non in illo Plano jacente: Datur Centrum Gravitatis. Nempe in communi datorum concurſu.

Lineæ verò rectæ; Dato uno vel Æquilibrii Axe, vel Plano Æquilibrii, rectam illam ſecante: Datur Centrum Gravitatis. Nempe, ſectionis Punctum.

Puncti vero, Centrum Gravitatis, eſt punctum ipſum.

CUm enim duo Plana ſe mutuò non niſi in unâ rectâ ſecent; Rectáque ſive rectam, ſive planum, non niſi in unico puncto; (ut ex elementis notum eſt:) Manifeſtum eſt, non poſſe niſi in unico puncto; vel Duos Axes Æquilibrii, vel Tria Æquilibrii Plana, non in eâdem rectâ concurrentia; ſe mutuò ſecare (Tertium utique Planum, duorum communem ſectionem, non niſi in uno puncto ſecat.) Cúmque Centrum Gravitatis, per 15 hujus, ſit in communi omnium ſive Axium ſive Planorum Æquilibrii concurſu; Datis illis, datur (quod in eorum concurſu eſt) Centrum Gravitatis. Quod erat primò demonſtrandum.

Sin illud Grave ſit vel Figura Plana, vel Linea utcunque curva in Plano deſcripta; erit hoc ipſum planum, unum ex tribus illis Æquilibrii

Planis

Planis requisitis; (per def. Plani Æquilibrii: quippe posito hoc ad horizontem recto in neutram partem præponderabitur, per 3 hujus.) Adeóque (cum Centrum Gravitatis in illo plano esse constet) sive duobus aliis Æquilibrii Planis (non in eàdem aliquâ hujus Plani recta se mutuo secantibus;) vel, Axe uno; secetur Planum hoc: unico secabitur puncto, (quod itaque Gravitatis Centrum erit,) per jam dicta. Quod secundo demonstrandum erat.

Linea recta vero (cujus Centrum gravitatis in ipsa esse, similiter ostendetur;) ex tribus Æquilibrii planis duo supplet; sive communem duorum sectionem: Adeóque, si vel uno aliquo Æquilibrii Axe, vel Plano, secetur; secatur puncto unico, quod itaque Centrum erit Gravitatis.

Denique: Quod Puncti Centrum Gravitatis extra ipsum non sit, similiter ostendetur atque de Plano, & Lineâ rectâ; (quippe si Planum aliquod extra ipsum ponatur ad Horizontem perpendiculare; totum grave ad unas partes ponderabit:) Cum itaque Punctum sit indivisibile; erit ipsum sui Centrum. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.

Fig. 98. EXempli gratiâ. Centrum Gravitatis Puncti C, est ipsum C Punctum. Centrum gravitatis rectæ XS, est in ipsâ rectâ; ejúsque Puncto C quo ab Æquilibrii Plano vel Axe YCT, secatur.

Figuræ Planæ, vel Lineæ Curvæ in Plano, YXTS, centrum Gravitatis est in duorum Planorum Æquilibrii, puta XS & YT, communi sectione, (quæ ipsa est Axis Æquilibrii;) hujúsque puncto C, quod est in exposito plano.

Figuræ vero solidæ, vel lineæ curvæ non in plano descriptæ, (quales sunt spirales circa Conum, vel Cylindrum, &c.) Centrum gravitatis erit in trium Planorum Æquilibrii; puta per YXT, duorúmque hoc secantium ut in XCS, & YCT; communi concursu C: sive duorum Axium Æquilibrii XS & YT communi sectione C.

Ejusmodi autem dico Axes habentur; ope 12 hujus. Puta suspenso primum Gravi ex sui puncto X, ut habeatur XS; deinde, ex sui puncto Y, ut habeatur YCT.

PROP. XXVII.

Duorum conjunctorum Gravium (Homogeneorum) commune Centrum Gravitatis, est in eâ rectâ quæ sua respectivè Centra Gravitatis conjungit, sic divisâ, ut Distantiæ sint Ponderibus reciprocè proportionales.

Adeóque; datis duobus, eorúmque Centris Gravitatis; datur commune simul utriusque Centrum Gravitatis.

Quódque de duobus dicitur; de pluribus similiter obtinebitur.

Item; Datis Totius & Ablati, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur Centrum Gravitatis reliqui.

Sunto, verbi gratia, duo Pondera, vel (quod eodem recidit, per 16 hujus) eorum Centra Gravitatis, in punctis A, B: Adeóque (per præced.) A B Axis Æquilibrii; & (per 15 hujus) in illo, Centrum Gravitatis: puta C. Est, inquam, ut Pondus A ad pondus B, sic (reciprocè) distantia C B ad distantiam C A, (per 18 hujus) ut Æquiponderent. Fig. 106

Invento autem duorum A B ponderum communi Centro Gravitatis C; dato adhuc tertio Pondere, ejúsque Centro Gravitatis D: eodem modo invenietur trium commune Centrum Gravitatis. Nempe, ita divisâ rectâ C D in E, ut distantiæ E D, E C; sint Ponderibus D, & A + B, reciprocè proportionales.

Item; datis Totius A + B, & Ablati B, Ponderibus & Centris Gravitatis; datur residui Centrum Gravitatis A. Nam datis Ponderibus A + B & B, habetur (subductione) Pondus A. Sumpti igitur (in B C recta continuatâ) ut inventum Pondus A, ad Pondus B datum, sic data C B distantia, ad distantiam C A quæsitam.

Dico *Homogeneorum*, quia quæ sunt invicem Heterogenea, (ut lineæ & superficies; superficies, & solidum; aut similia;) nullam habent ad invicem rationem; (quod docent def. 3 & 5. Quinti Euclidis:) suntque hujusmodi comparationis incapacia. Quodque hic monitum est; alibi, ubi opus erit, est intelligendum.

CAP.

CAP. V.

De Calculo Centri Gravitatis.

MONITUM.

Hoc Caput Integrum, quanquam à præcedentibus dependeat, & (per Methodi leges) hunc sibi locum vendicare videatur: Non tamen ita cum sequentibus connexum est, quin ut possit ab illis separari. Cum itaq; ubi ad interiora Geometriæ penetrandum erit, Calculus necessariò futurus sit perplexior, quàm forte Tyrones, vel minùs exercitati, commodè ferre possint; illud jam statim sub initium monendum duxi; ut sicubi perplexi Calculi molestiam subire nolint, possint inoffenso pede ad Capita sequentia transire; quæ et præcedentibus, hoc omisso, tum satis intelligi, tum & legitimè demonstrari possunt.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Quanta quælibet, Arithmeticè proportionalia, (sive secundum naturalem Numerorum consecutionem constituta,) appello Primana.

Quæque sunt in horum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. (sive ut Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. arithmetice-proportionalium,) appello Secundana, Tertiana, Quartana, *&c.*

Quæ autem in eorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. (sive ut illorum Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) appello Subsecundana, Subtertiana, Subquartana, *&c.*

Quæ in ratione, Duplicatâ Triplicatæ, Subtriplicatæ, &c. Triplicatâ Duplicatæ, Subduplicatæ, &c. (sive ut Quadrata Cuborum, aut radicum cubicarum, &c. ut Cubi Quadratorum, aut radicum quadraticarum, &c.) appello Quadrata Tertianorum, Subtertianorum, *&c.* Cubos Secundanorum, Subsecundanorum, *&c. Et similiter, in quâvis aliâ rationum compositione, mutatis mutandis, appellanda erunt.*

Atque hujusmodi Serierum Indices *sive* Exponentes, *appello numeros (integros an fractos, surdósve, ut contigerit) unde denominantur illæ series aut Rationes.*

Et, consonanter, Æqualia dico Nullana : *Quoniam Æqualia secundum nullam (ne simplam quidem) rationem arithmeticè proportionalium crescunt aut decrescunt.* Subprimana *verò (sive, ut dicam, Radices Laterales Primanorum,) eadem erunt atque Primana. propter* $\frac{1}{1}=1$.

EXempli gratiâ :

Exponentes.	Series.								
0.	Æqualium,	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	&c.
1.	Primanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
2.	Secundanorum,	0.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	&c.
3.	Tertianorum,	0.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	&c.
$\frac{1}{1}$.	Subprimanorum,	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
$\frac{1}{2}$.	Subsecundanorum,	$\sqrt{}0$.	$\sqrt{}1$.	$\sqrt{}2$.	$\sqrt{}3$.	$\sqrt{}4$.	$\sqrt{}5$.	$\sqrt{}6$.	&c.
$\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	$\sqrt{c}0$.	$\sqrt{c}1$.	$\sqrt{c}2$.	$\sqrt{c}3$.	$\sqrt{c}4$.	$\sqrt{c}5$.	$\sqrt{c}6$.	&c.
$2\times3=6$.	Quadratorũ tertianorum,	0×0.	1×1.	8×8.	27×27.	64×64.	125×125.	216×216.	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.	Q.Subtertianorum,	$\sqrt{c}0$.	$\sqrt{c}1$.	$\sqrt{c}4$.	$\sqrt{c}9$.	$\sqrt{c}16$.	$\sqrt{c}25$.	$\sqrt{c}36$.	&c.
$3\times2=6$.	Cuborum secundanorum,	0×0×0.	1×1×1.	4×4×4.	9×9×9.	16×16×16.	25×25×25.	36×36×36	&c.
	vel	0.	1.	64.	729.	4096.	15625.	46656.	&c.
$3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.	C.Subsecundanorũ,	$\sqrt{}0$.	$\sqrt{}1$.	$\sqrt{}8$.	$\sqrt{}27$.	$\sqrt{}64$.	$\sqrt{}125$.	$\sqrt{}216$.	&c.
&c.	&c.								

DEF. II.

Series, jam definitis, Reciprocas, *appello; quando Se*[ries] *æqualium, per earum aliquam Dividi intelligitur.* [Q]*uæ itaque Indices habebunt* Negativos; *ut* --1, --2, --3, *&c.*

Exempli gratia.

Index.	Series. Reciproca					
--0.	Æqualium,	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{1}$.
--1.	Primanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.
--2.	Secundanorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{9}$.	$\frac{1}{16}$.
--3.	Tertianorum,	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{8}$.	$\frac{1}{27}$.	$\frac{1}{64}$.
$-\frac{1}{2}$.	Subsecundanorum,	$\frac{1}{\sqrt{0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{4}}$.
$-\frac{1}{3}$.	Subtertianorum,	$\frac{1}{\sqrt{c0}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.
$-6 = -2 \times 3$.	Quadratorum tertianorum,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.1}$.	$\frac{1}{Q.8}$.	$\frac{1}{Q.27}$.	$\frac{1}{Q.64}$.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$.
$-\frac{2}{3} = -2 \times \frac{1}{3}$.	Q. Subtertianorũ,	$\frac{1}{Q.0}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c1}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c2}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c3}}$.	$\frac{1}{Q.\sqrt{c4}}$
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{c4}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c9}}$.	$\frac{1}{\sqrt{c16}}$.
$-6 = -3 \times 2$.	Cuborum C. secundanorum,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.1}$.	$\frac{1}{C.4}$.	$\frac{1}{C.9}$.	$\frac{1}{C.16}$.
	Vel	$\frac{1}{0}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{64}$.	$\frac{1}{729}$.	$\frac{1}{4096}$,
$-\frac{3}{2} = -3 \times \frac{1}{2}$,	C. Subsecundanorũ,	$\frac{1}{C.0}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{1}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{2}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{3}}$.	$\frac{1}{C.\sqrt{4}}$
	Vel	$\frac{0}{1}$.	$\frac{1}{1}$.	$\frac{1}{\sqrt{8}}$.	$\frac{1}{\sqrt{27}}$.	$\frac{1}{\sqrt{64}}$.

SCHOLIUM.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quò rectiùs hæc intelligantur:) quod si Potestas quælibet secundum quam series instituitur (unde & Indicem sive Exponentem desumit,) per aliam cujusvis seriei potestatem multiplicetur; Potestatem facit cujus Index sit Aggregato indicum utriusque æqualis: Vel Index Multiplicatæ, tanto augetur, quantus est Index multiplicantis. Ut

$1\times a=a.$	$1\times a^2=a^2.$	$1\times a^3=a^3.$	$1\times a^4=a^4.$	Quantitates.
$0+1=1.$	$0+2=2.$	$0+3=3.$	$0+4=4.$	Indices.
$a\times a=a^2.$	$a\times a^2=a^3.$	$a\times a^3=a^4.$	$a\times a^4=a^5.$	Quantitates.
$1+1=2.$	$1+2=3.$	$1+3=4.$	$1+4=5.$	Indices.
$a^2\times a=a^3.$	$a^2\times a^2=a^4.$	$a^2\times a^3=a^5.$	$a^2\times a^4=a^6.$	Quantitates.
$2+1=3.$	$2+2=4.$	$2+3=5.$	$2+4=6.$	Indices.

Sin per alteram Potestatem Dividatur, Potestas aliqua; oritur potestas cujus Index sit æqualis excessui Indicis potestatis divisæ supra indicem potestatis dividentis: Vel Index Divisæ tantò minuitur, quantus est Dividentis Index. (Adeóque si hic illo major sit, prodibit index Negativus.) Vt

$a)\,1\,(\frac{1}{a}.$	$a^2)\,1\,(\frac{1}{a^2}.$	$a^3)\,1\,(\frac{1}{a^3}.$	$a^4)\,1\,(\frac{1}{a^4}.$	Quantitates.
$0-1=-1.$	$0-2=-2.$	$0-3=-3.$	$0-4=-4.$	Indices.
$a)\,a\,(1.$	$a^2)\,a\,(\frac{1}{a}.$	$a^3)\,a\,(\frac{1}{a^2}.$	$a^4)\,a\,(\frac{1}{a^3}.$	Quantitates.
$1-1=0.$	$1-2=-1.$	$1-3=-2.$	$1-4=-3.$	Indices.
$a)\,a^2\,(a.$	$a^2)\,a^2\,(1.$	$a^3)\,a^2\,(\frac{1}{a}.$	$a^4)\,a^2\,(\frac{1}{a^2}$	Quantitates.
$2-1=1.$	$2-2=0.$	$2-3=-1.$	$2-4=-2.$	Indices.

Si itaque intelligatur series potestatis inferioris, per seriem potestatis superioris, respectivè dividi; (hoc est, terminus primus illius, per primum hujus; secundus, per secundum, &c.) orietur series ex Reciprocis aliqua, quarum Indices sunt Negativi.

Si cui interim hæc minùs adhuc explicata videantur: Consulat, si libet, nostram *Arithmeticam Infinitorum*: ubi fusiùs traduntur.

PROP. I.

Si intelligatur infinita series Quantorum, ab ipso capite seriei (puta o vel $\frac{1}{\infty}$) inchoatorum, & continuè crescentium secundum seriem Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. aliorúmve modò definitorum; eorúmve Reciprocarum: quorum ultimum datum sit: erit totius ratio, ad seriem totidem ultimo æqualium, ea quæ est Unius, ad Indicem seriei Uno auctum.

Idem continget, si, omisso termino primo, seu o, Series secundo termino incipiat; seu à quovis termino quilibet primo & secundo intermedius; Puta si in serie Primanorum (cui reliquæ accommodandæ intelliguntur) terminus primus sit saltem non major quam communis Excessus seriei.

PUta: Infinita series ejusmodi Primanorum (qualia sunt, parallela Plana in Conoide Parabolico; & Rectæ in Triangulo, Basi parallelæ, &c.) cujus Index est 1: Est ad seriem totidem Maximo æqualium, (puta, ad circumscriptum Conoidi illi Cylindrum, aut Triangulo Parallelogrammum, æquè altum;) ut 1 ad $2 = 1 + 1$.

Ejusmodi series infinita Secundanorum, cujus Index est 2; (qualia sunt parallela basi Plana in Cono aut Pyramide; vel Ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ;) ad totidem maximo Æqualia, (puta, circumscriptum super eadem basi Cylindrum vel Prisma, æque altum; aut circumscriptum complemento Parabolæ Parallelogrammum;) ut 1 ad $3 = 2 + 1$.

Ejusmodi series infinita Subsecundanorum cujus Index est $\frac{1}{2}$; (puta, rectarum in Parabola basi parallelarum,) ad totidem maximo æqualium, (putà, ad Parallelogrammum super eâdem base æquè altum;) ut 1, ad $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$; sive ut 2 ad 3.

Ejusmodi series infinita Subtertianorum, cujus Index est $\frac{1}{3}$, (putà, rectarum in Paraboloide cubicali,) ad totidem maximo æqualium, (puta,

tà, ad circumſcriptum Parallelogrammum ;) ut 1 ad $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$: ſive, ut 3 ad 4.

Et ſimiliter in iſtiuſmodi aliis innumeris.

Item in Reciprocis ſeriebus ; puta, ejuſmodi ſeries cujus Index ſit $-\frac{1}{2}$. Erit ad totidem ultimo Æqualium, ut 1 ad $-\frac{1}{2} + 1$; ſive ut 1 ad $\frac{1}{2}$; vel 2 ad 1. Et in reliquis ſimiliter.

Per noſtræ *Arithmeticæ Infinitorum* Prop. 64. 102, &c.

Idem continget, ſi, pro ſerie Primanorum

	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	&c.
vel	0.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	&c.

quæ repræſentet Figuram Inſcriptam : Intelligatur Series,

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	&c.
vel	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	&c.

quæ repræſentet Figuram Circumſcriptam :

vel	$\frac{1}{2}$.	$1\frac{1}{2}$.	$2\frac{1}{2}$.	$3\frac{1}{2}$.	$4\frac{1}{2}$.	$5\frac{1}{2}$.	$6\frac{1}{2}$.	&c.
hoc eſt, ut	1.	3.	5.	7.	9.	11.	13.	&c.
aut etiam	$\frac{1}{3}$.	$1\frac{1}{3}$.	$2\frac{1}{3}$.	$3\frac{1}{3}$.	$4\frac{1}{3}$.	$5\frac{1}{3}$.	$6\frac{1}{3}$.	&c.
hoc eſt, ut	1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.	&c.

quæ repræſentent Figuram intermediam ; putà quæ ſit partim Inſcripta, partim Circumſcripta ; adeoque major quam inſcripta & minor quam Circumſcripta. Quippe hæ omnes (atque horum ſimiles) dummodo Series Infinita intelligatur, tantundem valent, (utut in Serie terminorum numero Finitorum ſecus ſit :) Per Schol. Prop. 182. *Arithmet. Infinit.*

Quodque de ſerie Primanorum dictum eſt, reliquis Seriebus quæ ſunt in Primanorum ratione Duplicata, Triplicata, &c. Subduplicata, Subtriplicata, &c. aut aliàs compoſita, accommodandum erit.

SCHOLIUM.

Quoties, in ſequentibus, ſerierum hujuſmodi mentio fiet : quarum æſtimatio ex hac Propoſitione dependet ; intelligendæ ſunt ſeries illæ, ab ipſo capite ordiri, putà 0 vel $\frac{1}{2}$; & dato terminari. Quod cum in propoſitione unâ aut alterâ expreſſè dictum ſit ; idem in ſequentibus intelligendum erit ; (niſi contrarium inſinuetur :) utut, quo longa periphraſis evitetur, (quæ propoſitionem, aliàs fortaſſe ſatis implicatam perplexiorem redderet,) illud diſertis verbis non dicatur.

PROP.

PROP. II.

A. Lineæ Rectæ, Parallelogrammi, Parallelepipedi, Prismatis, Cylindri, Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ, aut quæ horum instar sunt; Centrum Gravitatis, est *in media longitudine*

B. Nempe; Lineæ Rectæ, in Puncto medio: Parallelogrammi, in mediâ Rectâ oppositis basibus parallelâ: Parallelepipedi, Prismatis, aut Cylindri, vel Superficiei Cylindricæ vel Prismaticæ; in medio Plano, oppositis basibus Parallelo.

C. Adeóque: Parallelogrammi, in ejusmodi binarum Rectarum concursu: Parallelepipedi, in ejusmodi trium Planorum concursu.

D. Datur igitur Puncti, Lineæ rectæ, Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, horumve Solidorum cujusvis Superficiei, Centrum Gravitatis.

E. Adeóque &, Punctorum quotlibet, positione datorum, commune Centrum gravitatis datur. Item, Rectarum quotlibet, magnitudinè & positione datarum. Imò, & linearum quarumlibet, magnitudine & positione datarum, quarum singularum Centra gravitatis dantur, datur
Fig. 108, commune Centrum Gravitatis. Ope Prop. ult. Cap. 4.
109, Et similiter, quotlibet Quadratorum vel Parallelogrammo-
110, rum quorumlibet; item, quotlibet Cuborum, vel quo-
111, rumvis Parallelepipedorum; aut superficierum horum;
112. (magnitudine & positione datorum;) datur commune centrum Gravitatis. Ope ejusdem Prop. ult. Cap. 4.

A. Si enim intelligatur Linea Recta, Parallelogrammum, Prisma, Cylindrus, aut quod horum instar est aliud; utrinque à medio C; Rectis Planisve parallelis, æquali intervallo ab invicem dissitis, positisque in situ ad horizontem rectis; in segmenta invicem æqualia (plura aut pauciora,

pauciora, numero finita an infinita,) dividi: Manifestum est, (ex 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) propter segmenta quotlibet ex unâ parte, totidem ex alterâ, Æqualia magnitudine, (adeóque & Pondere; supponimus utique æquabiliter gravia:) & in Distantiis respectivè æqualibus posita; Æquiponderare singula singulis respectivè sumptis; adeóque omnibus omnia simul sumpta. Adeóque, quod per C transit. est Æquilibrii Perpendiculum, vel Perpendiculare Planum; (per definitiones;) & in illis Centrum Gravitatis; per 15 Cap. 4.

Adeóque; (per 26 Cap. 4.) in Linea Rectâ, hinc determinatur ipsum Punctum; in Parallelogrammo, aut quod hujus instar est, saltem Rectâ; in Prismate, aut Cylindro, Planum; in quo est ipsum Gravitatis Centrum. B.

Porro; Cùm sint in Parallelogrammo (sive sit Quadratum, Oblongum, Rhombus, aut Rhomboides,) bis bina latera opposita: Habentur hinc duæ rectæ, ut X C S (media inter A B, & D E,) & Y C T, (media inter A D, & B E,) in quarum utrâque (per jam demonstrata) est Centrum Gravitatis: Adeoque; in horum communi sectione, C puncto. per 26 Cap. 4. C. Fig. 113.

Denique; Cum sint in Cubo, & quovis Parallelepipedo, ter bina Plana opposita: Habentur hujusmodi (per jam demonstrata) tria Plana, in quorum singulis, (adeoque in communi omnium concursu C,) est Centrum Gravitatis. per 15 & 26 Cap. 4. Fig. 114.

Adeóque, tum Puncti (sive per 29 Cap. 4. sive hinc, quia nihil est quod utrinque ponderet, nedum præponderet,) tum Lineæ rectæ, tum Quadrati aut cujusvis Parallelogrammi, item Cubi aut Parallelepipedi cujusvis, ipsum Gravitatis Centrum; per jam demonstrata. Quodque de Cubis & Parallelepipedis, dictum est; perinde valet de horum superficiebus. D

Et propterea, Punctorum quotlibet, vel quotlibet rectarum; item Quadratorum aut Paralellogrammorum quotlibet; quotlibet item Cuborum vel Parallelepipedorum; quotlibet denique Superficierum Cuborum aut Parallelepipedorum; datur commune Centrum Gravitatis, modo ipsa sint magnitudine & positione data. Per Prop. ult. Cap. præced. E.

Alia Demonstratio.

P.	P.	P.	P.	
0*d*.	1*d*.	2*d*.	3*d*.	&c. usque ad D.

$0dP + 1dP + 2dP + 3dP +$ &c. usque ad $DP. = \frac{1}{2}NDP.$

Idem

Idem demonstratur ex 1 hujus. Intelligatur utique, per C mediam longitudinem incedens, Perpendiculare per Axem Planum; (cui intelligantur parallela, Parallelogrammi vel Prismatis Bases oppositæ:) Quæque sunt utrinque CA, CB, rectæ, ex infinitis numero Punctis (eo sensu quo def. 1. Cap. 4. definitum est) constare: (& similiter ex infinitis numero Rectis, Parallelogrammum; &, Planis, Prisma, &c.) Quæ intelligantur omnia, æquè crassa; (& similiter alibi intelligendum, ubi hujusmodi constructio adhibetur, nisi aliud innuatur:) Adeoque tum ipsa (ut Rectarum, Parallelogrammorum, & Parallelepipedorum, natura postulat, utpote in omnibus sui partibus æque altorum;) tum & propterea eorum Pondera, inter se æqualia: puta, ut P,P,P,P, &c. quorum omnium numerus intelligatur, N: Sed &, in Distantiis à Perpendiculari Plano per Axem, ut $od,1d,2d,3d$, &c. usque D ad, maximam. Adeóque momenta seu Ponderationes (per 13 Cap. 3. vel 4 Cap. 4.) ut $odP,1dP,2dP,3dP$, &c. usque ad DP. Quæ quidem infinitæ series Primanorum, simul valent ut $\frac{1}{2}$NDP; (nempe, ad NDP, summam totidem Maximo Æqualium, ut 1 ad 2:) per 1 hujus. Cúmque hoc, utrinque perinde contingat: Æquiponderabitur utrinque. Adeóque (per 15 Cap. 4.) Centrum Gravitatis est in illo Plano. Quod erat demonstrandum.

Fig. præced.

Reliquáque hinc deducuntur ut prius.

Alia Demonstratio.

P.	P.	P.	P.	&c.	P.
od.	$1d$.	$2d$.	$3d$.	usque ad	D.

$odP+1dP+2dP+3dP+$ &c. usque ad DP. $=\frac{1}{2}NDP=NP\times\frac{1}{2}D$.

Fig. 115, 116.

Idem Analyticè, tanquam si nondum notum esset, sic investigabitur. Intelligatur AB tanquam ex infinitis numero Punctis constans; (& similiter ex Rectis, Parallelogrammum; &, ex Planis, Prisma, &c.) æquè crassis; quorum itaque Pondera sint, ut P,P,P,P, &c. quorum Numerus sit N. Positóque Centro, vel Axe motûs in ipso extremo A; erunt eorum inde Distantiæ respectivæ, ut $od,1d,2d,3d$, &c. usque ad D. Et momenta seu Ponderationes, ut $odP,1dP,2dP,3dP$, &c. usque ad DP. Quorum omnium summa (per 1 hujus) est ut $\frac{1}{2}NDP=NP\times\frac{1}{2}D$. Nempe quantum simul ponderaret NP totum Pondus vel summa Ponderum in distantia $\frac{1}{2}$D. Tantundem itaque distat Centrum Gravitatis à perpendiculari per A Plano, (per 24 Cap. 4.) Eritque propterea in parallelo plano per mediam longitudinem. Quod erat ostendendum. Cæteráque hinc deducuntur, ut prius.

SCHO-

SCHOLIUM.

PLacuit hanc demonstrandi methodum, in re facili, cæteris subjungere, ut eò melius intelligatur, ubi illa post in difficilioribus adhibebitur.

Intelligimus (quod semel monendum erit) ubi de figurarum centris gravitatis agitur, æquabiliter gravia esse, sive puncta, sive plana, sive solida; hoc est, æquali magnitudini æquale pondus inesse; & proportionalibus, proportionalia.

Item; Puncta, Lineas, aut Plana, ex quibus idem Grave, ut Linea, Planum, aut Solidum, conflari intelligitur; æquè crassa esse: ut nempe, pro interjectorum numero, distantiarum ratio censeatur. Utut enim non negaverim, ad def. 1. Cap. 4. posse quidem secùs aliquando assumi: ubi tamen nihil tale insinuatur, pro æquè crassis sunt habenda.

Quæque hic monemus; in sequentibus erunt intelligenda.

Notandum interim, ad hanc Propositionem, & alias sequentes longiores, Literas in margine positas, indicare, in quo Demonstrationis membro quærenda sit istius partis probatio.

PROP. III.

Siquævis Linea (recta aut curva) vel Figura quævis (plana, curva, solidáve,) plano per medium ita divisa sit; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, sint æquales & æqualiter à dividente Plano remotæ: Centrum Gravitatis est *in Plano dividente*. Fig. 118, 119.

Putà, Linea recta, utcunque bisecta. Arcus Circuli, producto *Radio* bisectus. Curva Parabolica, Hyperbolica, aut Elliptica, *Axe* producto bisecta. Portio perimetri Polygoni regularis (aut etiam tota Perimeter) rectâ per centrum figuræ transeunte bisecta, si bisecans illa recta vel Laterum unum vel unum Angulorum bisecet. Item; Circulus, Ellipsis, Polygonum regulare, (ejúsve portio; ita ut dictum est, rectâ bisecta:) Item Sphæra, Sphæroides, Conus, Conoides, Cylindrus; & ho-

rum Superficies: Item Pyramis & Prisma, basium regularium; Segmentum Circuli, Ellipseos, Parabolæ, Hyperbolæ, Sphæræ, Sphæroideos; multæque aliæ figuræ plano per axem bisectæ.

Harúmque aliquarum, (quæ pluribus hujusmodi Planis secari possunt in Puncto unico concurrentibus,) ut Circuli, Ellipseos, Parallelogrammi, Plani Solidive regularis, Parallelepipedi, Sphæræ, Sphæroideos; Centrum Gravitatis hinc determinabitur.

$$\begin{array}{lll} lP, & mP, & nP, \&c. \\ rD, & sD, & tD, \&c. \\ \hline \multicolumn{3}{l}{lrDP + msDP + ntDP, \&c.} \end{array}$$

NAm, si Pondera Ponderibus respectivis sint Æqualia, (putà, utrinque lP, mP, nP, &c.) & in Distantiis respective æqualibus, (puta rD, sD, tD, &c. utrinque,) erunt utrinque æqualia Momenta $lrDP + msDP + mtDP$, &c. Adeóque, Centrum Gravitatis in dividente Plano. per 15 Cap. 4.

Et quidem, ubi sunt hujusmodi plura Plana, quorum communis sectio sit Punctum unicum; ipsum Centrum Gravitatis determinatur. Per Cap. 4.

Quod autem hæc enumeratis Lineis & Figuris (& harum similibus) conveniant: Ex earum Definitionibus manifestum est, aut inde facile demonstrabitur.

SCHOLIUM.

NOtandum tamen; de Curvis Parabolicis, Hyperbolicis, Ellipticis (quod & de harum similibus intelligendum,) diserte dictum est, *Axe* producto bisecandas; (non, *quâvis* diametro:) Nam, nisi Punctum bisectionis, sit in Axis vertice; bisecta linea non erit utrinque similiter curva. At in Parabolæ, Hyperbolæ, aut Ellipseos, Portionibus Planis, (rectâ abscissis; quippe de his intelligendum:) quævis Diameter basin totámque aream bisecans, rem præstat.

Dum autem has Linearum aut Figurarum species enumeravimus, alias tamen innumeras reperiri certum est; De quibus Demonstratio

non minùs procedit; súntque sub propositione generali comprehensæ. Nobis interim famosiores aliquot enumerasse sufficit.

Ponderum, quæ ex eâdem parte sunt, quantacunque inæqualitas, aut quantacunque varietas distantiarum, demonstrationi non officit: dummodo in comparandis quæ utrinque sunt, sit æqualitas. Sed &, in prop. sequente, major adhuc erit variandi licentia.

PROP. IV.

Item; Si Linea vel Figura quævis (plana, curva, solida,) ita Plano dividatur; ut singulæ unius segmenti particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent: Centrum Gravitatis est in Plano dividente.

$$\begin{array}{cccccc} lP. & mP. & nP. & rP. & sP. & tP. \\ rD. & sD. & tD. & lD. & mD. & nD. \end{array}$$

$$lrDP + msDP + ntDP == lrDP + msDP + ntDP.$$

Putà; Si ex unâ parte Pondera lP, mP, nP, sint in distantiis rD, sD, tD: ex alterâ verò, Pondera rP, sP, tP, in distantiis lD, mD, nD: Utcunque (propter Pondera distantiis reciprocè proportionalia) comparata comparandis respectivè æquiponderabunt. Adeóque, cùm singula singulis respectivè sumptis æquiponderent; etiam omnia omnibus æquiponderabunt: (per 12 El. 5.) Eritque propterea Centrum Gravitatis in Dividente Plano. Per 15 Cap. 4.

PROP. V.

A. C. Fig. 120,

Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Circuli, 121,
Ellipseos; vel Portionis Circuli, Ellipseos, Parabolæ, 122,
Hyperbolæ, rectâ (vel parallelis rectis) abscissæ; Coni, 123, 124,
Pyramidis, Cylindri, Prismatis, Sphæræ, Sphæroideos, 125,

X 2 **Conoi-** 126.

Conoideos; vel Portionis cujusvis horum, plano vel parallelis planis abscissæ; vel cujuscunque demum Figuræ planæ solidæve, quæ Diametrum aut Axem habet, quæ sibi ordinatim-applicatas rectas omnes parallelas bisecat, pérque omnium sibi ordinatim-applicatorum Planorum parallelorum centra gravitatis transit: Centrum Gravitatis est *in ejusmodi Diametro vel Axe quovis.*

B.D. Atque hinc datur Circuli, Ellipseos, Trianguli, Parallelogrammi, Regularis Plani, Sphæræ, Sphæroideos, Cubi, Parallelepipedi cujusvis, (& figuræ cujuscunque quæ hujusmodi plures Axes vel Diametros habet in uno puncto concurrentes,) Centrum Gravitatis. Nempe, in duorum pluriúmve concursu.

E Hinc item (cum primâ hujus) datur Centrum Gravitatis Cylindri, Prismatisve vel Solidi Prismatici cujusvis, cujus basium centra gravitatis dantur; (eorúmque Superficierum, dummodo Perimetri Basis centrum gravitatis datum sit:) Nempe; in Axis medio.

A Cum enim (verbi gratia) in Triangulo, Recta à quovis angulo ad oppositi Lateris medium, rectas omnes huic lateri parallelas (Triangulum complentes, per def. 1. Cap. 4.) bisecet, per 2 & 6 El. 6. (quam itaque figuræ Diametrum dico; eâ significatione quâ Conicarum Sectionum Diametri, ab Apollonio definitæ, sic dicuntur:) Adeóque per singularum Centra Gravitatis transeat; (per 2 hujus.) Erit in plano per illam rectam (per 3 hujus) adeóque in illâ rectâ (quippe in trianguli plano, per 26 Cap. 4.) Centrum Gravitatis.

Similiter ostendetur, de Figuræ cujusvis Planæ Diametro; (ut Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipseos, Circuli, Parallelogrammi, Plani Regularis, &c.) eâ nempe, quæ omnes parallelas rectas, planum complentes, bisecat.

B Cúmque sint hujusmodi Diametri, in Triangulo tres, (nempe, à singulis angulis ad opposita latera;) in Parallelogrammo, quatuor, (nempe diagonales duæ, & duæ quæ oppositorum laterum media jungunt;) in Polygono regulari, tot quot sunt Anguli, vel Latera; nempe, si laterum numerus par sit; tum à singulis angulis ad angulum oppositum, tum à medio lateris cujusvis ad medium lateris op-

positi, ducentur hujusmodi diametri; sin laterum numerus sit impar, à quovis angulo ad oppositum Latus: in Circulo, & Ellipsi, diametri numero infinitæ: In singulis his figuris (aliisque quibuscunque quæ plures habent diametros ut sunt irregulares multæ,) in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. Per 26 Cap. 4.

In figuris solidis, quæ Axem habent, per Planorum Parallelorum omnium Centra Gravitatis transeuntem; (quales sunt Prisma, Cylindrus, Pyramis, Conus, Pyramidoides, Conoides, Sphæra, Sphæroides, aliæque multæ;) idem similiter ostenditur. Quippe Plana omnia per hos Axes (sive erectos sive inclinatos ad ordinatim-applicata Plana) sunt Plana Æquilibrii; (ut quæ, tum singula Parallela Plana per quorum centra gravitatis transeunt, tum propterea quod ex his conflatur solidum, in partes æquiponderantes dividunt;) Adeoque ipsi Axes, Axes Æquilibrii: Et propterea, in illis Centrum Gravitatis. per 15 Cap. 4. C.

Cùmque sint in Parallelepipedo, Sphærâ, Sphæroide, (aliisque multis figuris solidis,) hujusmodi plures Axes: in duarum quarumvis concursu, est Centrum Gravitatis. per 26 Cap. 4. D.

Corollarium ultimum; satis per se patet, ex hac & Prop. 1. E.

PROP. VI.

Lineæ rectæ, Parallelogrammi, Prismatis, Cylindri, Trianguli, Parabolæ, Paraboloidis; Complementi Parabolæ, Paraboloidísve; Pyramidis, Coni, Conoideos Parabolici, vel Paraboloidici; & cujuscunque demum figuræ ex parallelis rectis planísve secundum seriem infinitam (ab o inchoatam, & dato terminatam) Primanorum, Secundanorum, Subsecundanorum, (aliorúmve in def. 1. Cap. hujus definitorum,) constantis: A.H.

Magnitudo, est ad magnitudinem Parallelogrammi, vel solidi Prismatici, super æquali Base, æque alti; *ut* 1 *ad indicem Seriei unitate auctum:* Et *Centrum Gravitatis* in eâ à vertice distantiâ quæ Diametrum vel Axem ita dividit

vidit

vidit, ut *pars ad Basin*, sit ad partem quæ est *ad verticem*; ut 1 *ad Indicem Seriei Unitate auctum*: Vel (quod eodem recidit) in eâ quæ est ad *Basis distantiam*; ut *Index ille Unitate auctus*, ad *eundem Binario auctum*.

B. Hoc est; ut pars ad Basin, ad partem quæ est ad verticem, sit in Linea Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, & Cylindro, (intelligendo verticem in utrovis extremo,) ut 1 ad 1.

C. In Triangulo, superficie erecti Coni vel Pyramidis (dempta base,) & Conoide (vel Pyramidoide) Parabolico; ut 1 ad 2.

D. In Complemento Parabolæ, Pyramide, vel Cono; ut 1 ad 3.

E. In Complemento Paraboloidis Cubici, ut 1 ad 4: Biquadratici; ut 1 ad 5: &c.

F. In Parabola; ut 1 ad $1\frac{1}{2}$; sive, ut 2 ad 3.

G. In Paraboloide Cubicali; ut 1 ad $1\frac{1}{3}$; sive ut 3 ad 4: in Biquadratico; ut 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel ut 4 ad 5. &c.

B. Sive, (quod eodem recidit;) Distantia Centri Gravitatis à Plano per Verticem basi parallelo, ad distantiam Basis ab eodem Plano: (Quod & in Semicono, Semicylindro, Semi-Parabola, &c. aut quæ horum instar sunt; non minùs valet, atque in figuris integris:) est,

In Lineâ Rectâ, Parallelogrammo, Prismate, vel Cylindro; (facto vertice ut priùs;) ut 1 ad 2.

C. In Triangulo, & Conoide (vel Pyramidoide) Parabolico; ut 2 ad 3.

D. In Pyramide, Cono, & Complemento Parabolæ; ut 3 ad 4.

E. In Complemento Paraboloidis Cubici; ut 4 ad 5: Biquadratici; ut 5 ad 6, &c.

F. In Parabolâ; ut $1\frac{1}{2}$ ad $2\frac{1}{2}$; vel 3 ad 5.

G. In Paraboloide Cubicali; ut $1\frac{1}{3}$ ad $2\frac{1}{3}$; vel 4 ad 7: Biquadratico; ut $1\frac{1}{4}$ ad $2\frac{1}{4}$; vel 5 ad 9, &c.

Et

Et similiter in aliis hujusmodi figuris quibusvis.

Et quidem in Figuris Integris, utrinque ad Diametrum vel Axem positis; datur ipsum Axis vel Diametri punctum in quo est Centrum Gravitatis: In Dimidiatis, excavatis, &c. saltem Centri illius à vertice distantia. A. I.

Unde & Frusti figuræ ejusmodi, (parallelis basi rectis planisve truncatæ) Centrum Gravitatis habetur; ejúsve à Base Verticisve plano distantia. K.

Aut etiam hujusmodi Figuræ utcunque multatæ figurâ cujus tum Magnitudo nota sit, tum Centrum Gravitatis. per 27 Cap. præced.

Item, quæ ex hujusmodi totis, vel harum frustis componitur. L.

Et, speciatim, figuræ cujusvis planæ rectilineæ, & solidæ Planis terminatæ; Centrum gravitatis habebitur, ex eadem 27 Cap. præced.

NAm, si intelligatur Axis motûs, per A verticem transiens, Basi BB parallelus: Quæcunque sit series particularum (puta, Punctorum, Rectarum, Planorum,) ex quibus conflatur linea, figuráve, (puta series Æqualium seu Nullanorum, Arithmetice-proportionalium seu Primanorum, vel ut horum Quadrata, Cubi, &c. Radices quadraticæ, Cubicæ &c. hoc est Secundanorum, Tertianorum, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. aliáve quæcunque ex definitis in def. 1. hujus;) Cum sint in distantiis ab axe motûs, ut 0, 1, 2, 3, &c. Arithmetice proportionalibus, (propter æqualem singularum crassitiem:) Erit series Momentorum (quippe quæ sunt in ratione ex Ponderum & Distantiarum rationibus compositâ) uno gradu altior quam est series Particularum; sive, series illa cujus Index sit unitate major quam Index seriei Particularum: Unde habetur tum magnitudo figuræ, tum summa Momentorum; per 1 hujus; adeóque Distantia Centri Gravitatis à plano per Verticem; per 24 Cap. 4. Ea quam habet propositio. Et quidem ubi per præced. Centrum Gravitatis est in Diametro vel Axe, datur propterea ipsum Diametri vel Axis Punctum. A. Fig. 129.

Putà; Cum Linea recta, ut AD, (propter æqualia Puncta;) Parallelogrammum: ut BBA (propter rectas æquales;) vel circa hoc constructum Prisma, vel Cylindrus, (propter æqualia plana;) sit B.

Series Æqualium seu Nullanorum; (puta ut P, P, P, &c.) cujus Index o; estque igitur ad seriem totidem maximo æqualium, hoc est, illam ipsam, ut 1 ad o + 1;) sintque Distantiæ, ut od, 1d, 2d, &c. quarum maxima, D: erit series momentorum infinita, ut odP, 1dP, 2dP, 3dP, &c. usque ad DP; Series Primanorum, cujus Index 1: Adeoque simul omnium momenta, (per 1 hujus;) ut $\frac{1}{2}$NDP = NP × $\frac{1}{2}$D. Adeoque distantia Centri Gravitatis, $\frac{1}{2}$D. per 24 Cap. 4.

P. P. P. P.------P.
od. 1d. 2d. 3d.------D.
odP, 1dP, 2dP, 3dP,---DP.

$\frac{1}{2}$NDP = NP × $\frac{1}{2}$D.

C Item: Cum Triangulum ABB (propter rectas, Basi BB parallelas, distantiis a vertice proportionales,) & superficies Coni Pyramidisve (propter perimetros planorum similium basi parallelorum, distantiis à vertice proportionales;) Et Conoides (vel Pyramidoides) Parabolicum, super Parabolâ BAB constructum, (cujus parallela plana, propter ordinatim-applicatas in Parabolâ in subduplicatâ ratione diametrorum interceptorum, sunt in diametrorum ratione, sive distantiarum à vertice; quippe in duplicata ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ circa quas fiunt illa similia plana;) sit series Primanorum; puta, ut op, 1p, 2p, 3p, &c. usque ad P; cujus Index 1: adeoque omnium summâ, ut $\frac{1}{2}$NP; (nempe, in ratione ad totidem maximo æqualium; hoc est, ad Parallelogrammum, Cylindrum, aut Prisma, super eadem basi æque altum; ut 1 ad 2, per 1 hujus:) Sintque in distantiis, ut od, 1d, 2d, 3d, &c. quarum maxima D: Erunt Momenta, ut odp, 1dp, 4dp, 9dp, &c. usque ad DP; series Secundanorum, cujus Index 2. Adeoque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{3}$NDP = $\frac{1}{2}$NP × $\frac{2}{3}$D. Adeoque, Distantia Centri Gravitatis à vertice est $\frac{2}{3}$D per 24 Cap. 4.

op, 1p, 2p, 3p,----P.
od, 1d, 2d, 3d,----D.
odp, 1dp, 4dp, 9dp,---DP.

$\frac{1}{3}$NDP = $\frac{1}{2}$NP × $\frac{2}{3}$D.

D Item; Cum Pyramis vel Conus, circa Triangulum ABB, (propter diametros Circulorum, vel latera similium Planorum, in ratione distantiarum a vertice; adeoque eorum planum, in distantiarum ratione duplicata) sit infinita series Secundanorum; (puta ut op, 1p, 4p, 9p, &c. usque ad P;) cujus Index 2; & omnium summa, ut $\frac{1}{3}$NP; (hoc est, Pyramis seu Conus, ad circumscriptum Prisma vel Cylindrum, ut 1 ad 3;) per 1 hujus; Sintque, distantiæ ut od, 1d, 2d, 3d, &c. usque ad D: Erunt momenta

op, 1p, 4p, 9p-----P.
od, 1d, 2d, 3d-----D.
odp, 1dp, 8dp, 27dp----DP.

$\frac{1}{4}$NDP = $\frac{1}{3}$NP × $\frac{3}{4}$D.

Momenta, ut $0dp$, $1dp$, $8dp$, $27dp$, &c. usque ad DP; series Tertianorum: cujus Index 3. Adeóque (per 1 hujus) simul omnia, ut $\frac{1}{4}$NDP$=\frac{1}{3}$NP$\times\frac{3}{4}$D. Adeóque, Distantia Centri Gravitatis a vertice, $\frac{3}{4}$D. per 24 Cap. 4.

Similiter omnino, de Complemento Parabolæ dicendum: quæ series est Secundanorum. *Complementum* autem *Semi-parabolæ*, appello, id quod cum semi-parabolâ complet parallelogrammum circumscriptum; (cujus diameter, est parabolæ Tangens in vertice; & ordinatim-applicatæ, parallelæ diametro parabolæ;) quod, utrinque circa eandem sui diametrum duplicatum, appello, *Complementum Parabolæ.* (Puta, quod continetur inter duas lineas Parabolicas convexas AB, AB, quas in communi vertice A, tangat AD, complementi diameter; basinque huic ordinatim-applicatam BB; cui parallelæ intelliguntur rectæ figuram complentes.) Hujúsque ordinatim-applicatæ ad diametros suas; sunt ut diametri interceptæ in Parabola, ad suas ordinatim-applicatas. Adeòque, in duplicatâ ratione Diametrorum, sive Distantiarum à vertice. Cùm itaque sit (ut Pyramis) Series Secundanorum: Momenta, sunt Series Tertianorum: Adeóque simul omnia, ut $\frac{1}{4}$NDP$=\frac{1}{3}$NP$\times\frac{3}{4}$D: Et Centri gravitatis à vertice distantia; $\frac{3}{4}$D. Ut, de Cono & Pyramide, ostensum est,

Complementum Paraboloidis Cubici, (propter hujus Paraboloidis ordinatim-applicatas, in subtriplicatâ ratione diametrorum interceptarum; adeóque ordinatim-applicatas Complementi, in Triplicatâ ratione diametrorum, sive distantiarum à Vertice Complementi;) est Series Tertianorum: puta, ut $0p$, $1p$, $8p$, $27p$, &c. usque ad P; adeoque summa omnium ut $\frac{1}{4}$NP; per 1 hujus; (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 1 ad 4:) Cum itaque Distantiæ sint $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad D: Momenta erunt, ut $0dp$, $1dp$, $16dp$, $81dp$, usque ad DP. Et simul omnia (per 1 dujus) ut $\frac{1}{5}$NDP$=\frac{1}{4}$NP$\times\frac{4}{5}$D. Et Distantia Centri gravitatis; $\frac{4}{5}$D. per 24 Cap. 4. E.

$0p$, $1p$, $8p$, $27p$.......P

$0d$, $1d$, $2d$, $3d$......D

$0dp$, $1dp$, $16dp$, $81dp$....DP.

$\frac{1}{5}$NDP $= \frac{1}{4}$NP $\times \frac{4}{5}$D.

Atque, ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis Paraboloidum Complementis, aut etiam solidis eorum conversione circa Axem suum factis: aliisve secundum ejusmodi alias series.

Parabola, BAB, (propter ordinatim-applicatas in subduplicatâ ratione diametrorum,) est series Subsecundanorum; cujus Index $\frac{1}{2}$: F.
puta, $\sqrt{0p}$, $\sqrt{1p}$, $\sqrt{\ p}$, $\sqrt{\ p}$, &c. usque ad P: Adeóque simul omnia, ut $\frac{2}{3}$NP; (nempe ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3,)

per 1 hujus. Et propter distantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. usq ad D; Momenta erunt, ut $0d\sqrt{0p}$, $1d\sqrt{1p}$, $2d\sqrt{2p}$, $3d\sqrt{3p}$ &c. vel, ut $0d\sqrt{p}$, $d\sqrt{1p}$, $d\sqrt{8p}$, $d\sqrt{27p}$, &c. usque ad DP: quæ est, series Cubor[um] Subsecundanorum; cujus Index 1½ vel $\frac{3}{2}$. Adeóque (per 1 hujus) om[n]ia, ut $\frac{2}{5}NDP = \frac{2}{3}NP \times \frac{3}{5}D$.

$$\sqrt{0p},\ \sqrt{1p},\ \sqrt{2p},\ \sqrt{3p} \ldots P$$
$$0d,\ 1d,\ 2d,\ 3d \ldots D$$
$$0d\sqrt{p},\ 1d\sqrt{p},\ 2d\sqrt{2p},\ 3d\sqrt{3p} \ldots DP.$$
$$d\sqrt{0d},\ d\sqrt{p},\ d\sqrt{8p},\ d\sqrt{27p} \ldots DP.$$
$$\tfrac{2}{5}NDP = \tfrac{2}{3}NP \times \tfrac{3}{5}D.$$

Et distantia Centri gravitatis, $\frac{3}{5}$ D.

Paraboloides Cubicale, (propter ordinatim-applicatas in ratione di-ametrorum subtriplicatâ,) est series Subtertianorum; cujus Index puta ut $\sqrt{c\,0p}$, $\sqrt{c\,p}$, $\sqrt{c\,2p}$, $\sqrt{c\,3p}$, &c. ad P. Et omnium summa, ut $\frac{3}{4}$NP per 1 hujus. (hoc est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 3 ad 4.) Et, propter distantias, ut $0d$, $1d$, $2d$, $3d$, &c. ad

$$\sqrt{c\,0p},\ \sqrt{c\,1p},\ \sqrt{c\,2p},\ \sqrt{c\,3p} \ldots P$$
$$0d,\ 1d,\ 2d,\ 3d \ldots D$$
$$0d\sqrt{c\,0p},\ 1d\sqrt{c\,p},\ 2d\sqrt{c\,2p},\ 3d\sqrt{c\,3p} \ldots DP.$$
$$d\sqrt{c\,0p},\ d\sqrt{c\,p},\ d\sqrt{c\,16p},\ d\sqrt{c\,81p} \ldots DP.$$
$$\tfrac{3}{7}NDP = \tfrac{3}{4}NP \times \tfrac{4}{7}D.$$

D: Momenta erunt, ut, $0d\sqrt{c\,0p}$, $1d\sqrt{c\,1p}$, $2d\sqrt{c\,2p}$, $3d\sqrt{c\,3p}$, &c. ad DP; sive, ut $d\sqrt{c\,0p}$, $d\sqrt{c\,p}$, $d\sqrt{c\,16p}$, $d\sqrt{c\,81p}$, &c. ad DP: series Biquadratorum subtertianorum; cujus Index 1⅓ vel $\frac{4}{3}$. Et summa omnium (per 1 hujus) ut $\frac{3}{7}NDP = \frac{3}{4}NP \times \frac{4}{7}D$. Et distantia Centri gravitatis, $\frac{4}{7}$ D.

Et similiter de aliis seriebus judicandum.

Nempe, universaliter; Si Index seriei, Ponderum sit S; adeóque (per 1 hujus) summa totius, ut $\frac{1}{S+1}$NP: Index seriei Momentorum, erit $S+1$; adeóque horum summa, ut $\frac{1}{S+2}$ NDP. Quæ per summam Ponderum $\frac{1}{S+1}$ NP divisa; exhibet $\frac{S+1}{S+2}$ D, distantiam Centri gravitatis à vertice; nempe ad distantiam maximam ut $S+1$, ad $S+2$: Adeóque reliquum distantiæ (quæ est distantia Centri gravitatis à Basi) ut $\frac{1}{S+2}$ D. Et propterea, Axis portio ad Verticem, ad portionem ad Basem, ut $S+1$ ad 1. Quod erat demonstrandum.

Quod-

Quodque de Figuris integris ostensum est; idem de Dimidiis, similiter ostendetur; (Puta, de Semi-Parabolis, Semi-paraboloidibus, & complementis; vel horum Solidis; &c.) quoad distantiam Centri gravitatis à Plano per verticem basi parallelo. Quamquam enim ipsum Centri punctum non hinc innotescat, (quia hujusmodi Dimidiatæ Figuræ, Diametrum non habent, quæ & linea recta sit & singulas ordinatim-applicatas bisecet, quo propositio præcedens hic in subsidium advocetur ut ipsum Centrum determinetur;) tamen, quantum illud à verticis Plano distet, (quod est hujus Propositionis opus,) non minus in dimidiatis, quam in integris figuris, hinc innotescit; & demonstratio similiter quadrat; eadem utique est ordinatim-applicatarum series sive in integris, sive in dimidiis figuris. Ut ex earum definitionibus patet: Dimidiorum enim atque Duplorum, eadem est inter se ratio; per 15 El. 5. I. Fig. 130.

Similiter; Idem obtinet; si non quidem Dimidiata figura (putà, ADB Semi-parabola,) sed utcunque hujusmodi series una ex alterâ dematur; residui Centrum gravitatis (figuræ Diametrum vel Axem habentis) vel saltem Centri Distantia a plano per verticem basi parallelo. Putà; Si Semi-parabolæ ADB, eximatur ADb semi-parabola; residui AbB Centrum Gravitatis innotescit; saltem, quantum à Plano per A distat. Nam ejusdem generis series est, tum ADB tum AbB.

Imo verò; si non ejusdem generis sit ADb, atque ADB; sed verbi gratia, ex ABD Paraboloide Cubico, auferatur AbD Parabola, aut Triangulum, aut alia figura quævis quæ ex aliquâ definitarum serie conflatur: Cognitis enim Totius & Ablati tum magnitudine, tum Centro Gravitatis; etiam Residui cognoscitur; per 27 Cap. 4. Saltem cognitâ utriusque Magnitudine, & Ponderatione respectu expositi plani; cognoscitur Residui Ponderatio & Magnitudo; adeóque & Centri gravitatis distantia; per prop. 24. Cap. 4.

De Frustis item similiter fiet judicium. Nempe, Propter datum vel ipsum Centrum Gravitatis, vel distantiam Centri Gravitatis, una cum magnitudine; totius ADB vel AbB,& ablati ARF,vel AfF; dabitur & Frusti reliqui, FRDB, vel FfbB, ut ante. Per 27, vel 24, Cap. 4. K.

Similiter; de figuris ex hujusmodi pluribus conflatis, fiet judicium: Et speciatim de Planis omnibus Rectilineis, (quippe in Triangula posse dividi, notum est;) & Solidis quæ planis terminantur; quippe, hæc saltem in Pyramides dividi poterunt:) Datis utique partium Magnitudinibus, & Centris Gravitatis; dabitur Totius; per 27 Cap. 4. Vel datis saltem magnitudinibus, & distantiis centrorum (ab exposito plano) adeóque Ponderationibus; dabitur etiam Totius Ponderatio L.

& Magnitudo; adeóque & Centri gravitatis distantia à plano exposito.

Neque hæc de figuris Planis tantùm obtinent; sed in Solidis non minùs. Putà, si Conoides Parabolicum, vel Paraboloidicum, vel Conus etiam, aut Pyramis, vel Cylindrus, aut Prisma, &c. Conicè excavetur; vel horum Frusta, Cylindricè; aut alias mille modis: ut ex jam dictis satis demonstratur.

SCHOLIUM.

HActenus itaque Centrum Gravitatis invenimus, in figuris omnibus Planis Rectilineis; & Solidis, quæ planis terminantur: Sed & in Planis Curvilineis, & Solidis curvis superficiebus terminatis, non paucis; tum Magnitudinem tum & Centrum Gravitatis determinavimus. Et quidem longè pluribus quàm quò pertigerat doctrina Veterum. Atque, in sequentibus, ad plura adhuc procedendum, ultra quàm (quantum scio) quisquam pertigit Recentiorum; saltem ultra quàm à quoquam editum est, ante editam nostram (unde hæc directâ methodo deducuntur) Arithmeticam Infinitorum.

Quod autem, de Figurarum Frustis, figurisque Excavatis, aut aliàs multatis, & figurarum Aggregatis, &c. ad hanc propositionem observatum est: Etiam in sequentibus intelligendum erit. Utpote ex prop. 17. Cap. præced. deducendum.

Plura verò quæ huc spectant, videat (cui id lubitum erit) in nostrâ *Arithmeticâ Infinitorum*; (ubi hæc Methodus fusiùs traditur:) Et in nostro *Commercio Epistolico*, (cum D Fermatio, aliisque,) Epist. 16, ejúsque Appendice.

PROP.

PROP. VII.

Si intelligatur ex Rectis Planisve, secundum aliquam ex Reciprocis (in def. 2. hujus definitis, Indicem habentibus Negativum) seriem infinitam, (ab ipsâ seriei origine inchoatam, & dato terminatam,) Figura conflari: A:

Habebit hæc, ad Verticem, latitudinem Infinitam: B.

Finitam tamen, si, ex parte Verticis, intelligatur vel tantillum Plano parallelo abscindi; (adeóque figura saltem truncata magnitudinis erit finitæ:) C.

Aream verò; quæ sit ad Parallelogrammum, vel Solidum Prismaticum, super æquali Base æquè altum; ut 1, ad *Indicem Unitate auctum:* D.

Adeóque vel magnitudine Finitam; si Index sit major quam — 1; (putà — $\frac{1}{4}$, — $\frac{1}{2}$, — $\frac{3}{4}$, &c.) G.

Vel Infinitam; si Index sit — 1: E.

Vel Plusquam Infinitam; si sit Index minor quam — 1; (putà, — 2, — 3, &c.) F.

Quæque sunt magnitudinis Infinitæ, (aut plusquam Infinitæ,) Centrum Gravitatis non habent. H.

Quæ sunt finitæ magnitudinis, siquod habent Centrum Gravitatis, in eâ habent à vertice distantiâ, quâ ita dividitur Diameter vel Axis, ut *pars ad Basin*, sit ad *partem quæ est ad Verticem*; ut 1, ad *Indicem seriei Unitate auctum.* I. L.

Habent autem Centrum Gravitatis hujusmodi Figuræ (magnitudinis finitæ) si sint Integræ, (hoc est, utrinque Circa Diametrum vel Axem similiter positæ;) Nempe, in Axis illo puncto, quod, ita ut dictum est, distat. K.

Ex dimidiatis verò (vel quæ harum instar sunt) quæ habent, quæque non habent, in Propositione sequente dicetur. L.

Quæ,

M. Quæ, exemplis facile explicantur.

N. Deque his Figuris Truncatis, aut aliàs Mulctatis, vel Aggregatis; idem judicandum est atque de illis propositionis Præcedentis.

O. Atque hæ *Figuræ interminabiles* (planæ, solidæve;) ad *Paraboloidium* genera spectant, vel ad harum solida.

P. Ipsæ autem *Lineæ Curvæ*, ad quarum convexas adjacent Interminabiles hujusmodi Figuræ Planæ; ad *Hyperbolarum* seu *Hyperboloidium* genus referendæ sunt.

Q. Sed & quæ ad *Hyperboloidium* harum (ea sola excepta quæ est vera Hyperbole Appolloniana) *Concavas* adjacent *Figuræ planæ*, (concava & rectis terminatæ) tum quam magnitudinem habent hinc determinabitur; tum & Centrum gravitatis datum erit.

A. Fig. 129. INtelligatur, ad Diametrum vel Axem A D, hujusmodi figura plana solidáve construi, A δ B D; cujus Basis D B; & huic parallelæ rectæ aut superficies planæ (figuram complentes) ordinatim-applicatæ, secundum seriem ex Reciprocis illis quamlibet.

Erit, propter seriei Directæ terminum primum o, seriei reciprocæ primus terminus ∞ infinitus: puta $\frac{1}{0} = \infty$. (Nam, ubi quantitas quælibet dividitur; si dividens sit o, quotiens erit ∞: quippe nulla quantitas finita, pro quotiente posita, dividentem o multiplicans, restituet dividendam.) Adeóque Recta Verticis A δ erit interminabilis: Sive, figuræ latitudo, in Vertice, infinita.

B. Cùm vero Seriei directæ terminus post primum quilibet quantitatem habeat finitam; seriei reciprocæ reliqui omnes termini sunt finiti; adeóque figuræ infra verticem finita latitudo. (Nam, quantuluscunque sit ille post primum terminus seriei directæ; hic quantitatem finitam dividens, quotientem dabit finitum.)

C. Adeóque, utut tota à vertice ad basin figura, magnitudinis esset infinitæ (propter infinitam verticis latitudinem;) si tamen intelligatur, ex parte verticis, vel tantillum truncari plano basi parallelo; reliquum figuræ, magnitudinis erit finitæ. (Erit utique magnitudinis datæ, altitudo finita; sed & truncatæ latitudo vel amplitudo per jam ostensa; adeóque tota figura, sive plana sit sive solida, sic truncata, magnitudinis erit finitæ.)

Et

Est autem, à vertice ad basin tota, ad Parallelogrammum, vel solidum Prismaticum (sive sit Parallelepipedum, sive aliud Prisma, sive Cylindrus, vel istiusmodi quodvis Solidum, super quâcunque base, eandem ubique; per totam altitudinem, amplitudinem habens,) super æquali base, æque altum; hoc est, ad seriem totidem ultimo æqualium, (per def. 1. Cap. 4.) ut 1, ad indicem seriei Unitate auctum; per 1 hujus. D.

Adeóque, (propter Reciprocarum Serierum Indicem negativum,) si Index, sit -1; erit $-1+1=0$; adeóque ratio 1 ad 0, Infinita. Et propterea si series illa sit Reciproca primanorum, (quale est, complementum Hyperbolæ Apollonianæ, per prop. 95. Arithm. Infin.) figura erit magnitudinis infinitæ. (Quippe ad finitam datam, ut 1 ad 0.) E.

Si verò Index sit minor quam -1, (hoc est, magis negativus,) puta, $-1\frac{1}{2}$, -2, -3, &c. etiam addito 1, manebit adhuc negativus; puta $-1\frac{1}{2}+1=-\frac{1}{2}$. $-2+1=-1$. $-3+1=-2$, &c. (per 8 Cap. 1.) adeóque, ratio 1 ad $-\frac{1}{2}$, 1 ad -1, 1 ad -2, &c. Nempe; ut Positivi ad Negativum; quæ est plusquam infinita; (nam, 1 ad 0, est infinita; ergo, 1 ad minus quam 0, est major quam infinita; per 8 El. 5.) Ergo, & Figura (quæ, ad datam, illam habeat rationem,) plusquam Infinita. F.

Sin Index major sit quam -1, (hoc est, minus negativus,) puta, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, &c. addito 1, fiet Positivus; puta $-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$. $-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$ $-\frac{3}{4}+1=\frac{1}{4}$. &c. (per 8 Cap. 1.) Adeóque, ratio 1 ad $\frac{3}{4}$, 1 ad $\frac{2}{3}$, 1 ad $\frac{1}{2}$, 1 ad $\frac{1}{3}$, 1 ad $\frac{1}{4}$, &c. finita. Ergo, & Figura (ut quæ, ad datam finitam, finitam habet rationem,) magnitudinis finitæ; utut, latitudinis in vertice, infinitæ. G.

Quæ autem Magnitudinis sunt Infinitæ, (aut plusquam infinitæ,) Centrum gravitatis non habent. Quippe, si in ipsâ verticis rectâ, A δ, intelligeretur, (aut supra verticem; aut etiam per Basin, aut infra Basin:) Figura tota (respectu Plani basi paralleli per Centrum illud transeuntis,) ad unas partes ponderaret; adeóque non esset Æquilibrium. Sin intra verticem & Basin intelligatur; quantulacunpue sit a vertice distantia; planum basi parallelum per hoc transiens, Figuram dividet in segmenta duo; quorum illud ad basin, Finitum erit, atque in distantiâ finitâ, (per jam ostensa;) illud autem ad verticem, Infinitum erit: (quippe, si à toto Infinito, Finitum auferatur: reliquum erit Infinitum: secus enim, Finitum Finito additum, faceret Infinitum:) Adeóque, Infinitum hoc ad verticem (in quantulacunque distantiâ) Finito illi ad basin, (in distantiâ quantacunque finitâ,) præponderabit: Adeóque non erit in illo plano Centrum Gravitatis. Nusquam igitur. H.

Si

I. Si verò sint magnitudinis Finitæ; puta, secundum seriem cujus Index
Fig. 131. sit $-S$, major quam -1, (ut jam ostensum est,) ostendetur (ut in prop. præced.) totam figuram, sive seriei summam, esse $\frac{1}{-S+1}$ NP, (quæ, nempe sit ad parallelogrammum, vel solidum Prismaticum, NP, ut 1 ad $-S+1$,) & summam momentorum, sive momentum totius, (respectu plani per verticem A ducti, basi paralleli,) ut $\frac{1}{-S+2}$ NDP, (nempe, ad momentum ipsius NP in distantiâ D suspensi, ut 1 ad $-S+2$; propter seriem Momentorum, uno gradu altiorem, quæ est series Ponderum:) per 1 hujus. Adeoque, propter $\frac{1}{-S+2}$ NDP $= \frac{1}{-S+1}$ NP $\times \frac{-S+1}{-S+2}$ D, erit distantia Plani Æquilibrii (per 20 Cap. 3.) adeóque & Centri Gravitatis siquod est, (per 25 Cap. 4.) $\frac{-S+1}{-S+2}$ D; adeóque reliquum distantiæ maximæ, quæ baseos est,) $\frac{1}{-S+2}$ D. Hæc igitur ad illam, est ut 1 ad $-S+1$;

K. (in ratione finitâ; propter $-S+1$ quantitatem positivam:) Si itaque tota distantia D (basis à vertice,) ita dividatur putà in C; ut pars ad basin, CD, sit ad partem quæ est ad verticem, CA, ut 1 ad $-S+1$; planum per C transiens, basi parallelum, est Planum Æquilibrii. per 20 Cap. 3. Et quidem (si utrinque ad Diametrum vel Axem similiter construatur figura) in ipso Diametri vel Axis puncto C, (per 5 hujus.) Sin minùs; saltem siquod est Centrum Gravitatis, in eo plano est. per 24 Cap. 4.

L. Dico autem, *siquod est*; quoniam, in figurâ dimidiatâ (vel quæ istiusmodi est,) fieri potest, ut Centrum gravitatis, utut in C definitâ intelligatur, intelligenda tamen sit ab ipso C puncto in infinitâ distantiâ, (ut in prop. seq. ostendetur,) adeóque nusquam erit.

M. Exempli gratiâ. Si sit ADB figura, ex serie reciprocâ subsecundanorum, conflata; (puta, cujus rectæ vel plana sint in reciprocâ ratione ordinatim-applicatarum in parabolâ:) cujus Index, $-\frac{1}{2}$. Adeoque, ad inscriptum Parallelogrammum vel Prisma

$\frac{1}{\sqrt{0}}p.$ $\frac{1}{\sqrt{1}}p.$ $\frac{1}{\sqrt{2}}p.$ $\frac{1}{\sqrt{3}}p \ldots\ldots$ P

$0d.$ $1d.$ $2d.$ $3d \ldots\ldots$ D

$\frac{0}{\sqrt{0}}dp.$ $\frac{1}{\sqrt{1}}dp.$ $\frac{2}{\sqrt{2}}dp.$ $\frac{3}{\sqrt{3}}dp \ldots\ldots$ DP.

$\sqrt{0}dp.$ $\sqrt{1}dp.$ $\sqrt{2}dp.$ $\sqrt{3}dp \ldots\ldots$ DP.

$\frac{2}{3}$ NPD $= 2$ NP $\times \frac{1}{3}$ D.

ma ADBΔ, (quod ſit N P,) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $\frac{1}{2}$, vel 2 ad 1: nempe ut 2 N P. Momentorum ſeries, indicem habebit $-\frac{1}{2}+1$ vel $\frac{1}{2}$; (quippe uno gradu altior quam Ponderum, propter diſtantias arithmetice proportionales:) Adeóque totius momentum, ad momentum Parallelogrammi vel Priſmatis in diſtantiâ maximâ appenſi, (quod ſit N P D,) ut 1 ad $\frac{1}{2}+1$; hoc eſt, ut 1 ad $1\frac{1}{2}$, vel 2 ad 3: Nempe, $\frac{2}{3}$ N P D $=$ 2 N P $\times \frac{1}{3}$ D. Diſtantia itaque Plani Æquilibrii (&, ſiquod eſt, Centri Gravitatis,) à vertice, eſt $\frac{1}{3}$ D. ejuſdemque propterea à Baſi diſtantia, $\frac{2}{3}$ D. Adeóque hæc ad illam, (hoc eſt C D ad C A,) ut 2 ad 1: vel 1 ad $\frac{1}{2}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{2}+1$. — Fig. 129. Fig. 131.

Si ſit ex ſerie reciprocâ Tertianorum; cujus Index $-\frac{1}{3}$. Erit ſumma Ponderum, (propter $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$; &, ut 1 ad $\frac{2}{3}$, ſic 3 ad 2;) $\frac{3}{2}$ NP. Index ſeriei momentorum $-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$. Adeóq; (propter $\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$; & 1 ad $\frac{5}{3}$, ut 3 ad 5) ſumma Momentorũ, $\frac{3}{5}$NPD $=\frac{3}{2}$ NP $\times\frac{2}{5}$D. Adeóq; plani æquilibrii (&, ſi quod eſt, Centri Gravitatis) diſtantia à vertice, $\frac{2}{5}$D; à baſe, $\frac{3}{5}$D: Adeoque hæc ad illam, (nempe C D ad C A,) ut 3 ad 2; vel 1 ad $\frac{2}{3}$; hoc eſt, 1 ad $-\frac{1}{3}+1$. Atque in aliis ſimiliter.

$\frac{1}{\sqrt{c}c}p.$	$\frac{1}{\sqrt{c}1}p.$	$\frac{1}{\sqrt{c}2}p.$	$\frac{1}{\sqrt{c}3}p.$	...... P
0d.	1d.	2d.	3d.	.... D
$\frac{0}{\sqrt{c}o}dp.$	$\frac{1}{\sqrt{c}1}dp.$	$\frac{2}{\sqrt{c}2}dp.$	$\frac{3}{\sqrt{c}3}dp.$	.... D P.
$\sqrt{c}c\,dp,$	$\sqrt{c}\,1dp,$	$\sqrt{c}\,4dp,$	$\sqrt{c}\,9dp$	.... D P.

$\frac{3}{5}$N P D $=\frac{3}{2}$N P $\times\frac{2}{5}$ D.

Si itaque in eâ ratione dividatur A D in C; ſitque figurâ utrinque ſimiliter applicata, ad A D Diametrum vel Axem: erit C Centrum Gravitatis; per 5 hujus. Sin minus; ſaltem planum per C eſt planum Æquilibrii; atque in hoc, ſiquod ſit, Centrum Gravitatis. N.

Porro; Habitis hoc pacto, tum figuræ totius A D B δ, tum abſciſſæ ut AC$\beta\delta$, magnitudine, & Centro gravitatis; ſaltem magnitudine, & plano æquilibrii, plano per axem motûs A δ parallelo; ſeu magnitudine & ponderatione: Habentur reſidui, ſive figuræ truncatæ CβBD, magnitudo & Centrũ Gravitatis; ſaltem magnitudo & ponderatio; adeoq; diſtantia Centri Gravitatis, Planúmve in quo eſt, plano Baſis ſeu Plano huic parallelo per axem motûs, parallelum. Ut in prop. præced.

Et ſimiliter oſtendetur de figuris hujuſmodi alias mulctatis, vel aggregatis; atque in prop. præced.

Figuras autem has interminabiles, ego ad Paraboloidium genera refero; aut horum Solida: propter continuatam ſeriem ſimplicem, aut reciprocam, quâ diſponuntur ordinatim-applicatæ rectæ, vel figuræ planæ, ipſas complentes; ut in Paraboloidibus eorúmque ſolidis. O.

 ob-

Fig.129. observare est. Quâ de causâ, & communem sortem subeunt, cum
Fig.131. in propositione præcedente memoratis, (nisi quod ex his aliquæ sin
magnitudinis infinitæ, & Centrum gravitatis non habeant.) Et qui
dem has in eâdem cum illis propositione comprehendissem, nisi quod i
his (propter infinitatem) speciatim aliqua determinanda essent, quæ i
illis absque aliquâ determinatione proponuntur. Quippe nulla est e
figuris illis quæ vel infinitæ sit magnitudinis, vel Centrum Gravitatis no
habeat.

P. Ipsæ tamen Curvæ, ad quarum Convexas adjacent hujusmodi fig
ræ Planæ, ad Hyperbolarum, vel Hyperboloidium, familiam spe
tant.

Et quidem, quæ terminat figuram planam, ex serie reciprocâ Prim
norum conflatam, (qualis est media Curvarum trium in figurâ adscri
tâ,) est vera *Hyperbola*, Apolloniana; cujus Asymptotæ sunt AD
A δ. (ut prop. 91, 95, Arithm. Infin. ostensum est.) Atque perin
omnino est, sive, si ex parte D terminata, sit interminata versus δ;
sive, ex parte δ terminata, interminata sit versus D. Utrovis enim mo
do evadet figura simpliciter infinita.

Reliquæ vero, quæ *Hyperboloides* dici poterunt; duabus item A
symptotis A D, A δ, interjacent: ita quidem ut quæ, versus D termina
tæ & interminatæ versus δ, figuras terminant magnitudine finitæ;
eædem terminatæ versus δ, & interminatæ versus D, figuras termina
bunt plusquam infinitas: Et contra. Quippe, si ad A D ordinatim
applicatæ, & ipsi A δ parallelæ sint, verbi gratiâ, in serie recipro
Subsecundanorum; ordinatim-applicatæ ad A δ, ipsi A D parallelæ
erunt reciproca series Secundanorum; Et figura ex illi constans non in
finita; ex his vero, plusquam infinita. Et in reliquis similiter. Ut
ad prop. 105. ***Arithm. Infin.*** ostendimus.

Q. Atque hinc etiam constat, hujusmodi Hyperboloidium figuras, Curv
Concavâ terminatas, quadrandi methodus; & Centrum Gravitatis
investigandi. Cum enim Frusti C β B D, (ut hîc & prop. seq. osten
sum est,) & Parallelogrammi D C β *d*, (ut notum est) tum Magni
tudo, tum Centrum Gravitatis habetur: Habebitur & Hyperboloid
os β B *d*, magnitudo & gravitatis Centrum. Atque hoc quidem si
figura adjacens convexæ, finita sit, sive plusquam infinita; quippe ea
dem est curva (utut secundum aliam diametrum considerata) quæ u
tramque terminat; ut modò ostensum est. At in verâ Hyperbolâ (ta
que, ex jam traditis solâ,) non idem fiet; quippe ad cujus convexam
adjacens figura interminabilis est & magnitudine infinita; sive AD
sive A δ, pro diametro habeatur.

SCHO

SCHOLIUM.

Atque hactenus (ut de Rectilineis Planis, & figuris Solidis quæ planis terminantur, nihil addam,) ostendimus in Planis Curvilineis omnibus, quæ ad genus Parabolicum vel Paraboloidicum spectant, & horum Solidis; atque ex Reciprocis, & Solidis horum, quotquot Centrum Gravitatis habent; distantiam Centri Gravitatis à Vertice: Adeóque, si pro Diametro vel Axe Rectam habeant per omnium sive rectarum sive planorum, ex quibus (secundum def. 1. Cap. 4.) conflari intelligatur figura, centra gravitatis transeuntem; ipsum Gravitatis Centrum totius; utpote quod in ipsâ Diametro Axeve constitutum est; per 5 hujus.

In hujusmodi tamen figuris Dimidiatis (ut Semiparabolâ, Semiparaboloide, &c.) aliisque ejusmodi; utut de distantia Centri Gravitatis à vertice constet; de ipso Centri puncto, propter ipsius ab illâ Diametro Axéve distantiam nondum traditam, nondum constat.

Hujus igitur à Diametro Axéve distantia, propositione sequente tradetur, (atque, in solidis, tertium adhuc æquilibrii planum,) ut ipsum centri punctum determinetur.

PROP. VIIII.

Semiparabolæ, Semiparaboloidis, aut Complementi utriusvis; Planíve Reciproci (centrum gravitatis habentis;) ad diametrum axémve adjacentis: *Distantia Centri Gravitatis ab illâ Diametro Axéve*, est, *ad distantiam inde puncti medii (vel centri gravitatis Basis,)* ut *Index seriei Unitate auctus*, ad *Duplum ejusdem Indicis unitate auctum.* A: Fig. 131.

In Solidis autem; pro *Basis puncto medio* (quod in planis est basis centrum gravitatis) sumendum est *Centrum Gravitatis Basis*; Eritque totius Centrum gravitatis, in eo per Diametrum Axémve plano quod per illud Basis Centrum-gravitatis transit; adeóque & per omnium Basi E.

 paral-

Fig. 129. Fig. 131. parallelorum Planorum, (quæ ſimiliter poſita ſupponimus,) centra gravitatis.

(Quod quidem planum, in ſolidis ex Planorum ſemiconverſione (aliâve converſione quâvis imperfectâ) circa axem illum deſcriptis; (qualia ſunt, Semiconus; Semipyramis; Semi-conoides vel Semi-Pyramidoides Parabolicum, vel Paraboloidicum; Semi-ſolidum ex converſione figuræ Reciprocæ circa axem ſuum; & horum omnium ſegmenta quælibet, duobus per axem planis, interjecta:) illud eſt, quod Baſis arcum biſecat.)

Atque, pro Indicis ſeriei *Duplo*; ponendum erit *Seſquialterum ejuſdem Indicis.*

C. Fig. 132. Adeóque; hujuſmodi Dimidiatarum figurarum Planarum (quotquot habent) omnium; & Solidarum circa illas conſtructarum, quarum Baſis Centrum-Gravitatis notum eſt; Centrum gravitatis determinatur.

D. Nempe; In Semiparabolâ; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{3}{5}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{8}$ Latitudinis (ſeu Baſeos) Parallelogrammi Circumſcripti, vel $\frac{3}{4}$ Semi-latitudinis.

In Semi-paraboloide Cubico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{4}{7}$ altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{14}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{7}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Biquadratico; diſtat à Tangente Verticis, $\frac{5}{9}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{12}$ Latitudinis; vel $\frac{5}{6}$ Semi-latitudinis.

In Semiparaboloide Surdeſolidali; diſtat â Tangente Verticis, $\frac{6}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{6}{14}$ Latitudinis; vel $\frac{6}{7}$ Semilatitudinis. Et ſimiliter in Semiparaboloidibus ſequentibus, mutatis mutandis.

In Semiparabolæ Complemento; Diſtat à rectâ per Complementi verticem (quæ eſt parabolæ Diameter,) $\frac{3}{4}$ Altitudinis; à Diametro Complementi, (quæ eſt Parabolæ Tangens in vertice,) $\frac{3}{10}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{5}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloidis Cubicalis; Diſtat à vertice Parallelogrammi circumſcripti (vel Paraboloidis Diametro) $\frac{4}{5}$ Altitudinis; à Diametro (vel Paraboloidis Tangente in vertice,) $\frac{4}{14}$ Latitudinis; vel, $\frac{4}{7}$ Semilatitudins.

In Complemento Semiparaboloidis Biquadraticalis; diſtat à verticis rectâ, (baſi parallelâ,) $\frac{5}{6}$ Altitudinis; à Diametro ejus, $\frac{5}{18}$ Latitudinis, vel $\frac{5}{9}$ Semi-latitudinis.

In Complemento Semiparaboloidis Surdeſolidalis; diſtat à verticis rectâ, $\frac{6}{7}$ Altitudinis; ā Diametro, $\frac{6}{22}$ Latitudinis; vel $\frac{6}{11}$ Semilatitudinis. Et in ſequentibus ſimiliter, mutatis mutandis.

Figuræ Reciprocæ dimidiatæ, ſecundum ſeriem cujus Index non eſt major, (hoc eſt, non minus negativus,) quam $-\frac{1}{2}$, conſtitutæ; Centrum Gravitatis non habent. Sin major ſit index quam $-\frac{1}{2}$; ſequuntur ſerierum directarum leges. Nempe, B. Fig. 133.

Si Index ſit $-\frac{1}{3}$; Centrum gravitatis diſtat à vertice figuræ, $\frac{2}{5}$ Altitudinis; ab ejus Diametro, $\frac{2}{2}$ Latitudinis (ſeu Baſeos) Inſcripti Parallelogrammi; vel $\frac{2}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{4}$; diſtat à Vertice, $\frac{3}{7}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{4}$ Latitudinis; vel, $\frac{3}{2}$ Semilatitudinis.

Si Index ſit $-\frac{1}{5}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{9}$ Altitudinis; à Diametro $\frac{4}{6}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{3}$ Semilatitudinis. Et ſic deinceps.

Si Index ſit $-\frac{2}{5}$; diſtat à vertice, $\frac{3}{8}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{3}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{3}{1}$ Semi-latitudinis.

Si index ſit $-\frac{3}{7}$; diſtat à Vertice, $\frac{4}{11}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{4}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{4}{1}$ Semi-latitudinis.

Si Index ſit $-\frac{4}{9}$; diſtat à Vertice, $\frac{5}{14}$ Altitudinis; à Diametro, $\frac{5}{2}$ Latitudinis; vel $\frac{5}{1}$ Semi-latitudinis. Et in reliquis ſimiliter, mutatis mutandis, fiet ex calculo judicium.

In

E. In Figuris Solidis, idem plane obtinet atque in Planis, ſecundum eaſdem ſeries conſtructis; niſi quod, pro *Semi-Latitudine* in planis, ponenda erit in Solidis (in illo plano quod per diametrum axémve, & Centrum-gravitatis Baſis, incedit,) *Diſtantia Centri-gravitatis* Baſis, à Diametro vel Axe; vel, pro *Latitudine* in illis, *Dupla illa Diſtantia* in his. Atque, pro *Duplo Indicis*, Indicis *Seſquialterum*.

Putà; Si ſeriei Index ſit, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. 2, 3, 4, 5, &c. $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, &c. $-\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{7}$, $-\frac{4}{9}$, &c. qui, in Planis (ut dictum eſt) exhibet $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{6}{14}$, &c. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{14}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{6}{22}$, &c. $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{6}$, &c. $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, &c. *Latitudinis*; vel $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, &c. $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{6}{11}$, &c. $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, &c. $\frac{3}{1}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{5}{1}$, &c. *Semilatitudinis*: Subſtituendum erit, in Figuris Solidis, $\frac{6}{7}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{12}{13}$, &c. $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{11}$, $\frac{10}{14}$, $\frac{12}{17}$, &c. $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{7}$, &c. $\frac{6}{4}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{12}{6}$, &c. *Diſtantiæ* Centri gravitatis Baſis, à Diametro vel Axe.

F. Habet autem Centrum Gravitatis Figura Solida, ſi ſeriei Index ſaltem major ſit, quam $-\frac{2}{3}$.

G. Si quando igitur ad communem Rectam per Verticem, (aut aliam unam aliquam rectis per verticem parallelam,) contrario ſitu ponantur hujuſmodi figuræ (planæ, ſolidæve,) ſimiles & æquales: Erit Centrum Gravitatis in illa communi rectâ, atque in eâ à communi Diametro Axéve diſtantiâ, quam in ſingulis caſibus jam determinavimus. Sin vel diſſimiles vel inæquales vel diſſimili ſitu poſitæ ſint ejuſmodi figuræ dimidiatæ; cognita tamen erit commune ſimul utriuſque Centrum Gravitatis; per 27 Cap. 4.

Quódque de figuris Truncatis aut aliàs Mulctatis, vel Aggregatis, in duabus propoſitionibus præcedentibus dictum eſt: Et hic ſimiliter intelligendum eſt.

A. ESto enim ad AD diametrum vel axem, adjacens iſtiuſmodi Figura Plana dimidiata, cujus parallelæ rectæ figuram complentes, ſint ſecundum ſeriem directam cujus Index ſit S; vel reciprocam, cujus Index

dex $-S$. Cúmque singularum rectarum centra gravitatis sint ipsarum puncta media, (per 2 hujus,) atque perinde ponderant singulæ acsi ex illis punctis mediis suspenderentur totæ, (per 16 Cap. 4.) sintque dimidiæ totis proportionales (per 5 Cap. 1. vel 15 El. 5.) similis erit series Distantiarum centrorum gravitatis (à diametro vel axe) atque ipsorum Magnitudinum seu Ponderum; nempe cujus Index sit item S, vel $-S$. Cúmque Momentorum seu Ponderationum ratio, composita sit ex rationibus Ponderum & Distantiarum, (per 18 Cap. 4.) Erit Momentorum series, ea quæ Indicem habet $S+S$, vel $-S-S$; hoc est $2S$, vel $-2S$. Est ergo (per 1 hujus,) summa Ponderum seu Magnitudinum, hoc est Figura exposita; ad seriem totidem ultimo æqualium, hoc est ad Parallelogrammum super eadem Base æque altum; (puta NP;) ut 1 ad $S+1$; vel (in reciprocis) ut 1 ad $-S+1$, (adeóque, si $-S$ major quam -1, erit $-S+1$ affirmativus; & propterea figuræ magnitudo finita: secus; infinita, vel plusquam infinita:) nempe $\frac{1}{S+1}NP$, vel $\frac{1}{-S+1}NP$. Et summa Momentorum, ad totidem ultimo æqualium, (hoc est, Momentum figuræ expositæ ad momentum Parallelogrammi in distantia D suspensi,) ut 1 ad $2S+1$, vel ad $-2S+1$, (quod itaque finitum erit, si $-2S$ major sit quam -1, vel $-S$ major quam $-\frac{1}{2}$; secus, infinitum:)

$$\frac{1}{S+1}NP\Big)\frac{1}{2S+1}NPD\Big(\frac{S+1}{2S+1}D$$

$$\frac{1}{-S+1}NP\Big)\frac{1}{-2S+1}NPD\Big(\frac{-2S+1}{-2S+1}D.$$

Nempe $\frac{1}{2S+1}NPD$, vel $\frac{1}{-2S+1}NPD$. Hæc itaque summa, per illam divisa, distantiam exhibet Centri gravitatis ab AD, (per 24 Cap. 4.) Nempe; in seriebus directis, $\frac{S+1}{2S+1}D$: In Reciprocis, $\frac{-S+1}{-2S+1}D$. Quod erat propositum.

Requiritur autem, in Reciprocis, quò Centrum gravitatis habeant, ut $-2S$ major sit quam -1; vel $-S$, major quam $-\frac{1}{2}$. Nam, nisi $-S+1$ sit terminus affirmativus; nullum erit Centrum gravitatis, per prop. præced. Atque, nisi & $-2S+1$ sit item affirmativus, (hoc est, $-2S$ major quam -1, per 8 Cap. 1.) nec-dum erit centrum gravitatis: quippe Affirmativi $-S+1$, ad $-2S+1$ qui vel

vel 0 ſit, vel Negativus; ratio erit vel infinita, vel etiam pluſquam infinita; adeóque $\frac{-S+1}{-2S+1}$ D, diſtantia infinita, vel pluſquam infinita; ipſúmque propterea Centrum gravitatis Nuſquam. Unde patet determinatio.

C. Cúmque termini ultimi, (hoc eſt, Baſis,) centrum gravitatis ſit in ipſius puncto medio (ut oſtenſum eſt, ex 2 hujus,) ipſius Diſtantia D, erit ſemi-Latitudo figuræ, ſive Parallelogrammi ſuper eadem baſi æque alti. Unde conſtat particularium caſuum Calculus, quod ad diſtantiam a diametro ſpectat.

D. Sed & Centri Gravitatis à Plano per verticem, diſtantia conſtat, ex 6 & 7 hujus. Ergo & ipſum Centri Gravitatis punctum; (per 16 Cap. 4.) Quod item erat Propoſitum. Idem nempe quod in ſingulis caſibus deſignavimus: Ut ex Calculo patet; ne opus ſit ut ſingulis caſibus immoremur.

E. In figuris Solidis: De Centri gravitatis Diſtantiâ à Vertice, ſimiliter conſtat atque in Planis; ex 6 & 7 hujus.

Quódque ſit in Plano per Diametrum & Centrum Gravitatis Baſis (adeoque & reliquorum baſi parallelorum Planorum Centra Gravitatis; propter omnia, quod ſupponimus, plana ſimilia, & ſimiliter ad diametrum poſita;) conſtabit ex 4 hujus.

Quód ſit in eâ quam dicimus a Diametro vel Axe diſtantiâ; ſic inde conſtabit. In ſimilibus Planis (ex quibus conflari Solidum intelligitur) Centra Gravitatis ſunt ſimiliter ſita; (quod ex 4 Cap. 4. & 8 Cap. 1. demonſtrabitur:) adeóque ab homologis punctis diſtantia ratione laterum homologorum; vel, rectarum utcunque in ſuis reſpectivè planis ſimiliter poſitarum; (quod ex def. 1. & prop. 4. El. 6. demonſtrabitur:) Cúmque, ob ſimilem, quem ſupponimus, planorum ad Diametrum Axemve ſitum; homologa ſimilium Planorum puncta ſint in Diametro vel Axe conſtituta: Diſtantiæ Centrorum gravitatis à Diametro vel Axe, ſunt in ratione laterum Homologorum, ſive rectarum ſimiliter poſitarum, in ſuis reſpectivè planis: Hoc eſt, (quod ex prop. 20. El. 6. demonſtrabitur,) in ſubduplicatâ ratione Planorum. Adeóque; Si ſeries Planorum, Indicem habeat S, vel $-S$, ſeries Diſtantiarum, Indicem habebit $\frac{1}{2}$ S, vel $-\frac{1}{2}$ S: Et ſeries Momentorum (ut quæ ſunt in ratione ex rationibus Ponderum & Diſtantiarum Centrorum Gravitatis compoſitâ, per 18 Cap. 4.) Indicem habebit $S+\frac{1}{2}S$, vel $-S-\frac{1}{2}S$; hoc eſt $\frac{3}{2}$ S, vel $-\frac{3}{2}$ S. Eſt igitur (poſito P, pro Pondere ſeu Plano ultimo; N, pro numero Planorum, ex quibus conflari intelligatur Solidum; D, pro diſtantia Centri gravitatis Baſis

$\frac{1}{S+1}NP\Big)\frac{2}{3S+2}NPD\Big(\frac{2S+2}{3S+2}D$

$\frac{1}{-S+1}NP\Big)\frac{2}{-3S+2}NPD\Big(\frac{-2S+2}{-3S+2}D$

Basis, à Diametro vel Axe ;) $\frac{1}{S+1}NP$, vel $\frac{1}{-S+1}NP$, Solidum, sive Planorum Ponderúmve Aggregatum :

$\frac{1}{\frac{3}{2}S+1}NPD$, vel $\frac{1}{-\frac{3}{2}S+1}NPD$; sive $\frac{2}{3S+2}NPD$, vel $\frac{2}{-3S+2}NPD$; summa Momentorum, sive Solidi Momentum vel Ponderatio. Adeoque divisâ summâ Momentorum, per summam Ponderum ; prodibit $\frac{2S+2}{3S+2}D$, vel $\frac{-2S+2}{-3S+2}D$, distantia Centri gravitatis Solidi, à diametro vel axe: Nempe, ea quæ sit ad D distantiam Centri Gravitatis Basis, ut $2S+2$ ad $3S+2$, aut $-2S+2$ ad $-3S+2$; hoc est, ut $S+1$ ad $\frac{3}{2}S+1$, aut $-S+1$ ad $-\frac{3}{2}S+1$. Quod erat demonstrandum.

Cúmque, in Figuris Reciprocis, quò Centrum gravitatis habeant, non solum requiratur, ut $-S+1$ sit terminus positivus, (per prop. præced.) Sed & $-\frac{3}{2}S+1$, (ne ratio illius ad hanc sit vel Infinita, vel plusquam Infinita ; adeóque, propter Infinitam, vel plusquam infinitam distantiam, Centrum gravitatis nusquam sit:) major esse debeat (seu minus negativus) $-\frac{3}{2}S$, quam -1 ; sive $-S$, quam $-\frac{2}{3}$: inde constat determinatio. F.

Porro ; quum, in Figuris Solidis, secundum seriem sive Directam, sive Reciprocam constitutis, ostensum sit ; tum, quantum distet Centrum gravitatis (adeóque & planum Æquilibrii) à plano per Verticem basi parallelo ; tum, in quo per axem plano reperiatur ; tum denique, quantum in illo plano à diametro vel axe distat : Datur ipsum Gravitatis Centrum ; dummodo Centrum Gravitatis basis non ignoretur. (per 26 Cap. 4.) Quod erat propositum. Nempe illud ipsum quod in singulis casibus designat propositio : Ut ex Calculo patebit. G.

Denique : Quod, de duabus hujusmodi Figuris Dimidiatis, (similibus & æqualibus,) utrinque ad eandem rectam contrario situ positis ; dictum est : constabit ex 5 hujus. Quódque de iisdem (planis solidisve) figuris dimidiatis (aut quæ harum instar sunt) truncatis, aliásve mulctatis, vel aggregatis, additur, Constat ex 27 Cap. 4.

SCHOLIUM.

IN præcedentium aliquot propoſitionibus; in figuris Parabolis omnibus, & Paraboloidicis, eorúmque Solidis, Centra gravitatis determinavimus. Neque hoc tantum in Figuris integris: Sed & (quod neſcio an alii nobis priores fecerint) in Figuris Dimidiatis; ut Semi-parabolis, Semi-paraboloidibus, &c. etiam in figuris Reciprocis (quot-quot habent) Dimidiatis: Atque in horum omnium Semi-ſolidis aut etiam, Solidorum portionibus quibuſvis, duobus per axem planis interjectis.

De Figuris autem Reciprocis (ut A D B β δ,) ſpeciatim monendum eſt; Utut hæ naturâ ſuâ ſint utrinque in infinitum continuabiles (ſunt utique A D, A δ, ad curvam B β, Aſymptotæ;) nos tamen hic eas conſideramus ut Baſe B D terminatas; [illegible] Diametrum ordinatim-poſitâ (ſicut & Parabolas aliáſque figuras indefinitè continuabiles Baſe pro arbitrio claudimus;) ſed ad partes β δ indefinitè continuatas.

Cúmque harum aliquas magnitudine ſimpliciter Infinitas oſtendimus (nempe, cum Index ſeriei eſt — 1; quo caſu B β curva, eſt vera Hyperbola, cujus Aſymptotæ ſunt A D, A δ;) Alias vero vel Finitas, vel pluſquam Infinitas: ſunt quidem hæ figuræ ad eaſdem curvas utræque terminatæ. Quippe, ſi A D B β δ, terminata baſi B D, interminata verò ad partes β δ, ſit Finita; eadem ex parte β δ terminata, & interminata ex parte B D, erit Pluſquam-infinita: & contra. Quæ verò ad veram Hyperbolam ponitur (ſeriei indicem — 1 habens) utrâvis parte terminetur, (modo ne utrâque,) eſt pariter Infinita: Atque hæc ſola. Quod prop. 105. Arithm. Infin. oſtendimus.

Conſtat autem, ex his Figuris Reciprocis; (quæ inter Geometrica miranda cenſentur;) Figuras longitudine Infinitas (Planas Solidáſve) Magnitudine Finitas eſſe poſſe. Nempe, ſi A D B β δ ex parte β δ interminata, ſeriei Indicem habeat negativum quidem, ſed majorem quam — 1.

Eadémque figura, (longitudine infinita, ſed finita magnitudine) ſi utrinque ad A D diametrum ſimiliter ponatur; habebit (in ipſâ A D) Centrum gravitatis.

Eadem verò figura dimidiata A D B β δ, indicem habens negativum ſed majorem quam — 1; utut magnitudine finita ſit, centrum tamen Grav-

Gravitatis non habebit; nisi & major sit Index quam $-\frac{1}{2}$. Ne quidem, quæ ex duabus hujusmodi dimidiatis utrinque ad infinitam A δ similiter positis conflatur. Distabit utique ab A versus δ, distantiâ saltem infinitâ, vel datâ quâvis majore.

Sin major sit Index quam $-\frac{1}{2}$, Centrum Gravitatis habebit, tum dimidiata illa figura, tum & ex duabus utrinque ad A δ positis conflata.

Item; Figura istiusmodi plana, magnitudine Finita esse potest; (nempe cum Index major est quam -1;) & Solida tamen, quæ hujus conversione fit, magnitudine Infinita: (Nempe, si non & major sit, Index quam $-\frac{1}{2}$.) Quippe, si series Rectarum, planum complentium, indicem habeat $-\frac{1}{2}$; series Planorum, quæ harum conversione circa AD fiunt, Solidum complentium, (propter Plana in ratione duplicatâ rectarum in illis similiter positarum,) Indicem habebit -1 ($= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$.) eritque propterea magnitudinis infinitæ. Sin series Rectarum Indicem habeat minorem quam $-\frac{1}{2}$; series Planorum habebit indicem minorem quam -1; adeóque Solidum erit magnitudinis plusquam infinitæ. Quæ omnia, ex supra demonstratis constant.

Contrà vero; Istiusmodi Figura Plana, non modo magnitudine finita quævis; sed & infinita, modo Index major sit quam -2; circa Aδ conversa: Solidum exhibebit magnitudine finitum: Et quidem, modò Index major sit quam -1; quod Centrum habeat Gravitatis. Quod ex prop. seq. patebit.

PROP. IX.

A. Si Figurà Plana (integra an dimidiata;) cujus ad diametrum vel axem ordinatim-applicatæ rectæ Planum complentes ſint ſecundum ſeriem aliquam vel ex Directis (def. 1. hujus, definitis;) vel ex Reciprocis (def. 2. hujus, definitis;) cujus Index major ſit quam —2; intelligatur, circa rectam per verticem ordinatim-poſitam converti: Solidum converſione factum, erit magnitudinis finitæ. Nempe quod ſit, ad Parallelepipedum, cujus baſis ſit parallelogrammum ſuper eadem cum plano baſe æquè altum, altitudo verò æqualis Peripheriæ (integræ vel partiali, prout converſio fuerit vel perfecta vel imperfecta) Diametri vel Axis puncto quod in baſe eſt, deſcriptæ: ut 1, ad *indicem ſeriei in plano expoſitæ binario auctum*.

Fig. 129, 131, 133.

B. Ejuſque figuræ, ſi Integra ſit (hoc eſt, utrinque ad Diametrum Axemve ſimiliter poſita; ſitque converſio integra;) Centrum gravitatis erit ipſum Punctum verticis Diametri Axiſve.

Si verò (figura plana) Dimidiata ſit; ejúſque ordinatim-applicatæ ſint, ad diametrum vel axem, ad angulos rectos; ſitque Index vel affirmativus, vel ſaltem major quam — 1: Solidum illud, Centrum habebit Gravitatis. Nempe, in illâ, à plano ad expoſitum plano recto, perque ejus Axem incedente, diſtantiâ; quæ eſt, ad diſtantiam puncti medii in baſe plani expoſiti; ut *Index ſeriei, plani expoſiti, binario auctus*, ad *duplum ejuſdem Indicis binario auctum*.

C. Sin major ſit Index ille quam —2, ſed non item major quam — 1: Habebit ſolidum illud magnitudinem finitam, ſed non & centrum gravitatis.

Adeóque

Adeóque; si dimidiata illa figura Plana, sit reciproca secundum seriem cujus Index -1; (quo casu curva, est vera Hyperbola;) & convertatur circa verticem infinitum (quæ est Asymptotarum una interminata) solidum conversione factum, erit magnitudinis finitæ, (estque Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum:*) Centrum autem gravitatis non habebit. Est utique solidum illud, æquale parallelepipedo, cujus Basis sit Parallelogrammum plano inscriptum, altitudo æqualis cuivis ex peripheriis extimis Solidi: Vel; (quod eodem recidit) duplo Cylindri, parallelogrammo illo circa rectam verticis converso descripti. Distantia verò Centri Gravitatis, à Plano per axem expositi plani, simpliciter Infinita. D.

Si Plani series Indicem habeat $-\frac{1}{2}$: Solidum conversione factum, erit ad tale Parallelepipedum (vel duplum Cylindri, ut 1 ad $\frac{1}{2}$ ($= -\frac{1}{2} + 2$;) vel, ut 2 ad 1. Distantia Centri Gravitatis, esset ad semi-latitudinem Parallelogrammi plano inscripti; ut $\frac{1}{2}$, ad -1: plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit. E.

Si Plani series Indicem habeat $-\frac{1}{2}$; (quæ est Reciproca semi-parabolæ:) Solidum erit ad tale Parallelepipedum (vel Cylindri duplum,) ut 1 ad $\frac{3}{2}$ ($= -\frac{1}{2} + 2$;) vel, ut 2 ad 3. Distantia Centri Gravitatis, ad semi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{3}{2}$ ad 1, seu ut 3 ad 2. F.

Si Plani series Indicem habeat $\frac{1}{2}$; (quæ est semi-parabolæ:) Solidum est, ad Parallelepipedum (seu Duplum Cylindri, circumscripto semi-parabolæ Parallelogrammo descripti,) ut 1 ad $2\frac{1}{2}$ ($= \frac{1}{2} + 2$:) vel, ut 2 ad 5. Distantia Centri Gravitatis, ad semi-latitudinem Parallelogrammi; ut $\frac{5}{2}$ ad 3; seu, ut 5 ad 6. G.

Atque in reliquis similiter. H.

Eritque Solidorum ejusmodi, integrâ conversione descriptorum, Centrum Gravitatis (siquod est) in ipso conversionis I.

versionis Axe; ejúsque illo puncto quod distantia jam tradita designat.

K. Semi-solidorum verò, (aut aliàs imperfectâ conversione descriptorum,) Centrum gravitatis (siquod habent) est quidem in distantia jam assignata à plano quod ab axe plani expositi conversione describitur, & in illo per Axem conversionis plano, quod per Centrum Gravitatis figuræ planæ, expositi plani Axe descriptæ, transit:

L. Atque in illa ab axe conversionis distantiâ, quæ est, ad modò dicti Centri gravitatis inde distantiam; ut *Index* seriei expositi Plani *Binario auctus*, ad eundem *Indicem Ternario auctum*; vel (quod eodem recidit) ut Index seriei Solidi conversione facti Unitate auctus, ad eundem auctum Binario.

M. Quódque de Solidis conversione factis dictum est: idem similiter intelligendum erit, de figuris aliis; si, pro Circulis (eorúmve portionibus) conversione descriptis, intelligatur ex similibus figuris planis quibuslibet (circulis illis proportionalibus) similiter ad conversionis axem positis, Solidum conflari.

Quódque jam traditum est; supponendo ordinatim-applicatas in exposito Plano ad hujus diametrum vel axem ad angulos rectos constitutas; adeóque conversionis axem ad plana circa illum posita rectum esse: perinde verum erit, si ad axem utcunque inclinatum intelligantur similia illa plana parallela ordinatim-poni.

N. Item; Si ejusmodi exposita figura plana dimidiata, cujus ordinatim-applicatæ non sint ad angulos rectos, sed ad diametrum suam utcunque inclinatæ; conversione suâ solidum describere intelligatur: describet expositi Plani Diameter, (quæque huic sunt parallelæ rectæ,) non quidem circulum, (ut hactenus;) sed superficiem conicam (convexam concavâmve, prout angulus, quem cum conversionis axe facit Diameter illa, acutus obtu-

obtuſúſve fuerit:) ad quam tamen ſuperficiem Conicam accommodabuntur omnia (mutatis mutandis,) quæ de Circulo illo, ejúſve Plano tradita ſunt.

Denique: Quæ de figurâ, circa rectam in vertice ordinatim-applicatis parallelam conversâ, hic tradita ſunt; ad converſionem circa rectas alias, alio ſitu poſitas, facile accommodantur; Puta, circa Baſin, aliaſve huic parallelas, ſive infra ſive ſupra figuram poſitas; circa Axem, aut hic parallelas, ultra citrave figuram poſitas, ſive adjacentes, ſive utcunque remotas; aliaſque ſitu multis modis variato. Quibus caſibus omnibus, pro re nata, principia jam tradita facile accommodabit prudens Geometra. O.

Esto enim expoſitum Planum, cujus ordinatim-applicatæ ad A D diametrum vel Axem, ſint ſecundum ſeriem directam A D B, cujus Index ſit f; vel ſecundum ſeriem reciprocam, ut A D B $\beta\delta$, cujus Index ſit $-f$. Atque intelligatur circa rectam, ad eandem A D, in A, ordinatim-applicatam, puta A δ; converti. Deſcribent rectæ ſic converſæ, ſuperficies curvas Cylindricas circa A δ ut Axem; quæ quidem ſuperficies curvæ æquantur totidem Parallelogrammis quorum Baſes æquentur rectis converſis, altitudines verò peripheriis uno aliquo eorum puncto deſcriptis: (Quippe, curva Cylindrica, expanſa, cum hujuſmodi parallelogrammo coincidet.) Sunt igitur illæ ſuperficies Curvæ Cylindricæ, in ratione, ex rectarum converſarum, & peripheriarum ſic deſcriptarum, rationibus compoſitâ: (per 23 El. 6.) hoc eſt, (propter peripherias radiis proportionales,) ex rectarum converſarum, & earum à recta per verticem A δ diſtantiarum, compoſita. Eſt autem (propter æqualem quam ſupponimus rectarum craſſitiem) ſeries hæc diſtantiarum, ſeries Primanorum, cujus index 1; adeoque (propter f, vel $-f$, indicem ſeriei Rectarum,) ſeries ſuperficierum Cylindricarum rectis deſcriptarum, (vel, his æqualium Parallelogrammorum,) Indicem habebit $f+1$, vel $-f+1$. Quæ itaque ſimul omnia, (hoc eſt, Solidum converſione factum) ad totidem ultimo æqualium, (hoc eſt, ad Parallelepipedum ſuper A B parallelogrammum, altitudinem habens æqualem peripheriæ puncto D deſcriptæ; vel, quod Parallelepipedo illi æquale eſt, ad Duplum Cylin-

A. Fig. 129, 131, 133.

dri,

dri, parallelogrammo illo circa Verticis rectam conversione descripti:) ut 1 ad $ſ+2$, vel ut 1 ad $-ſ+2$. (per 1 hujus.) Hoc est, (posito P pro uno ex æqualibus parallelogrammis, & N, pro omnium numero, adeóque N P pro Parallelepipedo,) $\frac{1}{ſ+2}$ N P, vel $\frac{1}{-ſ+2}$ NP. Quod quidem magnitudine finitum erit, si vel ſ sit Index Affirmativus, vel si Negativus $-ſ$ major sit quam -2. (Quippe tum ratio 1 ad $ſ+2$, vel ad $-ſ+2$, erit ratio finita: nempe ut terminus positivus ad positivum; non ut Positivus ad o, vel minus quam o.) Quæ erant demonstranda. Atque hinc particularium casuum calculus deducetur.

B. Porro; Si Figura plana sic conversa, dimidiata sit, (nam de integrâ, dubium non est, quin Centrum gravitatis, absolutâ conversione, erit in A puncto:) sintque ad axem A D ordinatim applicatæ, ad angulos rectos: Erunt superficierum illarum curvarum Cylindricarum centra gravitatis in media illarum longitudine; (per 2 hujus) adeóque (propter dimidiata integris proportionalia) in ratione rectarum in plano, quarum conversione hæ superficies Cylindricæ describuntur: Hoc est; in serie cujus Index est ſ, vel $-ſ$. Cúmque superficierum illarum, seu Ponderum, series Indicem habeat $ſ+1$, vel $-ſ+1$, (ut suprà ostensum est;) & series distantiarum Centrorum Gravitatis a Plano per A D, indicem habeat ſ, vel $-ſ$, (ut ostensum est modò:) Quæ ex utrisque oritur (per 18 Cap. 5.) Momentorum series, (respectu perpendicularis Plani per A D,) indicem habebit $2ſ+1$, vel $-2ſ+1$. Adeóque (posito D pro distantiâ Centri gravitatis superficiei Cylindricæ rectâ D B descriptæ; quæ semi-latitudo Parallelogrammi A B;) erit (per 1 hujus) $\frac{1}{2ſ+2}$ NPD, vel $\frac{1}{-2ſ+2}$ N P D, simul omnium, hoc est, Solidi, Momentum. Quod quidem si per $\frac{1}{ſ+2}$ N P summam Ponderum, dividatur, prodibit $\frac{ſ+2}{2ſ+2}$ D, vel $\frac{-ſ+2}{-2ſ+2}$ D, distantia Centri Gravitatis à Plano per A D. Quæ quidem distantia; si sit vel ſ Index Affirmativus, vel Negativus $-ſ$ major quam -1, adeóque $-2ſ+2$ terminus affirmativus, (propter affirmativi ad affirmativum rationem finitam,) finita erit: atque, in illâ, Centrum Gravitatis. Quæ quidem erant demonstranda.

$$\frac{1}{\int+2}NP \Big) \frac{1}{2\int+2}NPD \Big(\frac{\int+2}{2\int+2}D$$ Fig. 132. 134.

$$\frac{1}{-\int+2}NP \Big) \frac{1}{-2\int+2}NPD \Big(\frac{-\int+2}{-2\int+2}D.$$

Sin major quidem $-\int$ quam -2; non autem major quam -1: Habebit quidem solidum illud magnitudinem finitam; (ut ostensum est:) Sed non & Centrum Gravitatis. Erit enim $-\int+2$ ad $-2\int+2$, ratio positivi, vel ad o, vel ad negativum; adeóque distantia Centro Gravitatis debita, vel infinita erit, vel plusquam infinita; quod igitur nusquam erit. Quod item Affirmatum erat. C.

Quæque hinc, ad particulares casus enumeratos (aliósve quotlibet) deducuntur: Ex calculo patent. D.

Puta: Si A D B β δ Plani series indicem habeat -1, quæ est Trianguli reciproca; (quo casu, curva B β, est Hyperbola; cujus Asymptotæ sunt A D, A δ: ut prop. 92, 95, Arithm. Infin. demonstravimus: Adeóque, solidum istius conversione circa A δ descriptum, est Torricellii, *Solidum Hyperbolicum Acutum*; ut ex hujus apud Torricellium definitione constat:) Erit Planum illud Magnitudine Infinitum, (per 7 hujus.) Si tamen, circa A δ conversum, intelligatur Solidum describere; erit hoc magnitudinis finitæ; tantæ scilicet quanta in Propositione designatur. Cúm enim, superficies Cylindrica, rectâ D B descripta; vel, huic æquale, Parallelogrammum cujus Basis D B, altitudo æqualis peripheriæ puncto D descriptæ; sit P: atque huic æque-altum Parallelepipedum, super parallelogrammum A B erectum; sit N P: (cui quidem Parallelepipedo, æquatur Duplum Cylindri eodem Parallelogrammo circa A δ converso descripti: Nam, quâ ratione circulus radio A D descriptus, æquatur semissi Parallelogrammi cujus Basis est A D, altitudo æqualis Peripheriæ puncto D descriptæ; quod notum est: eâdem & Cylindrus parallelogrammo A B descriptus, eandem habens altitudinem, æquabitur semissi Parallelepipedi: propter singula hujus Parallelogramma singulorum in illo Circulorum, respectivè sumptorum, dupla: & communem altitudinem D B:) Sintque superficies Cylindricæ rectis ipsi D B parallelis descriptæ; (vel, his æqualia Parallelogramma quorum bases, eædem

rectæ; altitudines respectivis peripheriis æquales; (Series æqualium propter $-s+1=-1+1=0$: (vel etiam; quia tum peripheriæ sunt in ratione distantiarum ab $A\delta$ directâ, & rectarum conversarum in earundem distantiarum ratione reciprocâ, adeoque tum Parallelogramma invicem æqualia tum & Superficies Cylindricæ; per 6 Cap. 1. vel 14 El. 6. Nempe, quod ob minorem basis peripheriam decrementum, auctâ in eadem ratione altitudine compensatur; ut superficies Cylindricæ, rectis in $ADB\beta\delta$ plano ipsi DB parallelis descriptæ, sint invicem æquales:) Erunt simul omnes illæ superficies Cylindricæ, sive quod ex his intelligitur conflari Solidum; $\frac{1}{-s+2}NP$, hoc est $\frac{1}{-1+2}NP=NP$; æquale scilicet ipsi Parallelepipedo vel Duplo Cylindri, quod per NP designavimus. At verò; propter Distantias (a plano rectâ AD descripto) Centrorum gravitatis harum superficierum Cylindricarum, rectis conversis proportionales, adeoque secundum seriem cujus index -1 ex constructione: erit Momentorum seu ponderationum series, indicem habens $-1=0-1$ (nempe qui ex Indice seriei superficierum cylindricarum, 0; & hâc seriei distantiarum, -1; aggregatur) Adeoque summa momentorum, $\frac{1}{-1+1}NPD$; (nempe, quæ sit ad NPD, ut 1 ad $-1+1=0$; quæ ratio est infinita;) vel $\frac{1}{0}NPD$; quod per NP (quod est omnium Pondus, ut modò ostensum est) divisum distantiam exhibet, centro gravitatis debitam, $\frac{1}{0}D$, infinitam. Quod igitur nusquam erit.

E. Similiter: Si Plani series Indicem habeat $-s=-\frac{3}{2}$: (quod est magnitudine infinitum; per prop. 7 hujus.) Erit solidum, hujus Plani conversione factum, $\frac{1}{-s+2}NP=2NP$; magnitudine finitum. Sed summa momentorum $\frac{1}{-2s+2}NPD=\frac{1}{-1}NPD$, plusquam infinita. Et distantia Centro gravitatis debita; $\frac{1}{-2}D$, plusquam infinita. Quod itaque nusquam erit.

F. Item: Si Plani Series Indicem habeat $-s=-\frac{1}{2}$; (cujus itaque

ordin[...]

ordinatim-applicatæ, ſunt ordinatim applicatis in Parabolâ, reciprocè proportionales:) Planum hoc eſt magnitudine Finitum, (per 7 hujus.) Et Solidum converſione factum, item finitum; nempe $\frac{1}{-ſ+2}NP = \frac{2}{3}NP$. Eritque hujus Momentum, $\frac{1}{-2ſ+2}NPD = NPD$, finitum. Et diſtantia Centri gravitatis, $\frac{-ſ+2}{-2ſ+2}D = \frac{3}{2}D$; finita.

Item: Si Plani Series Indicem habeat $ſ = \frac{1}{2}$, (quæ eſt Semi-parabolæ:) Solidum converſione factum, erit $\frac{1}{ſ+2}NP = \frac{2}{5}NP$. Hujus momentum $\frac{1}{2ſ+2}NPD = \frac{1}{3}NPD$. Diſtantia Centri Gravitatis, $\frac{5}{6}D$. G.

Atque ad eandem formam fiet judicium, quæcunque ſit expoſiti Plani ſeries iſtiuſmodi ex definitis in def. 1, 2, hujus. H.

Erit autem, in Solidis hiſce, integrâ converſione factis; Centrum gravitatis, in ipſo converſionis axe; per 5 hujus. Adeóque in ipſius illo puncto, quod diſtantia ab A, jam demonſtrata, deſignat. I. Fig. 123, 133.

Semi-ſolidorum verò, (quæ ſemi-converſione deſcribuntur,) aliarúmve portionum duobus per converſionis axem planis interjectarum, (puta, quæ converſionis integræ Triente, Quadrante, &c. deſcribuntur;) Centrum gravitatis erit in illo per converſionis axem plano quod per Centrum gravitatis figuræ planæ rectâ A D deſcriptæ (adeoque per reliquarum huic parallelarum, utpote ſimilium & ſimiliter ad axem poſitarum, Centra Gravitatis,) tranſit: quod probabitur ex 4 hujus. K. Fig. 132, 134.

Quódque ſit in eâ quam dicimus à converſionis axe diſtantiâ; ſic conſtat. Cum Superficies Cylindricæ ex quibus conflari intelligatur Solidum, (ut ſupra oſtenſum eſt;) adeóque & harum portiones ſimiles quantacunque integræ converſionis parte deſcriptæ, (propter arcus ſimiles, peripheriis ſuis integris proportionales;) ſint ſeries indicem habens $ſ+1$, vel $-ſ+1$, (adeoque ſi extima dicatur P, erunt ſimul omnes ut $\frac{1}{ſ+2}NP$, vel $\frac{1}{-ſ+2}NP$;) ſintque earum ab axe converſionis diſtantiæ, adeóque (propter ſimilium figurarum L.

 Centra

Centra Gravitatis similiter sita) distantiæ suorum Centrorum gravitatis rectarum in exposito plano quibus describuntur distantiis ab A δ proportionales; adeóque ut series indicem habens 1, (ut supra ostensum est:) Erit momentorum series (respectu axis conversionis A δ) indicem habens $\int+2$ vel $-\int+2$, (nempe $\int+1+1$ vel $-\int+1+1$;) Et simul omnium Momenta (posito D pro distantiâ Centri gravitatis extimæ superficiei, rectâ D B descriptæ à conversionis axe A δ,) $\frac{1}{\int+3}$ N P D, vel $\frac{1}{-\int+3}$NPD: (per 1 hujus.) Quod, per $\frac{1}{\int+2}$ NP, vel $\frac{1}{-\int+2}$ N P, summam Ponderum, divisum, exhibet $\frac{\int+2}{\int+3}$ D, vel $\frac{-\int+2}{-\int+3}$ D, distantiam Centri gravitatis (siquod est) ab axe conversionis A δ. Quod erat propositum.

M. Porro: Si pro circulis circa A δ axem conversione rectarum AD & huic parallelarum descriptis, dum sit D A δ angulus rectus; adeoque, axis A δ ad illos rectus: Intelligantur totidem circuli, his respectivè æquales, circa eandem A δ ut axem inclinatum, quocunque applicationis angulos circumpositi; figuram solidam complere: Vel etiam; si, pro circulis, intelligantur aliæ figuræ planæ similes & similiter positæ, circulis illis proportionales: Eadem utcunque, ut prius, manebit demonstrationum vis.

N. Vel denique; Si, propter D A δ angulum Acutum Obtusúmve, conversâ circa A δ ut axem figurâ planâ A D B β δ; loco circulorum rectâ D A & huic parallelis describendorum, describantur conicæ superficies Convexæ Concavæve: Similiter ad superficiem hanc Conicam, recta D A descriptam; atque ad circulum eâdem, ut prius descriptum; (& de reliquis similiter huic parallelis;) eadem accommodabitur Demonstrationum vis.

O. Denique, quemadmodum in Propositione hac egimus, de Solidis, conversione Planorum circa rectam per verticem Ordinatim-applicatis parallelam, descriptis; eorúmque Centris Gravitatis: Pronus erat idem præstare in aliis Planorum conversionibus; puta, si Parabola, aliáve ex jam tractatis figuris, circa Basem vel Axem, vel rectam Axi parallelam conversa, intelligatur figuram Solidam describere; aliáque hujusmodi. Abstinui tamen; partim, quia ad jam traditorum modum poterit his similia Lector ipse pro libitu plura subjungere suo Marte: partim etiam, quia eadem, sequentium aliquot propositionum ope luculentiùs & simul universalius tradentur; maximè verò ne tædium

dium crearem Lectoribus si nimius essem in hisce congerendis; præsertim cùm tanta seges hic se offerat, ut vel spicilegium carpenti nimis, intumescat Caput hoc De Calculo Centri Gravitatis.

SCHOLIUM.

Tradidimus hactenus, ea præsertim quæ figuras spectant, (planas solidasve,) ad quarum Diametros vel Axes, quæ ordinatim-applicantur (rectæ aut plana) sunt secundum ordinatam aliquam (ex iis quas def. 1 & 2 hujus capitis definivimus) seriem constituta. Quæ quidem ad centrum gravitatis in figuris innumeris determinandum viam aperiunt: Ex nostra *Infinitorum Arithmetica* plurimum petita: Quæ tamen adhuc facile ampliaabit peritus Geometra, & pluribus adhuc casibus innumeris accommodabit.

Quoniam vero non omnes figuræ ordinatam hanc constitutionem sortiuntur: quò aliis utut inordinatis consulatur; sequente propositione methodum adhuc magis generalem exhibemus; ordinatis juxtà atque inordinatis pariter applicabilem.

PROP. X.

Si dividi intelligatur Libra quævis, in partes quotlibet æquales, (numero vel finitas vel infinitas,) in distantiis à motûs sui Centro vel Axe (aut perpendiculari per axem plano) ut 1, 2, 3, &c. arithmeticè proportionalibus positas; ponderibus, aut ponderum particulis, (æqualibus aut inæqualibus, ordinatis vel inordinatis,) utcunque gravatas: Eaque quibus gravantur pondera, seu ponderum particulæ, in suam quæque ab axe motus (seu plano per axem) distantiam ducantur; hoc est toties sumatur quæque particula quoto est ipsa loco ab axe motus; (Quod variis methodis, prout cuique casui videbitur maxime expedire, consequi licebit:) Habetur (respectu ejusdem axis) Momentum omnium; &

& hujus ope) cognita magnitudine) diſtantia Centri Gravitatis, ab illo per axem plano.

Fig. 1?5. INtelligantur, in A E librâ, partes invicem æquales, A B, B C, C D, &c. quarum diſtantiæ (aut mediorum in illis punctorum) à motus axe X, (aut, ſi partes intelligantur infinite exiguæ, ab ipſo A puncto) ſint ut 1, 2, 3, &c. arithmetice proportionales; ſuis quæque ponderibus (æqualibus aut inæqualibus) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. onuſtæ. Quorum quodque toties ſumatur, quoto eſt ab axe motus loco.

Puta: 1α, 2β, 3γ, 4δ, &c. ſeu α, $\beta+\beta$, $\gamma+\gamma+\gamma$, $\delta+\delta+\delta+\delta$, &c. Hoc eſt (in partibus infinite exiguis) omnes onuſtæ rectæ B B, C C, D D, &c. Triangulum vel Ungulam AEE complentes.

Aut etiam, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\beta+\gamma+\delta$, $\gamma+\delta$, &c. Hoc eſt, (in partibus infinite exiguis) omnes onuſtæ rectæ A E, B E, C E, &c. idem A E E triangulum vel ungulam complentes.

Aut etiam, A E, A E — A B, A E — A C, A E — A D, &c. Hoc eſt, totidem A E demptis omnibus A B, A C, A D, &c. Hoc eſt, (in partibus infinite exiguis,) Parallelogrammum ſeu Priſma (onuſtum) A E E ε, minus (onuſto) Triangulo vel Ungula contraria A E ε.

Aut etiam alio quocunque modo obtineatur aggregatum omnium toties reſpective ſumptorum quoto eſt quodque loco ab axe motus remotum.

(Perinde autem eſt, ſive ipſa α, β, γ, &c. quibus onerari cenſetur libra, ſint lineæ rectæ, aut curvæ; ſive ſuperficies planæ, aut Curvæ, aut miſtæ; ſive ſolida cujuſcunque figuræ; aut etiam vires, impetus, &c. aut qualiacunque demum invicem homogenea, quæ aut gravia ſint aut tanquam gravia habeantur.)

Dico; his poſitis, haberi momentum ſimul omnium reſpectu ipſius axis motûs X: Adeóque (cognitâ etiam magnitudine ſimul omnium) diſtantiam Centri gravitatis ab X, ſeu perpendiculari plano ſuper X motus axem erecto.

Cum enim (per prop. 12. Cap. 3. vel prop. 18. Cap. 4.) cujuſque momentum ſit in ratione ex ponderum & diſtantiarum rationibus compoſita; hoc eſt, in ratione factorum ex ponderibus in ſuas ſingulis diſtantias ductis; Habito horum aggregato, habetur momentum, (per 18 Cap. 3. vel 22 Cap, 4. Adeoque; ſi porro habeatur magnitudo ſimul omnium, habebitur (momento per magnitudinem diviſo) diſtantia Centri gravitatis à perpendiculari per axem plano: per prop. 24. Cap. 4.

SCHO-

SCHOLIUM.

His traditis: Monendum porro est, Hoc, quod *Centrum Gravitatis* dicimus punctum; etiam aliàs utile esse, quò, quæ ex se sunt Inæqualia, Æqualium instar, propter Æquipollentiam censeantur. Cujus specimen, in sequentibus aliquot Propositionibus exhibebimus.

PROP. XI.

Si, super Base quâvis Planâ, erigatur Cylindrus, Prisma, Solidúmve quodvis Prismaticum; Planóq; utcunq; ad Basin inclinato, obliq; secetur: Frustũ, plano basis, planóq; secanti, interjectum, (quæ *Ungula* dici solet) æquatur Solido, super eâdem vel æquali Base, tantæ altitudinis, quanta est altitudo rectæ in Frusto, quæ basis Centro gravitatis insistit similiter inclinata atque ipsum Solidum. A.

Frustique Superficies, (exclusis Basibus oppositis, quibus interjacet) æquatur superficiei (exclusis item basibus oppositis) Solidi prismatici, super eâdem vel Isoperimetrâ Base, cujus latus tantæ sit longitudinis quanta est rectæ in frusto quæ perimetri basis Centro gravitatis insistit, similiter inclinata atque ipsum Solidum. D.

Atque hinc etiam, de Frusto, Frustíve superficie, duobus utcunque Planis Obliquis, interjecto; fiet judicium. C.

Intelligitur autem de Secante Plano, quod expositæ basis Plano occurrat vel extra figuram vel in ipsius saltem extremo; non, intra figuram. Quippe hoc casu Solidum Prismaticum expositæ basi insistens æquè-altum rectæ B.

Centro

Centro Gravitatis inſiſtenti; æquabitur duarum fruſti portionum Differentiæ, ſub & ſupra baſem expoſitam factarum, continuato Plano ſecante donec expoſitum Solidum Priſmaticum item continuatum totum tranſverſim ſecat. Et de fruſti Superficie ſimiliter.

E. Hinc autem *Ungularum*, quas vocant, omne genus, menſura colligitur.

F. Item Ungularum ſuper eodem Plano, Rectâve, aut Curvâ in Plano deſcripta, (cujus ſaltem magnitudo nota ſit) differentia, prout acies (ſeu planorum interſectio) propius aut remotius abſit.

Aut etiam differentia momentorum ejuſdem gravis; prout Axis Motûs propius abſit aut remotius.

G. Hinc ſpeciatim habetur etiam Trilinei vel Polygoni cujuſvis, in Superficie Cylindrica deſcripti (planis utcunque poſitis terminati) magnitudo. Quod & de aliis corporum Priſmaticorum Superficiebus figuriſque iiſdem ſic inſcriptis, intelligendum.

A. Fig. 136. INtelligatur baſis plana B D, (rectilinea, curvilinea, an mixta quælibet;) quæ (poſito oculo in eodem plano ad infinitam diſtantiam) projiciatur in B D rectam: (adeóque & huic parallela plana quælibet, in parallelas rectas projecta:) Super quâ erigatur corpus Priſmaticum quodvis, (puta, Cylindrus, ſi baſis illa ſit circulus; ſi rectilinea, Priſma Euclideum; ſaltem Solidum aliquod Priſmaticum ſeu Columnare, quod ex infinitis numero rectis parallelis æqualibus conflari intelligatur, quo ſenſu def. 1. Cap. 4. definivimus;) B D d b: ſitque ſuper baſis Centro gravitatis C, (quod propius remotiúſve à B vel D intelligendum erit, prout Baſis figura & ſitus poſtulaverit,) erecta C c, ipſis B b, D d, lateribus parallela. Intelligatur vero ſolidum hoc Priſmaticum, alio adhuc plano ad planum baſis obliquè inclinato ſectum; quod ſectionem faciat β κ δ; rectæ C c concurrens in κ. Dico; fruſtum B D δ β, æquale eſſe Solido Priſmatico ſuper eadem baſe, (vel huic æquali; propter æqualia Priſmata & Cylindros quæ ſunt ſuper æqualibus baſibus æque-alta;) altitudinem habenti eam quæ eſt rectæ C κ; (nempe, huic rectæ æqualem, ſi C κ ſit ad baſin perpendicularis; vel ſaltem, æqualem perpendiculari à puncto κ demiſſæ ad planum baſis B D.)

Intelligatur utique Planorum B D, βδ, communis ſectio X Fig. 136.
recta; quæ in unicum X punctum projiciatur; adeoque & huic parallelæ rectæ, in totidem puncta. Perque rectam X incedat Planum XP, plano XBD rectum: quod in XP rectam projiciatur. (Quam projectionis formam eo fine adhibemus, quem ad prop. 14. Cap. 4. inſinuavimus; quo & phantaſia plurium linearum confuſione levetur, neque turbentur interim rationes: Quippe tantundem à plano XP diſtabunt ſingula Solidi puncta; atque, ab XP rectâ, eadem in plano projecta diſtant.)

Ponatur porro; Planum XBD, planum Horizontale; recta X, axis motûs; adeoque Planum XP, perpendiculare Planum per motûs axem. Adeóque in eâ ratione Ponderant ſingula Baſis puncta B, C, D, &c. quâ diſtant ab axe motûs X, vel à perpendiculari per hunc Plano XP; per 4 Cap. 4. Hoc eſt, in ratione rectarum XB, XC, XD, &c. Sed & (propter C centrum gravitais) tantundem ſimul omnia ponderant, atque ſi in C puncto intelligerentur omnia: per 16 Cap. 4. Adeóque (per 4 Cap. 4) tantundem ſunt ſimul omnes XB, XC, XD, &c. atque totidem ipſi XC æquales.

Sed &, (propter ſimilia Triangula;) rectis XB, XC, XD, &c. proportionales ſunt Bβ, Cκ, Dδ, &c. Adeóque (per 12 El. 5.) tantundem ſunt ſimul omnes Bβ, Cκ, Dδ, &c. (fruſtum BDδβ complentes,) atque totidem Cκ (complentes Solidum Priſmaticum BDγγ, ipſi Cκ rectæ æquè altum:) Adeoque BDδβ Fruſtum, eſt ſolido Priſmatico BDγκγ, æquale. Quod erat demonſtrandum.

Atque perinde omnino valet hæc demonſtratio, ſive baſi BD inſiſtens ſolidum Priſmaticum, ejúſve fruſtum, Rectum ſit, ſive Inclinatum: Dummodo eodem modo cenſeatur rectæ Cκ altitudo, atque priſmatis; nempe rectâ perpendiculari a puncto κ ad baſis planum demiſsâ.

Supponit autem demonſtratio, communem planorum ſectionem X, B.
extra figuram, (ſaltem non intra, ſed in ipſo forſan ſolidi extremo;) ſecùs enim, non erit eadem Integri & Fruſti Baſis, quod ſupponit Propoſitio.

Sin planum ſecans, plano Baſis intra figuram occurrat; intelligendum erit eouſque deorſum continuandum ſolidum, ut Fruſti ſegmenta Fig. 137.
duo ſint; alterum ſupra & alterum infra BD baſim; duæque rectæ, Cκ, duorum baſis ſegmentorum Centris erectæ. De quibus intelligenda erit tum propoſitio, tum Demonſtratio.

Puta: Si Planum BD plano βδ ſecetur in X; ſumptis utriuſque ſegmenti BX, XD, centris gravitatis C, C; reliquiſque ut priùs conſtructis:

ſtructis: Oſtendetur Fruſtum D X δ, æquale ſolido Priſmatic. D X γ κ γ (ſuper eâdem baſe X D;) & fruſtum B X β, ipſi B X γ...

Fig. 138. Vel etiam, conjunctim: Retento communi totius Centro gravitatis C; Propter X D δ ſupernè (quod notetur ſigno +) & B X β infernè (quod ſigno — notetur) plano baſis B D & ſecanti β δ interjecta; & ſolidum priſmaticum B D γ κ γ ſupernè (ſigno + notandum:) Erit + X D δ — B X β = + B D γ κ γ. Quod ex præcedente Demonſtratione, mutatis ut res poſtulaverit ſignis + — elicietur.

Vel, ſiquis ejuſmodi averſetur demonſtrationem; idem alias ſic oſtendetur: Ducto Plano β Δ ipſi B D parallelo; oſtendetur, ut ſupra, fruſtum δ β Δ æquale ſolido β Δ γ κ γ: Et, ablato utrinque β X D Δ, manebit δ X D æquale toti reſiduo β X D γ κ γ hoc eſt, duobus β X B + B D γ κ γ; Adeóque (ſubductis utrinque β X B) erit δ X D — β X B = B D γ κ γ. Quod erat oſtendendum.

C. Porro: Si duobus utcunque planis idem ſolidum Priſmaticum ſecetur, (ſive eadem ſit utriuſque cum expoſitæ baſis plano communis interſectio, ſive ſecus;) ſimile erit præcedentibus judicium: Fruſtum ſcilicet utriſque planis interjectum; iſtiuſmodi Priſmatum ſeu ſolidorum Priſmaticorum Aggregato vel Differentiæ (ut res poſtulaverit) æquabitur.

Fig. 139. Puta: Si ſolidum quodvis Priſmaticum, cujus expoſita baſis aliqua plana ſit B D, ejúſque Centrum gravitatis C, per quod tranſeat c κ C: Quod duobus utcunque planis obliquè ſecetur; puta in β κ δ, & b c d. Ductis Planis γ κ γ, g c g, ipſi B C D parallelis: Oſtendetur, ut ſupra, Fruſto B D δ β æquale ſolidum B D γ γ; item Fruſto B D d b, æquale ſolidum B D g g: Fruſtum igitur β δ d b (duorum B D δ β, B D d b, ſumma vel differentia, prout ex oppoſitis, vel iiſdem partibus ejuſdem B D ſumantur,) Solido Priſmatico γ γ g g (duorum ſimiliter B D γ γ, B D g g, ſummæ vel differentiæ,) æquabitur. Quod oſtendendum erat.

Fig. 140. Sin hæc duo Plana ſecantia, ſibi invicem intra Solidum occurrant: idem hic monendum (atque ſimiliter oſtendetur) atque prius. Puta; Si β δ, b d, plana ſe mutuo ſecent in X; erit γ γ g g ſolidum priſmaticum, æquale duorum δ X d, β X b, differentiæ. Adeóque de Fruſto duobus utcunque Planis interjecto, conſtat. Quod erat propoſitum.

D: Denique: De Superficie Fruſti, quod affirmatur; ſimiliter omnino demonſtrabitur atque de Fruſto ipſo: Hoc priùs animadverſo: Quod, Priſmatis Solidíve Priſmatici cujuſcunque magnitudo æſtimatur, ex ductu altitudinis in Baſin; Superficies verò Priſmatis, Cylindri, Solidi-

(
tr
ax
(p
a
&
El
con
ma
S
Pri
utut
simi
V
term
solidu
(de q
ferent
Rel
de ipso
Atq
Parabo
gravitat
cantis, d
ditiùs, f
Hinc
Prismatic
quocunqu
basi intra
tur; ejus

ve cujusvis Prismatici recti (exceptis basibus) Aream habet æqualem facto ex Lateris longitudine in Perimetrum Basis ducta. Unde, ut ex Solidi Prismatici Altitudine & Base cognitis, cognoscitur solidi magnitudo; quæque æquales habent tum Bases (utcunque dissimiles,) tum Altitudines (utcunque inæqualiter inclinata sint,) sunt inter se Æqualia: Sic, hujusmodi Solidorum Rectorum Superficies (exceptis basibus) Aream habent cognitam, si tum Lateris Longitudo, tum Basis Perimeter, notæ sunt; quæque tum Bases habent Isoperimetras, (utcunque dissimiles vel inæquales,) tum Latera longitudine æqualia, æquales habent areas. Quæ quidem ex Elementis nota supponimus, vel inde demonstrabilia.

Constructis igitur, ut prius; nisi quod C sit jam Centrum Gravitatis (non quidem Basis, sed) Perimetri Baseos: Quoniam singula perimetri puncta B, D, &c. in eâ ratione ponderant quâ distant ab X motûs axe; hoc est, in rectarum X B, X D, &c. ratione: quæ simul omnes (propter C Centrum gravitatis) tantundem sunt atque totidem X C æquales: Súntque (propter similia Triangula) rectis X B, X D, X C, &c. proportionales B β, D δ, C κ, &c. Tantundem itaque sunt (per 12. El. 5.) simul omnes B β, D δ, &c. (superficiem Frusti recti B D δ β complentes,) atque totidem C κ, complentes superficiem Solidi Prismatici (demptis basibus) B D γ γ. Quod erat demonstrandum. Fig. 136.

Si verò exponatur superficialis Ungula Scalena, cum ejusdem basis Prismaticâ, similiter inclinatâ (hoc utique supponimus in superficialibus, utut in solidis id non erat necesse,) comparanda: Similiter operabitur similis utrobique inclinatio, adeoque non destruet æqualitatem.

Vel etiam, (ut in Fig. 139.) præter duo plana Ungulam Scalenam terminantia, ut β κ δ, b c d; intelligatur tertium aliquod B C D, quod solidum secet ad angulos rectos; adeóque duas exhibeat Ungulas rectas (de quibus procedet præcedens demonstratio) quarum vel summæ differentiæ æquabitur exposita Scalena.

Reliquáque, eodem modo demonstrantur de Frusti superficie, atque de ipso Frusto demonstrata sunt. Adeoque constat Propositum.

Atque hinc *Ungularum*, quas vocant, omne genus (Cylindricarum, Parabolicarum, &c.) Mensuram, (cognito vel supposito Basis Centro gravitatis, vel hujus saltem à communi sectione plani basis, planique secantis, distantia;) quam magno molimine plures sunt aggressi; expeditiùs, simpliciùs, atque universaliùs, unâ vice absolvimus. F.

Hinc etiam patet; expositi Cylindri, Prismatis, Solidive cujusvis Prismatici, (ut B D d b,) segmentum B D δ β, quocunque plano, & quocunque situ posito, (dummodo totam figuram transversim secet, non autem intra figuram occurrat,) si per idem (in C c rectâ) punctum κ transeat; ejusdem magnitudinis esse.

 Quod

Fig. 141. Quod & de Frusti Superficie (ita ut dictum est) pariter intelligendum est.

Hinc etiam innotescit differentia duarum Ungularum super eodem plano, rectâve (aut curvâ in plano descriptâ) cujus magnitudo nota sit; prout Ungulæ Acies (seu planorum intersectio) propius remotiúsve abfuerit.

Nempe, Si super V A (plano, rectâve, aut curvâ in plano descriptâ) Magnitudinis notæ; erigi intelligantur Ungulæ duæ, quarum altera aciem habeat V seu V B, altera α seu α τ (ipsi V B parallelam;) sitque eadem utriusque inclinatio (puta angulus F V A, angulo f α A æqualis:) Manifestum est (propter parallelas sive lineas sive superficies V F, v f,) Ungularum V F A, V v f A, differentiam esse, superficiem solidumve V F f v, vel V v a A; hoc est, factum ex base V A in altitudinem V v: Quæ quidem altitudo V v est vel ipsi α V (distantiarum differentiæ) æqualis; nempe, si inclinationis angulus F V A, seu f α A, seu v α V, sit semiquadrantalis: vel illâ major minorve, in ea ratione quam postulat datus inclinationis angulus.

Adeoque, si Ungula F V A nota sit; addito V F f v, vel V v a A, (facto ex base V A in altitudinem V v,) habetur Ungula V v f A. Si nota sit V v f A, dempto eodem V F f v vel V v a A, habetur Ungula V F A.

Si vero ipsæ V B, α τ, acies, non sint parallelæ; si tamen sint in eodem plano, eademque utriusque Ungulæ inclinatio nota, atque innotescat saltem quanta sit distantiarum à basis Centro gravitatis differentia; idem similiter obtinetur: ut ex ante demostratis patet.

Quodque de Ungulis dictum est; Momentis gravium quorumvis accommodabitur. Cum enim gravis V A momentum æstimetur ex facto à magnitudine in distantiam Centri gravitatis ab V B, seu α τ, (intellige, à perpendiculari plano per axem, V B, seu α τ,) differentia harum distantiarum (hoc est distantia planorum parallelorum B V, α τ,) in eandem V A magnitudinem ducta, exhibebit Momentorum ejusdem V A differentiam respectu Axium B V, & α τ.

G. Atque hinc speciatim, Trilinei aut Polygoni cujusvis, in superficie Cylindricâ descripti, planis utcunque positis abscissi, (seu quod eodem recidit, rectis, circulis, ellipsibusve, quibuscunque terminati,) magnitudo colligitur. Quippe manifestum est, hujusmodi quamlibet figuram in superficie Cylindricâ descriptam, esse vel hujusmodi Ungulam, vel saltem in hujusmodi aliquot Ungulas divisibilem. Adeoque (si dari intelligatur arcûs circularis Centrum gravitatis, quod prop. 14. exhibetur;) istius sive Ungulæ, sive Ungularum aggregati, magnitudo hinc habebitur. Quod de aliis item Corporum Prismaticorum superficiebus, figurisque inibi descriptis, pariter intelligendum erit.

SCHOLIUM.

P. V,
elligen-

lem pla-
it; prout
bfuerit.
descrip-
arum al-
elam;)
io f = A
ve super-
e, super-
VA in
distantia-
VA, seu
ve, in ea

A, (facto
Si nota se
A.
sint inco-
que mo-
s differen-

quorumvis
ametur ex
, seu ar,
differentia
rum BV,
mentorum

superficie
od eodem
magnitu-
figuram i
, vel saltem
i intellige-
hibetur:)
nc habebi-
ciebus, fi-

LIB.

PR

N
lidur
inclin
Plan
insist
illud
intell

Si F
po
Fi
so
di
pe
qu
de
Idem
scr
be
sup
æq
lin
Sin r
line
de
qua
tur

SCHOLIUM.

NOtandum interim, Quanquam universaliter procedat propositio, de quocunque plano XBCD cui intelligatur ut basi insistere Solidum Prismaticum; adeoque & quamcunque habeat ad basin suam inclinationem: Expedire tamen nonnunquam posse, illud ex omnibus Planum seligere, quod solidum rectè secet; cui itaque ad angulos rectos insistat solidum. Utut enim vel Frustum secet, vel ne attingat quidem, illud XBCD planum, idem interim de altitudine $c\kappa$ (fig. 139.) intelligendum erit, quod de $C\kappa$ (fig. 136.) dictum est.

PROP. XII.

Si Figura plana circa rectam quamvis in eodem plano expositam (quæ expositam figuram non secet) conversa, Figuram solidam describat: Æquatur solidum hoc, solido Prismatico super eâdem vel æquali Base; altitudinem habenti æqualem Peripheriæ (perfectæ vel imperfectæ prout conversio perfecta fuerit vel imperfecta) quæ expositæ figuræ convertendæ Centro Gravitatis describitur. A: Fig. 142.

Idem intellige, de Lineâ rectâ (vel curvâ) in plano illo descriptâ, quæ conversa intelligatur superficiem describere. Æquabitur utique hæc superficies, superficiei super expositam lineam erectæ, altitudinem habenti æqualem peripheriæ quæ Centro gravitatis conversæ lineæ describitur. B.

Sin recta, circa quam convertitur, expositam figuram lineámve convertendam secuerit: intelligendum erit de Differentiâ descriptorum, ab illis conversi partibus, quæ utrinque ad rectæ secantis contrarias partes constituuntur. C.

Hinc

D. Hinc itaque; Datâ figuræ planæ, lineæve in plano, tum Magnitudine, tum Centro gravitatis, (hujúsve ab Axe conversionis distantiâ;) datur figuræ, expositâ conversione factæ, magnitudo.

E. Datâque tum conversæ, tum conversione expositâ factæ, magnitudine; datur distantia centri gravitatis conversæ, ab axe conversionis.

F. Datâ denique, tum magnitudine expositâ conversione factæ, tum Centri gravitatis conversæ distantiâ ab axe conversionis; datur conversæ magnitudo.

Conversionem autem *expositam* hîc dicimus, quæ quota vel quanta pars sit integræ conversionis, aut ipsa integra conversio, exponitur. Supponimus item, peripheriæ datæ longitudinem datam esse.

G. Estque Centrum Gravitatis Ungulæ (sive solidæ sive superficialis) in illo per aciem plano quod altitudinem bisecat; Solidi vero aut superficiei conversione facti, in illo plano quod conversionis angulum vel arcum bisecat.

H. Atque hinc constat generalis methodus exhibendi solidum figuræ planæ circa rectam quamvis in eodem plano descriptam (saltem quæ ipsam non secet) conversione factum; Superficiemve conversione lineæ cujusvis (rectæ aut curvæ) in eodem cum conversionis axe plano descriptæ.

I. Hinc utique colligitur; Solidum conversione semiparabolæ circa rectam in vertice Tangentem descriptum; ad Cylindrum qui simili conversione Parallelogrammi circumscripti circa eandem rectam Tangentem describitur; esse, ut 4 ad 5.

K. Similiter, si circa semiparabolæ basin convertatur, tum semiparabola, tum Circumscriptum Parallelogrammum: Solidum illius, ad solidum hujus conversione factum, invenietur, ut 8 ad 15.

Si,

Si, circa semiparabolæ Axvem, utrumque planum convertatur; solidum Semiparabolæ ad solidum parallelogrammi conversione factum; invenietur ut 1 ad 2. L.

Si, circa rectam basi adjacentem, Axi parallelam, utrumque planum convertatur; invenietur solidorum ratio, ut 5 ad 6. M.

Et similiter, Quæ eorundem conversione circa aliam quamvis in eodem plano expositam rectam (quæ figuram non secet) in quacunque distantia remotam, & quocunque situ positam, fiunt Solida; rationem inter se habebunt, hac methodo investigabilem. Idemque in aliis figuris mille modis efficietur. N.

Hinc etiam sequitur: Si conversarum tum Magnitudines, tum Centrorum-gravitatis Distantiæ, sint vel utræque æquales, vel reciproce-proportionales; Figuras, simili conversione factas, æquales esse: Sin minus; saltem in ratione ex illarum Magnitudinum & Distantiarum rationibus compositâ. per prop. 6, 7, Cap. 1. O.

Item; Annulum quemvis, æqualem esse, Plano converso, in Peripheriam Plani Centro gravitatis descriptam, ducto. Quod tum de Annulo integro, tum de ipsius partibus, perinde obtinet; prout Conversio integra fuerit, vel partialis.

Item; Circulum, æqualem esse, facto ex Radio ducto in semissem Peripheriæ; (nempe, in Peripheriam, Radii Centro gravitatis seu puncto medio descriptam; quæ Peripheriæ Radio descriptæ semissis est.) Quod tum in Circulo integro, tum ipsius Sectoribus, perinde verum est.

Item; Curvam Cylindri Superficiem, æqualem facto ex Latere (hoc est, rectâ circumductâ,) in Peripheriam ipsius puncto medio descriptam, (quæ Basis peripheriæ æqualis est.) Idemque de Conversionibus dimidiis, aut Partialibus aliis, perinde obtinet atque de Integris. Et sic in reliquis.

Item;

Item; Cylindri Solidum, æquale, Parallelogrammo circumducto, ducto in peripheriam suo Centro gravitatis descriptam; (quæ est Peripheriæ Basis dimidia, propter Parallelogrammi Centrum gravitatis in media sive longitudine sive latitudine.)

Item; Curvam Coni recti Superficiem, æqualem Lateri (hoc est, rectæ circumductæ) ducto in Peripheriam ipsius puncto medio descriptam; (quæ est dimidia peripheriæ Basis.) Quod & Trunci superficiei (plano Basi parallelo abscissi) etiam accommodabitur.

Item; Conum Rectum, æqualem Triangulo circumducto, ducto in Peripheriam ipsius Centro gravitatis descriptam; (quæ Peripheriæ Basis Triens est.) Quod & Trunco (plano Basi parallelo abscisso) accommodabitur.

Et in reliquis similiter.

A. Fig. 142. ESto exposita figura plana B C D (in B C D lineam rectam projecta, eâ projectione quâ in prop. præced. usi sumus) quæ circa rectam in eodem plano X (in unicum X punctum projectam) extra (saltem non intra) figuram expositam conversa, describat B D d b figuram solidam; (similiter in planum projectam;) Adeóque basis Centrum gravitatis C describat C c peripheriam.

B. Vel etiam B C D recta vel curva linea quælibet in eodem plano, (similiter in B C D rectam projecta;) quæ circa X conversa describat B D d b superficiem eodem modo in Planum projectam: Suóque Centro Gravitatis C, describat C c peripheriam.

A. B. Et super eandem basem erigatur Solidum Prismaticum, vel Prismatica Superficies; cujus recta, Centro gravitatis C insistens, C κ, æqualis ponatur ipsi C c peripheriæ. Planóque X κ, abscindatur Frustum B D δ β.

Cumque tum B b, C c, D d, &c. (similes arcus) sint radiis suis X B, X C, X D, &c. proportionales; tum (propter similia triangula) iisdem X B, X C, X D, &c. proportionales rectæ B β, C κ, D δ; erunt hæ rectæ arcubus illis proportionales: Adeóque, propter C κ ipsi C c æqualem, per constructionem; erunt & reliquæ reliquis æquales; & omnes omnibus: Hoc est, B D d b figura (sive solida sive super-

fici[illegible]

ciarias conversione facta, ipsi B D δ β Frusto ; adeóque & (per praecedentem) ipsi BDγκγ figurae Prismaticae super eandem vel aequalem basin Altitudinem habenti C κ, ipsi C c aequalem. Quod erat demonstrandum.

Sin conversionis axis X, secet figuram lineámve convertendam : similiter ostendetur, segmentum Frusti X D δ, segmento facti ex conversione X D d ; & reliquum X B β, reliquo X B b : Ergo & differentia differentiae aequalis ; Et utravis (per demonstrata ad prop. praeced.) ipsi Prismatico (solido, vel Superficiei,) B D γ κ γ. Quod itidem erat demonstrandum. C. Fig. 147.

Itaque ; Datâ figurae planae lineaeve expositae (B C D) magnitudine quae sit *B B*, vel *B* ; atque Centri gravitatis C, ab X conversionis axe, distantiâ ; adeóque & peripheriae C c longitudine, quae sit *P* : datur expositâ conversione factae magnitudo *P B B*, vel *P B*. Nempe, quod fit ex *B B*, vel *B*, in *P* ducto. D. Fig. 142.

BB	B
P	P
PBB	PB

Item ; datâ magnitudine factae expositâ conversione ; putà *P B B*, vel *P B* ; ipsâque conversae magnitudine *B B*, vel *B* : datur arcûs (specie expositi) longitudo *P* ; (nempe quod ex *P B B* vel *P B*, per *B B* vel *B* diviso emergit) adeóque & radii quo describitur : quae est distantia Centri gravitatis C ab axe conversionis. E.

BB) PBB (P
B) PB (P

Item ; datâ *P B B* vel *P B* magnitudine figurae conversione factae ; & distantiâ centri gravitatis conversae à conversionis axe ; adeóque & quae ab hoc describitur Peripheriâ *P* : Datur conversae magnitudo, *B B* vel *B*. Nempe, quod ex *P B B*, vel *P B*, per *P* diviso, emergit. F.

P) PBB (BB
P) PB (B

Denique ; Bisectis Dd in m, & D δ in μ ; ductisque per conversionis axem vel Ungulae aciem X, planis X m, X μ : Erunt, in illo, Centra gravitatis singulorum arcuum ut B b, D d, conversione factorum ; in hoc, rectarum singularum ut B β D δ ungulam constituentium, (per 2 & 3 hujus :) Adeóque in illo arcuum commune omnium, (hoc est, superficiei vel solidi conversione facti,) in hoc, commune omnium rectarum, (hoc est, Ungulae superficialis solidaeve,) centrum gravitatis : per 27 Cap. praeced. Quae erant ultimo demonstranda. G. Fig. 142, 143, 144, 145, 146.

Atque hinc constat generalis Methodus exhibendi Solidum conversione figurae planae (lineaeve in plano) circa rectam in eodem plano descriptam : Saltem quae ipsam non secet. H. Fig. 148.

Exempli gratiâ. Sit A D B semiparabola ; cujus magnitudo ad magnitudinem parallelogrammi circumscripti A D B δ est ut 2 ad 3 ; I.

Centrum verò gravitatis à Vertice A δ distat $\frac{3}{5}$ Altitudinis, per 6 hujus; Parallelogrammi centrum à vertice distat, $\frac{1}{2}$ Altitudinis: Ergo illius ad hujus distantiam, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; vel, ut 6 ad 5. Adeóque propter plani magnitudinem ad magnitudinem, ut 2 ad 3; & Centri distantiam ad distantiam, ut 6 ad 5: Erit solidum ex conversione semiparabolæ A B D ad Cylindrum ex conversione A D B δ, circa eandem A δ; in ratione ex illis composita, ut 12 ad 15, vel 4 ad 5.

$$\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$$

K. Eadem si conversa intelligatur circa B D; (unde Centrum Gravitatis distat $\frac{2}{5}$ altitudinis; adeóque ad distantiam Centri Gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; sive ut 4 ad 5; et magnitudo ad magnitudinem ut 2 ad 3;) Solidum conversione factum, ad circumscriptum Cylindrum, erit ut 8 ad 15.

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$$

L. Eadem circa A D conversa; (propter magnitudinem, ut prius, sicut 2 ad 3; & distantium Centri gravitatis ab A D, $\frac{3}{8}$ Latitudinis, adeóque ad distantiam inde Centri gravitatis parallelogrammi circumscripti, ut 3 ad 4: per 8 hujus:) solidum faciet, ad Cylindrum circumscriptum; ut 6 ad 12, vel 1 ad 2.

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

M. Eadem denique circa B δ, (unde Centrum gravitatis distat $\frac{5}{8}$ latitudinis; adeóque ad distantiam Centri gravitatis parallelogrammi ut 5 ad 4; & magnitudo ut prius;) solidum faciet, ad circumscriptum Cylindrum, ut 10 ad 12; vel 5 ad 6.

$$\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

N. Atque eodem planè modo faciendum esset, etiamsi rectæ A δ, δ B, A D, D B, non adjacerent, sed in remotâ distantiâ, vel etiam obliquo quovis situ, utcunque in eodem plano; dummodo figuram convertendam non secet expositus conversionis Axis.

Et similiter quæcunque exponatur figura plana, circa rectam quamvis in eodem plano (quæ illam non secet) utcunque positam convertenda

tenda. Quódque de figurâ planâ dictum, de lineâ quâvis in plano descriptâ, similiter convertendâ intelligatur.

Reliqua consectaria, in ipso propositionis curriculo satis demonstrantur. O;

SCHOLIUM.

Hanc methodum cum ante plures annos inveneram (nescius id priùs innotuisse) inveni tandem Torricellio, aliisque post illum, priùs fuisse, notam.

Si verò Figura conversa, non sit Plana, vel non in eodem Plano cum conversionis Axe, (quod & de Lineis similiter intellige:) pro conversa, substituenda est alia (in eodem plano cum Axe) in quam, Conversa, sic projecta intelligatur, ut utriusque respectiva Puncta singula tantundem distent à conversionis Axe.

PROP. XIII.

Si circa rectam quamvis, ut conversionis Axem feratur (conversione integrâ vel partiali) Linea recta terminata, in eodem (cum Axe) Plano utcunque posita, (modò ne axem secet, aut illi sit ad angulos rectos:) Quæ à conversa recta describitur Superficies Curva, æquatur Superficiei Cylindri recti, quæ simili conversione describitur à recta quæ æqualis sit Axis Portioni duabus rectis à conversæ rectæ extremis punctis ad axem perpendicularibus interjectæ, in illa ab axe distantiâ quæ æqualis sit perpendiculari, medio conversæ rectæ puncto insistenti, ad axem terminatæ, circumlatâ. A: B. C;

Quódque de unâ conversâ rectâ dicitur, pluribus similiter accommodabitur. D;

Ideoque; Si Semi-circumferentiæ Circuli, vel arcui minori, circumponatur ex continuis rectis (quæ mediis suis punctis peripheriam contingant) conflata linea: Quæ ab hac lineâ compositâ, circa istius circuli diametrum quamvis (quæ illam non secet) conversâ, describitur Superficies curva; æquatur Superficiei curvæ E.

Cylindri recti, æque alti, basin habentis exposito circulo æqualem.

F. Adeoque &; Superficies curva quæ a Semi-perimetro (vel hujus portione, ex integris Lateribus quotlibet constante) *Polygoni regularis*, circa Polygoni illius diametrum (quæ illam non secet) conversâ describitur; æquabitur superficiei curvæ Cylindri recti æquè-alti, basem habentis æqualem circulo qui Polygono illi inscribitur. Et Partes partibus respective sumptis.

G. Et, speciatim; *Superficies Sphærica*, æquatur superficiei curvæ Cylindri recti circumscripti: Ejúsque Portiones, respectivis hujus portionibus; sive Planis per Axem, sive planis ad Axem rectis, abscissis.

H. Atque hinc sequitur; Superficiem Sphæræ, æqualem esse quatuor circulis in Sphæra maximis.

I. Item; Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis interjecta, Altitudinibus (vel abscissis Axis Portionibus) esse proportionalia.

K. Et; Segmenti Superficiei Sphæricæ, duobus parallelis planis interjecti, Centrum gravitatis esse in Axis segmenti medio.

L. Quæ quidem Consectaria, etiam *Sinibus Rectis*, & *Subtensis* arcuum (mutatis mutandis) accommodanda sunt (utpote illorum in Superficie Sphærica Circulorum Radiis & Diametris.) Nempe,

Summa Sinuum Rectorum totius sive Quadrantis sive Semicirculi; adeoque & summa Chordarum vel Subtensarum arcuum totius sive Semicirculi sive Circuli integri æquatur Parallelogrammo circumscripto. Et partes partibus respective sumptis, quæ parallelis planis abscinduntur. Nempe,

Summa Sinuum Rectorum integri Quadrantis, æquatur Quadrato Radii: Summa Sinuum rectorum totius Semicirculi; vel Subtensarum arcuum in Semicirculo; duobus Quadratis Radii: Et Summa Subtensarum in Circulo integro, Quadrato Diametri, seu quatuor Quadratis Radii. M.

Item (in partibus horum) Summa Sinuum rectorum cujusvis Arcûs particulis (in suo situ) convenientium, æquatur Parallelogrammo æque-alto, basem habenti Radium Circuli. (Summaque Subtensarum correspondentium, hujus dupla.) N.

Adeoque; Summæ partiales, sunt Altitudinibus (seu Axis particulis interceptis) proportionales. O.

Et; Summæ (sive Partialis, sive Totalis,) Centrum-gravitatis, in mediâ Altitudine; Subtensarum quidem, in ipso Axis medio; Sinuum, saltem æque-altum. P.

Hinc eadem etiam transferuntur ad *Superficiem curvam Ungulæ*, super Semicirculum, ejúsve Portionem erectæ, cujus Acies sit Diameter Semicirculum terminans. Nempe, Q.

Si plani secantis ad circuli planum Inclinatio, sit graduum 45, seu Semi-quadrantalis, (adeóque altitudo maxima, æqualis maximo Sinuum;) Curva Superficies æquatur Summæ Sinuum rectorum; (& partes partibus respectivè sumptis.)

Si verò Altitudo maxima, sit ad maximum Sinuum, ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium; erit Ungulæ Curva Superficies, æqualis curvæ superficiei Sphæræ vel Hemisphærii eisdem planis (Axi rectis) interjectæ. Atque in aliis Altitudinibus proportionaliter. R.

Et Centrum Gravitatis (quæcunque sit Ungulæ altitudo) in perpendiculari Plano medio inter extremos Sinus. S.

Atque hæc eadem, ad *Figuram Sinuum Rectorum*, sive M, N, T.

Qua-

Quadrantis unius ſive totius Semicirculi, (quæ quidem nihil aliud eſt, quam illa Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindri Curva Superficies in planum expanſa,) ſimiliter accommodantur. Nempe; Figuram illam Sinuum rectorum unius Quadrantis, æqualem eſſe Quadrato Radii; totius autem Semicirculi, æqualem duobus Radii Quadratis; & Segmentum quodvis duobus ſinibus interjectum, æquale facto ex Radio in Diametri Circularis Segmentum duobus correſpondentibus in Semicirculo Sinibus interjectum ducto. (Unde & alia ejuſdem portio quælibet, curvæ hujus particulâ & rectâ rectíſve terminata, ſimiliter data erit.)

V. Eadémque porro ampliantur, ad *Summas Quadratorum, Cuborum, Biquadratorum*, aliarúmve poteſtatum, eorundem *Sinuum Rectorum.* Nempe; Ut *omnes Sinus Recti*, Segmento cuivis Semicirculi (parallelis Sinibus interjecto) reſpondentes, æquantur facto ex Radio in Diametri Segmentum interjectum ducto: Sic & eorundem *Sinuum Quadrata omnia*, æquantur Radio in omnes ordinatim-applicatas (eâdem ab invicem diſtantiâ ſumptas, quâ diſtant in arcu circulari Sinus ipſi) ſegmentum illud complentes ducto: Et Sinuum illorum *Cubi omnes*, æquantur Radio in harum Ordinatim-applicatarum Quadrata: Siniúmque *Biquadrata*, Radio in harum Cubos ducto: & ſic deinceps.

W. Atque hinc porro habetur, Momentum Superficiei Ungulæ iſtius Semicylindri, ejúſve ſegmenti, reſpectu (aciei ſuæ) Diametri circularis. (Nempe, in Semiquadrantali Ungula, Sinuum illorum Quadratorum Summæ æquale: in aliis, pro altitudinum ratione.) Ipſumque gravitatis Centrum.

X. Item; Figuræ Sinuum Rectorum, ejúſve Segmenti, Momentum

mentum respectu rectæ cui adjacent Sinus illi: Vel, Semiquadrantalis Ungula (unde & de aliis Ungulis fiet judicium pro altitudinum ratione,) Figuræ Sinuum Rectorum, ejúsve Segmenti, aciem habens rectam illam cui adjacent. (Nempe, Semissis Summæ Quadratorum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis Plani distantia ab ipsâ cui adjacet rectâ.

Item; Hujus Ungulæ Momentum, respectu ejusdem adjacentis rectæ, aciei suæ. (Nempe, Triens summæ Cuborum eorundem Sinuum.) Adeoque, Centri gravitatis inde distantia. (Intellige: Si priùs cognoscatur, tum ordinatim-applicatarum illarum Summa, hoc est, ipsum Semicirculi Segmentum; tum summa quadratarum earundem ordinatim-applicatarum: Quorum utrumque methodis jam notis cognoscuntur: atque hic infra docentur.) Y.

Circa Axem X S, recta t t (in eodem plano constituta) convertatur; cujus medio Puncto T insistens perpendicularis T C, axi occurrat in C: Ab extremis autem punctis t, t, perpendiculares ad axem ducantur t d, t d; atque, à T medio, T D. A. Fig. 149.

Si sit t T t axi parallela: Manifestum est, tum T C, T D, eandem esse rectam, tum d D d, t T t, (parallelas parallelis terminatas,) rectas æquales; adeoque constare propositum.

Sin parallela non sit; occurrat Axi in A: Eritque (propter parallelas, & similia triangula,) t T t, ad d D d; ut A T ad A D; hoc est, (propter similia triangula,) ut C T, ad T D. Adeóque, factum ab extremis, t t in T D; æquabitur facto à mediis, d d in C T. Et (propter, similes Peripherias, radiis suis proportionales,) Factum ex t t in peripheriam radio D T descriptam, ad factum ex d d in similem peripheriam descriptam radio C T, vel qui huic æqualis sit. Adeóque (per prop. præced.) Superficies curva quæ à conversâ t t (cujus centrum gravitatis est T, ejúsque ab axe distantia T D) describitur; æqualis erit curvæ superficiei Cylindri, quæ rectâ d d vel huic æquali describatur, in distantia ab axe quæ sit ipsi C T æqualis. Quod erat demonstrandum.

Nempe; quâ ratione C T longior est quam D T, eâdem brevior est d d quam t t.

Dico

B. Dico autem; *modò ne Axem secet*; quoniam (ut ad prop. præced. dictum est,) hoc casu, duarum curvarum differentiæ, æqualis esset illa Superficies Cylindrica.

C. Item; *ne sit ad axem ad angulos rectos:* quoniam, hoc casu, non Curvam sed Planam superficiem describeret conversa recta; cui in Curvâ superficie Cylindricâ nihil responderet. Nec; de illâ procederet demonstratio.

D. Quodque de unâ conversâ rectâ dictum est; pluribus similiter accommodabitur; ductis, a singularum punctis mediis, ad axem, respectivis rectis. Quippe si in omnibus eadem sit, vel æqualis, recta T C; ejusdem Superficiei Cylindricæ segmentis æquales erunt quæ à t t rectis describentur: Sin minus; diversarum.

Fig. 150.

E. Putà; Si circa Semiperipheriam (arcúmve adhuc minorem) circumponatur, ex rectis conflata t t t linea; quarum singularum puncta media T, T, sint in T T peripheria; adeóque T C, T C, invicem æquales: rectis autem t t, t t, æque-altæ d d, d d, axis portiones; atque his æquales δ δ, δ δ; quarum ab axe distantia d δ sit æqualis ipsi T C, (quæ cum sit inscripti circuli radius; eundem tanget δ δ δ.) Ostendetur, ex jam demonstratis, Superficies rectis t t, t t, descriptas, sigillatim æquales eis esse quæ rectis δ δ, δ δ, describuntur. Ergo; quæ totâ t t t describitur, toti descriptæ à δ δ δ. Quod itidem probandum erat.

F. Adeoque; Si t t t sit tota Semi-Perimeter Regularis Polygoni: De hac item constat. Sin ipsius saltem aliqua latera; De superficie saltem his lateribus descriptâ constat. Sin forte, ad complendam Semiperimetrum, desit Semi-latus, ut t d; quod perpendiculare sit ipsi d d Axi; (vel etiam utrinque inter lineæ compositæ t t t extrema, & axem, simile sit interstitium:) saltem tota superficies Curva quæ à Semiperimetro describitur, æqualis jam ostensa est descriptæ Cylindri Curvæ à δ δ δ. Quippe quæ à t d describitur, plana erit: nec magis hic in considerationem venit, quam Cylindri Bases. De Curvis utique Superficiebus procedit Propositio.

(Atque hinc facile deducerentur, non modò ea prope omnia quæ ab *Archimede*, de *Sphæra & Cylindro*; sed & eorum plurima quæ à *Torricellio*, de *Solidis Sphæralibus*, demonstrantur.)

G. Denique; Cum Circulus aliud non sit quam Polygonum regulare laterum numero infinitorum; sitque Semiperipheria, istius Polygoni Se-

Fig. 151.

Semiperimeter; (juxta def. 1. Cap. 4.) etiam hic ſpeciatim verum erit quod de omnibus demonſtratum eſt. Hoc eſt; Quæ Semiperipheriæ D T D circa axem D D converſione deſcribitur Superficies Sphærica, æquatur ſuperficiei Curvæ Cylindri æquè-alti à rectâ δ δ deſcriptæ; Et portiones illius portionibus hujus reſpectivè ſumptis; putà, quæ à curva D T deſcribitur, illi quæ à recta δ d æque-alta; item, quæ ſemiconverſione unius, illi quæ à ſemiconverſione alterius; (& in aliis ſimiliter converſionibus imperfectis.) Quæ itidem erant demonſtranda.

Atque hinc ſequitur; Superficiem Sphæræ, quatuor circulis maximis æqualem eſſe. Eſt utique Circuli in Sphæra maximi peripheria, æqualis peripheriæ baſis expoſiti Cylindri (propter æquales utriuſque radios:) eáque ducta in latus Cylindri, quod æquatur Diametro Sphæræ,) exhibet Cylindri ſuperficiem curvam, ut notum eſt; (vel, quod eodem recidit, recta δ δ in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ eadem eſt cum peripheria circuli in Sphæra maximi, eandem exhibet ſuperficiem curvam Cylindri, per prop. præced.) Cum itaque quod fit ex Semidiametro in Semicircumferentiam æquetur Circulo, (ſive, quod fit ex Semidiametro in peripheriam ipſius puncto medio deſcriptam, quæ dimidia eſt peripheriæ totâ deſcriptæ:) quod fit ex tota Diametro in totam Peripheriam, (hoc eſt, Curva ſuperficies Cylindri, adeoque & Sphæræ,) æquatur Quadruplo ejuſdem circuli maximi. Quod erat propoſitum. H.

Item Superficiei Sphæricæ Segmenta, parallelis planis abſciſſa, altitudinibus (ſive portionibus Axis abſciſſis) ſunt proportionalia. Æqualia ſcilicet reſpectivis ſegmentis Superficiei Curvæ Cylindricæ; quæ ſunt altitudinibus proportionalia. Quod itidem demonſtrandum erat. I.

Adeoque; ut Superficiei Curvæ Cylindricæ, (per prop. 1 & 5 hujus,) ſic & Segmenti Sphæricæ, parallelis planis abſciſſi, Centrum gravitatis eſt in Axis Medio. Nam, quotcunque planis parallelis, utraque ſecetur ſuperficies curva; æqualia erunt reſpectiva hujus atque illius Segmenta; & (ſi intelligantur numero infinita, juxta def. 1. Cap. 4.) æqualiter à medio plano remota, adeoque & æqualiter reſpectu ejuſdem ponderantia. Eſt igitur in plano medio (baſibus parallelo) per 4 hujus; eſtque in Axe, per 5 hujus; ergo in Axis puncto medio, per 26 Cap. 4. Quod erat etiam demonſtrandum. K. Fig. 152.

L. Quæ quidem Sinibus rectis, & Arcuum Subtensis sive Chordis, facilè accommodantur.

Fig. 153. Intelligantur enim, tum à singulis punctis sive particulis infinitè-exiguis Diametri circularis sive Axis A α, Ordinatim-applicatæ, ad δ δ Tangentem circuli parallelam pertingentes, (parallelogrammum circumscriptum complentes:) tum à Semicircularis arcus A D α singulis punctis, sive particulis infinitè-exiguis (particulis illis Diametri æqualibus) Sinus recti ad Diametrum vel Axem A α demissi: (Quorum itaque numerus seu multitudo, reputanda erit ad numerum seu multitudinem ordinatim-applicatarum, ut est Longitudo Semi-pheriæ ad Diametrum Circuli.)

Cum itaque singulæ arcûs Particulæ; seu earum Tangentes, cum particulis illis exiguis quasi coincidentes; sint (ut jamjam ostensum est) in eâ ratione magis Obliquæ, seu minus Altæ, quâ Breviores sunt Sinus recti inde demissi: adeóque, Arcus æque alti, in eâdem ratione Longiores, indéque Sinus demissi eò plures in eadem altitudine quo breviores sunt; (& quidem eò plures quam sint in eâdem altitudine ordinatim-applicatæ expositæ, quo breviores sunt quam illæ ordinatim-applicatæ Radio æquales:) Erunt ubique, in eâdem altitudine, omnes simul Sinus recti, omnibus simul ordinatim-applicatis, æquales: (supplente scilicet Multitudine quod in Longitudine deest.)

M. Adeóque; Omnes Sinus recti Quadrantis A C D, omnibus Ordinatim-applicatis Quadrati A C Δ δ.

Fig. 155. Hoc est; (Si intelligatur Arcus A D in rectam extendi; eique ad angulos rectos insistere Sinus recti in suis respective punctis; & per eorum omnia extrema puncta duci curva, Figuram terminans, quæ *Figura Sinuum Rectorum* dicatur;) Figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, A C D, Quadrato Radii æqualis erit.

Fig. 153. Item; Omnes Sinus recti, in A α D Semicirculi, omnibus Ordinatim-applicatis in Parallelogrammo A α δ δ.

Fig. 155. Hoc est, Figura Sinuum rectorum totius Semicirculo, A C α, duobus Quadratis Radiis.

Adeoque; Si, continuatis Sinibus, compleantur Subtensæ duplorum Arcuum; manifestum est (propter Subtensas Sinuum duplas) Omnes Subtensas Semicirculi, æquari duobus Quadratis Radii; & Omnes Subtensas totius Circuli, quatuor Quadratis Radii, sive Quadrato Diametri. Quod erat etiam probandum.

N. Cúmque hoc ubique obtineat; Idem in partibus non minus valet.

Pari

Putà, omnes Sinus Recti in portionibus Circularibus A B E, E B C D, Fig. 154.
E B F G, G F H K, &c. æquales omnibus Ordinatim-applicatis, in
Parallelogrammis A B ϵ δ, ϵ B C Δ, ϵ B F γ, γ F H κ, &c.

Hoc est, (expansis Arcubus in Rectas, erectisque Sinibus, & com- Fig. 154.
pletâ ut prius figurâ) Figura figuræ æqualis. Puta E B F G in figura 155.
Sinuum, æqualis Parallelogrammo ϵ B F γ: Et sic in cæteris. Quod
etiam erat probandum.

Sed &, Si Axis A α in Circulo, jam consideretur ut Libra, (in O.
situ Horizontali posita,) similiter ostendetur ipsius particulas æqua- Fig. 153.
les singulas, insistentibus (in suo situ) Sinibus rectis, æqualiter gra-
vatas esse; non minus quam, ex oppositâ parte, Ordinatim-appli-
catis.

Adeoque; (sive tota A α, sive pars ut B F consideretur,) Cen- P.
trum Æquilibrii erit in assumptæ Libræ medio; (per prop. 2 & 4 Fig. 154.
hujus.) Puta, Summæ Sinuum portionis E B F G, in altitudine
mediâ inter E B & F G, (sive ad easdem, sive ad oppositas centri
partes ponantur ipsæ E B, F G.) Quod erat itidem demonstran-
dum.

Dico autem, *In suo situ*: Quoniam si intelligatur (ut in figura Sinuum, fig. 155.) Arcus in rectam extendi: rem secus esse, (ob variatas sinuum distantias,) manifestum est. Nisi cum E B, G F, utrinque à Centro æqualiter distant.

Totúmque hoc quod de Sinibus Rectis (Arcuúmve Subtensis) hic traditur, eodem planè principio nititur, atque illud de Superficie Sphæricâ, ejúsque partibus. Quippe Sinus Recti, Arcuúmque Subtensæ, in suo situ existentes, non sunt nisi Radii Diametrique Peripheriarum, æqualibus ab invicem distantiis remotarum, superficiem illam Sphæricam complentium. Atque ut illæ omnes Peripheriæ, omnibus Cylindricam superficiem complentibus Peripheriis æquantur: Sic & Illarum omnes Radii, & Diametri, omnibus item Radiis, & Diametris, Harum. Quod & in partibus obtinet respectivè sumptis pariter utrobique.

Eadem Curvæ Superficiei Ungulæ sic accommodantur. Q.
Si super A α D Semicirculo, vel ipsius Segmento quovis, ut E B F G, Fig. 154.
(rectis E B, G F, quibusvis, quæ sint ad angulos rectos Axi A α, inter-
jectis,) erigatur Ungula, cujus Acies (seu communis intersectio Ba-
sis Planique secantis) sit in A α; sitque Planorum (Basis scilicet, Pla-
nique secantis, seu Ungulam abscindentis,) Inclinatio, Semi-quadran-
talis: (quam *Semi-quadrantalem Ungulam* appellamus:) Rectis

 EB,

EB, GF, reliquísque hisce parallelis,) insistet Triangulum Rectangulum, & quidem (propter Inclinationem Semi-quadrantalem) Isosceles. Adeoque (cum hoc ubique obtineat) singulis Peripheriæ AD α, vel EG, punctis, insistent rectæ (curvam Ungulæ Superficiem complentes) suarum distantiis ab Aα, seu Sinibus rectis, æquales. Eritque, propterea, Curva Superficies Ungulæ, æqualis summæ

Fig 155. Sinuum rectorum; sive (extenso in rectam arcu ADα, vel EG, erectísque Sinibus, & completâ ut priùs figurâ,) correspondenti Figuræ Sinuum rectorum, ejúsve portioni correspondenti. (Est utique Figura illa Sinuum Rectorum AαC, nihil aliud quam istius Ungulæ Superficies curva, in planum expansa.)

Fig.154. Hoc est, per modò demonstrata, Parallelogrammo αAδ (fig. 154) si Basis Ungulæ sit AαD: vel, Parallelogrammo BFγε, si Basis si EG. Et partes partibus respectivè sumptis æquales.

Fig.154, 155. Nempe, Quæ insistet arcui EG curva superficies Ungulæ Semi-quadrantalis (aciem habentis BF) æqualis erit superficiei planæ EBGF in figura Sinuum; hoc est BFγε Parallelogrammo. Et sic ubique.

R. Si verò (pro alia Plani secantis ad Basin Inclinatione) alia sit altitudo:

Fig.154. putà, altitudo in E, ad distantiam EB, (& sic ubique) ut Peripheria vel Semiperipheria ad Radium: Pro Sinubus, Sumendæ erunt Peripheriæ vel Semiperipheriæ hisRadiis descriptæ,(saltem Rectæ his Peripheriis vel Semiperipheriis æquales;) adeóque Ungulæ curva Superficies, æqualis erit Superficiei Sphæricæ, vel Hemisphæricæ, (hujusve Portioni respectivæ,) ejusdem Arcûs ADα, vel EG, conversione vel semiconversione (circa Aα) descriptæ. Atque in aliis altitudinibus proportionaliter. (per prop. 11 & 12 hujus.)

Adeóque, pro Parallelogrammis αAδ, BFγε, sumenda erunt alia æque-alta; sed quorum Bases, ad Basin Aδ vel CΔ, (Radio Circuli æqualem,) sint in ea ratione quæ est Altitudo in E (vel alio Peripheriæ puncto,) ad hujus ab Aα distantiam.

S. Eritque, propter eandem rectæ EB, rectæque ipsi in E insistentis, (& de reliquis similiter,) distantiam à Plano Sphæram tangente in α, (vel huic parallelo quovis;) Centrum Gravitatis in eâdem ab illo Tangente Plano (Planóve illi parallelo) distantiâ, quâ est Centrum gravitatis Summæ Sinuum, vel Superficiei Sphæricæ, (ejúsve portionis,) correspondentis. Hoc est, in Plano inter extremos Sinus, (puta inter EB, GF,) medio. Quæ itidem erant demonstranda.

Hujus autem Figuræ Sinuum rectorum A α C (quam totam duobus Radii quadratis æqualem ostendimus,) si portionem aliquam, duabus utcunque rectis Basi perpendicularibus interjectam, libeat mensurare; puta E B F G: Sumptis in Semicirculo (huic respondente) A D α (fig. 154.) Sinibus rectis E B, G F; quæ æquales sint, & similiter siti ipsis E B, G F, in figura Sinuum (fig. 155.) Interjecta Diametri Circularis portio B F, in ejusdem Circuli Radium ducta; exhibebit Rectangulum, expositæ portioni E B G F in figura Sinuum, æquale: ut in supra demonstratis ostensum est. T. Fig. 155.

Si vero aliam quamvis ejusdem portionem, rectis utcunque abscissam, (utut non sint basi perpendiculares,) mensurare libeat: id fiet additis vel ablatis (hujusmodi Portioni perpendicularibus interjectæ) spatiis rectilineis; prout casus expositus postulaverit.

Sciendum porro est; Summam Sinuum rectorum, portioni Circulari EF B G respondentium, dici posse alio atque alio modo complere tum E B F G in figura Sinuum, tum E B F G in Semicirculo; sicut eandem portionem Circularem complere dicantur, tum illa Sinuum summa, tum summa Ordinatim-applicatarum, ipsis E B, G F, interjectarum. V. Fig. 154, 155.

Intelliguntur utique tum Sinus omnes ipsis E B, G F, interjecti in figura Sinuum tum omnes Ordinatim-applicatæ ipsis E B, G F, interjectæ in portione Circulari; æqualibus ab invicem distantiis remotæ & quasi æqualiter crassæ seu latæ: sive (quod eodem recidit) exiguis quidem sed æqualibus basis vel axis particulis insistentes; quarum itaque æqualium particularum non alia ratio haberi solet (in methodo Indivisibilium) quàm quod simul-omnes toti æquentur. Fig. 153, 154, 155.

Sed in E B F G portione Circulari, Sinus recti (propter Arcum, non Axem, in æquales partes divisum) inæqualibus ab invicem intervallis removentur; adeóque inæqualibus axis particulis insistunt; (minoribus prope polos, quàm longiùs inde:) quarum itaque habenda ratio.

Æqualibus utique Tangentibus t t, t t, (quas *T* dicemus,) sive Peripheriæ Particulis (quæ, cum infinite-exiguæ supponantur, cum ipsis Tangentibus reputandæ sunt coincidere;) inæquales respondent Axis Particulæ d d, d d, (quas *d* dicemus,) quibus insistere intelliguntur Sinus recti respectivè sumpti. Fig. 150.

Hac autem consideratione interpositâ, non minùs dicetur Summa Sinuum, quàm summa Ordinatim-applicatarum, complere expositam

tam portionem Circularem. Tam enim omnes-sinus s, in suas respectivè d ducti, quàm omnes Ordinatim-applicatæ (quas o dicemus) in suas singulæ T particulas æquales ductæ, eandem portionem Circularem complent. (Supponimus autem, quod & prius dictum est, particulas Peripheriæ quibus respondent Sinus recti, particulis Diametri seu Axis quibus respondent Ordinatim-applicatæ, æquales esse.) Hoc est, Omnes sd æquales omnibus oT, (iisdem E B, G F, interjectis,) portionem E B F G in Semicirculo, pariter complentes.
Fig. 153, 154, 155. Omnes autem iidem Sinus s, in Arcûs sui, Rectæve, E G, Particulas T; hoc est, Omnes sT; æquales spatio E B F G in figura Sinuum: adeoque Parallelogrammo (ut supra probatum) ϵ B F γ, portioni Circulari E B F G (vel huic simili & æquali e B F g) æque-alto, basin habenti Radio æqualem. (Differentia quæ extenso Arcu in Rectam oritur, est e g $\gamma\epsilon$.) Sic, in portione Circulari G F H K, Omnes Sinus recti s, in suas respectivè d, portionem complentes; æquantur Omnibus Ordinatim-applicatis o in T ductis, quæ complent (illi similem & æqualem) portionem g F H k: Omnes autem iidem s in T ducti, (complentes spatium G F H K in figura Sinuum,) æquantur Parallelogrammo γ F H κ; excedenti spacium Circulare g F H k, spatio γ g k κ. Et sic ubique.

Similiter; Sumptis tum Sinuum omnium, tum omnium Ordinatim-applicatarum, Quadratis, Cubis, &c. erunt *Omnes* s^2d æquales *Omnibus* o^2T: Item, *Omnes* $s^3d =$ *Omnibus* o^3T: & *Omnes* $s^4d =$ *Omnibus* o^4T. &c.

Fig. 149. Quanta autem sit d in singulis, sic colligitur. Cùm sit (ut in hac prop. § A. demonstratum est) t t ad d d, ut C T ad T D; Hoc est, T ad d, ut R ad s; Adeóque $sT = dR$: Erit $d = \frac{sT}{R}$.

Adeoque; $sd = \frac{s^2T}{R}$: Et *Omnes* sd, hoc est, *Omnes* oT, æquales *Omnibus* $\frac{s^2T}{R}$: Et *Omnes* s^2T, æquales *Omnibus* oTR: Sive, *Omnes* s^2, æquales *Omnibus* oR. Hoc est; Summa Quadratorum Sinuum Rectorum in spatio Circulari E B F G; æqualis,
Fig. 154. *Omnibus* oR; hoc est, ipsi spatio E B F G in radium R ducto. Et sic ubique.

Item, *Omnes* $o^2T =$ *Omn.* $s^2d =$ *Omn.* $\frac{s^3T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^2R =$ *Omn.* s^3.

Item;

Item; *Omnes* $o^3 T$ = *Omn.* $s^3 d$ = *Omn.* $\frac{s^4 T}{R}$. Adeoque *Omnes* $o^3 R$ = *Omn.* s^4. Et sic deinceps. Quæ ostendenda erant.

Atque hinc porro habetur Momentum Curvæ Superficiei Ungulæ Semi-cylindri, Semicirculo A D α, ejúsve Segmento cuivis B E G F, insistentis, (Aciem habentis A α,) respectu aciei suæ. Cum enim omnes Rectæ superficiem illam complentes, sint Sinibus rectis qui eisdem arcus punctis respondent Æquales, (nempe, si Planorum Inclinatio sit Semi-quadrantalis,) vel saltem Proportionalis, (quæcunque sit Plani secantis ad Basin inclinatio;) sintque earundem ab A α distantiæ, iidem Sinus Recti: Erunt earundem Momenta, ut Sinuum horum Quadrata; & Summa Momentorum, hoc est, Momentum Superficiei Curvæ, ut Summa Quadratorum illorum: Nempe huic summæ æqualis si Inclinatio Ungulæ sit Semiquadrantalis; vel ad illam saltem summam eam habebit rationem quam habet rectarum quævis superficiem illam curvam complentium ad suam respectivè ab A α distantiam. W. Fig. 154.

Quod quidem Momentum, per Magnitudinem (jam traditam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à Plano per Aciem A α, rectis superficiem curvam complentibus parallelo. Sed & in eo per aciem Plano esse constat, quod Rectas superficiem curvam complentes bisecat; per prop. 11. hujus. Atque in Plano inter rectarum illarum extremas medio, ad axem recto, jam ostensum est. § S. Ergo, ipsum Centrum datur. per prop. 26. Cap. 4.

Item; Momentum Figuræ Sinuum Rectorum A C α, ejúsve Segmenti ut B E G F, respectu rectæ cui adjacent A D α: Seu (quod eodem recidit) Semi-quadrantalis Ungula ejusdem Figuræ Sinuum, ejúsve Segmenti, aciem habens eandem A D α rectam. Cum enim (propter cujusque Rectæ Centrum gravitatis in medio sui) cujusque Sinuum Momentum, seu Triangulum eidem insistens, sit ejusdem Semiquadratum, (ducto scilicet unoquoque Sinuum in semissem sui:) erit semisumma Quadratorum, ipsum Plani Momentum, seu Semi-quadrantalis Ungula. (Unde & de aliis Ungulis, servatâ Altitudinum ratione, fiet judicium.) X. Fig. 155.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (jam inventam) divisum, exhibet Centri gravitatis distantiam, ab ipsa A α rectâ.

Denique; Hujus Ungulæ Momentum, hinc etiam habetur. Cum enim cujusque Triangulorum horum Centrum gravitatis, à recta A α, communi omnium Acie, aut huic potius insistente perpendiculari Plano distat, Y.

diſtat, duobus Trientibus iſtius cui inſiſtit Sinûs; ſitque ipſum Triangulum (uti jam oſtenſum eſt) Semiſſis Quadrati; Erit (propter $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) Cujuſque Trianguli Momentum, Cubi Triens: Adeoque Triens Cuborum Sinuum illorum omnium, eſt ipſum Ungulæ (Semiquadrantalis) Momentum.

Atque hoc Momentum, per Magnitudinem (modo inventam) diviſum, exhibet Centri-gravitatis Ungulæ, ab ipſo, in A α, erecto Plano.

Cùm verò, pro inveniendâ Summa Quadratorum, *Omn.* s^2; & Summa Cuborum, *Omn.* s^3; habenda erunt *Omn. o R*, & *Omn.* $o^2 R$, (per § V. hujus:) hoc eſt, Summa Ordinatim-applicatarum, & Summa Quadratorum ex illis, (in *R* ducenda:) Hæc quò habeantur nihil impedit; cùm & jam notis methodis, haberi poſſint; & methodis à nobis infra tradendis.

SCHOLIUM.

POſſet quidem hæc Propoſitio, prout Superficiem curvam ex circumducto Arcu Circuli ortam ſpectat, ab illâ quæ ſequitur (aliunde demonſtratâ) inferri. Nam datâ Arcûs Magnitudine, ejúſque Centro gravitatis; habetur tum Ungulæ ſuperficies curva, (ſive, quod eodem recidit, Summa Sinuum Rectorum;) tum Superficies curva illius converſione facta: per prop. 11 & 12 hujus. Sed perinde eſt ſive hæc ab illâ, ſive ab hac illa, inferatur; dummodo harum ſaltem altera aliunde probetur. Ego hanc potiùs præmiſi, propter ſequentem ex hac demonſtrationem perſpicuam, & quidem ſimpliciorem quam apud alios hactenus viderim. Illa enim (meâ methodo) directè ſequitur & immediatè, à demonſtratis olim ab Archimede, & poſt illum aliis.

Quæ autem hic tradita ſunt de Curva ſuperficie Ungulæ Semi-cylindri, aciem habentis Diametrum baſis circularis; ſeu, quod eodem recidit, Arcûs Momento reſpectu iſtius Rectæ: facile (per ea quæ ad prop. 11. tradidimus) transferri poterunt ad Ungularum aliarum Cylindricarum Superficies curvas, alios habentes Axes; ſeu Arcuum Momenta reſpectu rectarum aliarum. Cúmque omnes in ſuperficie Cylindricâ Figuræ, planorum ſectionibus terminatæ, reſolvi poſſint vel in curvas figuras Cylindraceas, vel ſaltem Ungulares hujuſmodi: poterunt propterea ejuſmodi Figuræ omnes in Superficie Cylindraceâ, hac methodo, ad certas menſuras revocari. Quod cùm ſolius calculi opus

opus ſit; atque etiam in ſequentibus aliquantò fuſiùs tradendum: non erit neceſſe ut hic pluribus exponam.

Ea verò Linea Curva, quæ *Figuram Sinuum rectorum* (modo memoratam) terminat, A C α fig. 155. alia non eſt quam Semi-ellipſis, ſectione Semi-Cylindri facta, in planum expanſa. (Quod olim docui in meo *de Cycloide* Tractatu; & in ſubjunctâ illi Epiſtola, pag. 99.) Fig. 155.

Quippe ſi ſuper A α D Semicirculo (fig. 154.) erigatur Semi-cylindrus, altitudinem habens, in D, æqualem ipſi D C; perque punctum ipſi D (in ea altitudine) imminens, Baſiſque diametrum A α, tranſeat Planum (Ungulam Semi-quadrantalem abſcindens;) Sectionem illam, Plano ſecanti & Superficiei Cylindricæ communem, Semi-ellipſem eſſe conſtat. Eadem vero abſciſſæ Ungulæ curva ſuperficies, in planum expanſa; eſt ipſa quam *Figuram Sinuum rectorum* vocamus, A α C. Ipſaque A C α illam terminans, eadem eſt linea jam in planum expanſa, quæ, in Superficie Cylindri, fuerat Semi-ellipſis.

Sin porro, Planum idem (quod Ungulam hanc ex Semi-cylindro abſcindit) continuetur per totum Cylindrum, integram Ellipſin ſectione perficiens; eaque integra Ellipſis, eodem modo quo hæc ſemi-ellipſis, expanſâ in planum ſuperficie curvâ, expandatur: Continuata curva A C α in A & α, exhibebit (utrinque à C) curvam eam (quam *Ellipſin expanſam* pridem nominavimus) quæ *Figuram Sinuum verſorum* terminabit. Quod in Tractatu de Cycloide fuſiùs oſtendimus; quæque in iſtius Tractatus Fig. 7 & 30. exhibetur: Et in ſequentibus ulterius conſiderabitur, ad prop. 17 hujus.

PROP. XIV.

A,B. Arcûs Circuli, Centrum gravitatis, est in Axis sui eo Puncto, cujus distantia à Centro Circuli, est ad Radium, C. ut expositi arcûs Chorda, ad Arcum suum: Et quidem, in Semiperipheria, ut Circuli Diameter ad Semiperipheriam; seu ut Duplum Radii, ad Peripheriæ Semissem.

D. (Adeoque; Datâ ratione Chordæ cujusvis ad Arcum suum; datur Arcûs Centrum gravitatis: Et, Dato Arcûs cujusvis, totâ Peripheriâ minoris, Centro gravitatis; datur Arcûs ad Chordam suam ratio: Et, consequenter, Circuli Quadratura, seu ratio Diametri ad Perimetrum.)

E. Estque Distantia Centri-gravitatis, Superficiei Solidive, conversione (perfecta vel imperfecta) facti, ab Axe conversionis suæ; ad Distantiam Centri-gravitatis, correspondentis Ungulæ (Superficialis Solidæve,) à Plano per ipsius Aciem transeunte (rectis in ipsius Curva superficie parallelo;) ut est, ad conversionis Ar- F. cum, Chorda sua: Et quidem, in Semiconversione, ut Diameter ad Semiperipheriam; seu, ut Duplum Radii, ad Peripheriæ semissem.

G. Atque hinc habetur, Superficiei Sphæricæ, Zonæ dimidiæ (aliúsve imperfectæ) Centrum gravitatis.

A. Fig. 156. Esto Arcûs circularis B A B, qui non sit major Semiperipheria, Chorda B B; a cujus extremis punctis B, B, demissæ (ad parallelam Diametrum D C D) Perpendiculares sint B b, B b. Adeoque, si circa D C D ut Axem, converti intelligatur D A D semiperipheria; quæ à D B describitur portio superficiei Sphæricæ, æqualis erit facto ex b D in Circuli Peripheriam, (atque hoc utrinque;) quæque B A B

BAB describitur, æquabitur facto ex bb, hoc est BB, in eandem circuli Peripheriam: (per §. G, H, I, prop. præced.) Hoc est, si Chordæ seu Basis BB magnitudo ponatur c; &, integræ Peripheriæ, P: erit, quæ ab Arcu describitur curva Superficies, cP.

Est autem, quæ ab illo Arcu describitur Superficies curva; æqualis facto ab Arcu in Peripheriam Centro gravitatis descriptam; per prop. 12 hujus.

Ergo; si per magnitudinem Arcûs, ut a, dividatur cP; prodibit $\frac{c}{a}P$ peripheria centro gravitatis descripta. Adeoque pro Peripheria P, substituendo Radium, ut R; erit $\frac{c}{a}R$ (cui æqualis ponatur G) Distantia centri-gravitatis à DCD diametro.

$$a)\,cP\,(\frac{c}{a}P. \qquad a)\,cR\,(\frac{c}{a}R=G. \qquad a.c::R.G.$$

Est autem, in Arcûs Axe AC; per prop. 3 hujus. Ergo, in illius eo Puncto quod à Diametro DCD, ejusve puncto C, (circuli centro,) ita distat. per prop. 26. Cap. 4. Nempe, ut a ad c, sic R ad G. Hoc est, ut Arcus BAB, ad BB Chordam; sic CA Radius, ad Centri Gravitatis à Centro Circuli distantiam, CG. Quod erat propositum.

Exponatur deinde, Arcus circuli Semiperipheriâ major, BαB. Invento, ut prius, residui arcûs BAB centro gravitatis G: erit (propter totius Centrum gravitatis C, per prop. 5 hujus) expositi Centrum-gravitatis γ, in GC continuatâ: Atque ut BαB, ad BAB; sic CG, ad Cγ: (per prop. 27. Cap. 4.) sive, ut $\alpha=P-a$, ad a; sic $G=\frac{c}{a}R$, ad $\gamma=\left(\frac{a}{\alpha}\times\frac{cR}{a}=\right)\frac{c}{\alpha}R$. Adeoque ut α ad c, sic R ad γ: Vel ut BαB Arcus, ad chordam suam BB; sic Radius Cα, ad Cγ, distantiam Centri gravitatis arcûs expositi, à circuli Centro C. Quod erat propositum. B.

$$\alpha.\,a::G=\frac{c}{a}R. \quad \gamma=\frac{c}{\alpha}R. \qquad \alpha.c::R.\gamma.$$

Speciatim verò, in Semiperipheria, (quam ad utrumvis duorum casuum referamus, perinde est;) cum sit (propter $c=D$,) $cP=DP$; C.

ſi hoc per Arcum $a = \alpha = \frac{1}{2} P$ dividatur; erit $\frac{1}{2}$P) D P (2 D peri-pheria Centro gravitatis deſcripta, cujus itaque Radius $\frac{2D}{P} R$, hoc eſt, $\frac{4R^2}{P}$, eſt Centri Gravitatis à Circuli Centro diſtantia; $CG = G = \frac{4R^2}{P}$.

$$a . c :: \tfrac{1}{2} P . D = 2R :: R . G = \frac{4R}{P} R = \frac{4R^2}{P}.$$

D. Corollarium item patet. Cum enim eadem ſit ratio Arcus BAB ad B B chordam ſuam, quæ eſt Radii C A ad C G diſtantiam centri gravitatis in ipſa C A: Datâ rationum unâ, datur alterâ. Datâ vero unius Arcûs (cujus ratio ad totam Peripheriam nota intelligatur) ad Chordam ſuam ratione; dabitur ejuſdem, adeoque totius Peripheriæ, ad aliam quamvis Chordam, adeóque ad Diametrum ipſam.

E. Item illud de Ungulis, Solidíſque aut Superficiebus converſione Fig. 157. factis, ſimiliter patet. Si enim Superficiei Solidíve b d d b (converſione Lineæ Planíve B D facti) ſinguli Arcus b B b, d D d, (plano XBD biſecti) extendi intelligantur in totidem ſibi æquales rectas βBβ, δ D δ, eiſdem plani X B D punctis ad angulos rectos inſiſtentes, atque ab eodem biſectas, (æqualem Ungulam, vel ex duabus compoſitam, complentes; per prop. 12 hujus:) Rectarum Centra Gravitatis in ipſis B, D, punctis conſtituta, ab axe converſionis X diſtabunt, reſpectivorum arcuum Semidiametris X B, X D. Ipſorum vero Arcuum ſingulorum (Rectis æqualium, & invicem ſimilium,) Centra gravitatis (propter curvationem) in eâdem ratione omnia (propter arcus ſimiles) propius admoventur ad converſionis Axem X; atque in eâdem ratione minuitur Momentum (reſpectu ejuſdem X axis) ſingulorum; adeóque & ſimul omnium; &, propterea, communis omnium Centri gravitatis diſtantia. Nempe (per modo demonſtrata) ut Arcus unus quilibet b B b, ad b b Chordam ſuam; ſic Diſtantia Centri gravitatis, adeoque Momentum, tum ſingularum, tum ſimul omnium, Rectarum β β, δ δ, &c. Ungulam complentium; ad Diſtantiam centri gravitatis, & momentum, tum ſingulorum reſpectivè, tum ſimul omnium, Arcuum b B b, d D d, &c. (Superficiem Solidúmve converſione circa X factum, complentium,) ab eodem X converſionis Axe

Axe. Putà, ut Arcus a, ad Chordam c; sic XG distantia illa, ad distantiam hanc $X\gamma$. Quod item demonstrandum erat.

Hoc est; In Semi-conversione; ut $\frac{1}{2}P$ ad $2R$; seu ut P ad $4R$. F.

Porro: Cum ostensum sit (ad §. K. prop. præced.) In portione G.
Sphæricæ Superficiei integræ, parallelis planis interjecta (quam *Zonam integram* appello,) putà, quæ Arcus EG circa BF conversione Fig. 154.
integrâ describitur; Centrum gravitatis esse in Axe medio, (putà, in rectæ BF puncto medio:) Adeóque in *Zonis imperfectis*, (puta, quæ conversione dimidiatâ, aliâve imperfectâ, describuntur,) & correspondentibus Ungulis; Centrum Gravitatis in eo plano esse, quod tantundem distet à plano Sphæram in α tangente, seu, quod medium est inter B & F axi rectum:

Sitque (per prop. 12 hujus) in illo plano quod (per conversionis Axem vel Ungulæ Aciem $A\alpha$ incedens) bisecat, in superficie Ungulari, erectas omnes rectas illam constituentes; in Sphærali, omnes Arcus conversione factos: Quippe, in quo Plano sunt Omnium Centra gravitatis, in eodem est commune omnium. (Quod autem rectarum illarum unam bisecat, bisecat omnes; Arcuúmque unum bisecans, omnes bisecat: propter similia illic Triangula, hic Arcus similes; ob eundem Inclinationis Angulum ad Aciem vel Axem $A\alpha$:) Adeoque in duorum illorum Planorum communi sectione:

Quo ipsum Centrum determinetur (in Ungulis hisce, & Zonis imperfectis,) Quærenda erit etiam ejusdem (in hoc plano per Axem transeunte) distantia ab Acie vel Axe $A\alpha$. Quod sic habetur.

Intelligatur Arcui cuivis, ut EG, insistens Semiquadrantalis Ungulæ (aciem habentis BF) superficies Curva: Cujus singulas rectas arcui insistentes (superficiem curvam complentes) æquales esse respectivis Sinibus rectis (ad §. Q. prop. præced.) ostensum est; (adeoque superficiem illam Summæ Sinuum æqualem; hoc est, facto ex Altitudine BF, quam l dicamus, in Radium ductæ; hoc est, lR; per §. N. prop. præced.) Sed earundem distantiæ à perpendiculari plano per axem BF, sunt item iidem Sinus recti. Momenta itaque singularum (magnitudine in distantiam ductâ) sunt ut Sinuum Quadrata. Adeoque omnium Momenta (respectu rectæ BF) ut *omnia* s^2, summa Quadratorum Sinuum. Hoc est (per §. V. ejusdem) ut spatium EBFG in Radium ductum. Quod quidem spacium EBFG (cum satis innotescat) dicamus k^2; adeóque $k^2 R$ est Momentum expositæ superficiei curvæ Ungularis, respectu rectæ BF. Atque hoc Momentum

per

per Magnitudinem $l R$ divisum; exhibet $\frac{k^2 R}{l R} = \frac{k^2}{l}$ distantiam Centri gravitatis a perpendiculari Plano super A α erecto.

Cúmque eadem sit ratio (hoc respectu) Ungularum cujuscunque sint Altitudinis; (utcunque enim auctâ Altitudine, adeoque & Magnitudine, & Momento; puta, in ratione P ad R; erit adhuc eadem distantia; $\frac{k^2 P}{l P} = \frac{k^2 R}{l R} = \frac{k^2}{l}$:) Erit cujuscunque Superficiei Ungularis, super Arcum Circuli erectæ, (Aciem habentis, Circuli Diametrum A α,) Distantia Centri gravitatis à perpendiculari plano per ipsam A α, $\frac{k^2}{l}$; hoc est, quæ oritur ex plano E B F G ad rectam BF applicato.

Eademque esset, (demptâ curvitate, quæ conversione oritur,) in Superficie conversione factâ, à conversionis Axe distantia; (propter singulos Arcus in hac, singulis in correspondentis Ungulæ superficie curva respectivis rectis, æquales; atque in eadem à conversionis Axe Distantia, qua sunt illæ à parallelo Plano per Aciem suam.) Sed, propter curvaturam conversione factam; minuenda est ea Distantia, pro Ratione quam habet Conversionis Arcus ad Chordam suam; ut jam ostensum est. Putà; in Semiconversione, ut Semiperipheria P, ad Diametrum $2 R$; in conversione Quadrantali, ut $\frac{1}{4} P$ ad $R\sqrt{2}$: Et, universaliter, ut Arcus a vel m, ad Chordam suam c vel n; sic distantia in Ungulâ (jam ostensa) $\frac{k^2}{l}$, ad $\frac{k^2 c}{l a}$ vel $\frac{k^2 m}{l n}$ distantiam Centri gravitatis Zonæ imperfectæ, à conversionis Axe.

Sed & in duorum Planorum, prius memoratorum, communi sectione reperiri, supra ostensum est: Ergo, in hujus sectionis eo Puncto quæ sic (ut dictum est) distat. Datur igitur, tum in Ungulâ, tum in Zonâ utut imperfectâ, ipsum Gravitatis Centrum. Quod erat ultimo ostendendum.

PROP. XV.

Sectoris Circuli (duobus Radiis & Arcu comprehensi) Centrum gravitatis est in Axis sui illo puncto, cujus à Centro Circuli distantia, est ad duos Trientes Radii, ut expositi Arcûs Chorda, ad Arcum suum. A. Fig. 158.

Adeoque, in Semicirculo; Ut Semiperipheria ad Diametrum, sic $\frac{2}{3}$ Radii ad distantiam Centri gravitatis Semicirculi à Circuli Centro.

Atque hinc etiam Segmenti circularis (recta abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Atque de aliis Portionibus similiter. Cæteraque quæ hinc dependent. B.

Nempe; Si ponatur, in exposito circulo, Radius CA vel CB $= R$; Peripheria integra, P; Arcus BA $= a$, adeoque BAB $= 2a$; Chorda BA $= c$; Sinus rectus BV $= s$, adeoque Chorda BB $= 2s$: Sinus versus AV $= v$, reliquúsque $V\alpha = 2R - v = b$; à Centro Distantia VC $= x = R - v$ si V sit supra Centrum, vel VC $= x = v - R$ si infra, vel VC $= x = 0$ si in Centro: Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$. C. Fig. 159, 160.

Erit, totius Semicirculi ADα, Magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: centrique gravitatis, sive à $\tau\alpha$, sive à TA, distantia, R; Momentum respectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{1}{4}R^2P$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R^2}{3P}$; Momentum respectu Aα, $\frac{2}{3}R^3$. D. I. Q.

Sectoris BCA magnitudo $\frac{1}{2}aR$: Centri gravitatis distantia a DC, $\frac{2s}{3a}R$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s}{3a}R$; à TA, $R - \frac{2s}{3a}R$; Momentum ejus, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$; momentum ejusdem respectu TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$: D, I.

Centri

Q. W. Centri gravitatis diſtantia ab $A\alpha$, $\frac{2vR}{3a}$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$.

E. K. Trianguli B C V, magnitudo $\frac{1}{2}sx$: Diſtantia Centri gravitatis à D C, $\frac{2}{3}x$; à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$; à T A, $R \mp \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}R + \frac{2}{3}v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR \pm \frac{1}{3}sx^2 = \frac{5R-2v}{6}sx$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}sxR \mp \frac{1}{3}sx^2 = \frac{R+2v}{6}sx$. Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}s$;

R.T. Momentum reſpectu $A\alpha$ $\frac{1}{6}s^2x$.

Semiſegmenti B V A, magnitudo $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$: Momen-

F. L. tum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a T A, $R - \frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a D C, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$; a B V, $\frac{2s^3}{3eR+3sv} - R + v$; momentum reſpectu B V, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}v^3$;

R.T.V. Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{vR+s^2}{3eR+3sv}v$.

Trianguli B A V, magnitudo $\frac{1}{2}sv$: Diſtantia Centri gra-

F. N. vitatis a T A, $\frac{2}{3}v$; a $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $svR - \frac{1}{3}sv^2$; reſpectu T A, $\frac{1}{3}sv^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}s$; Momentum

R. reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}s^2v$.

Segmenti A B A, magnitudo $\frac{1}{2}eR$. Momentum reſpectu

G. N. $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{6}svR$; reſpectu T A, $\frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$; diſtantia Centri gravitatis a D C, $\frac{sv}{3e}$; a $\tau\alpha$, $R + \frac{sv}{3e}$;

Q. a T A, $R - \frac{sv}{3e}$: Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R$: diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{v^2}{3e}$.

Ex

ntum re-

entri gra-
; à TA,
tu
Aα,

Momen-
respectu
ntri gra-

R +

s ab A

ntri gra-
ntum re-
mentum

respectu

+

R : di-

PRO
Et fi
Trian
fta
tu
Trian
vi
Ce
Sect o
dif
a D
Cen
Momen
Ung
facta
eor
dum
Quæqu
recta
huic
Plan
Quæqu
dem
dantu
Ntellig
n æqua
s compo

Et ſimiliter de ſegmento α B α, mutatis mutandis.

Trianguli B C α, magnitudo $\frac{1}{2} s R$: Centri gravitatis diſtantia a $\tau\alpha$, $R - \frac{1}{3} v$; a T A, $R + \frac{1}{3} v$; infra DC, $\frac{1}{3} v$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} s R^2 - \frac{1}{6} s v R$; reſpectu T A, $\frac{1}{2} s R^2 + \frac{1}{6} s v R$: Diſtantia centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3} s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6} s^2 R$. H.M. S.T.

Trianguli B V α, magnitudo $\frac{1}{2} s b$: Diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{2}{3} b$; a T A, $2R - \frac{2}{3} b$; momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3} s b^2$; reſpectu T A, $s b R - \frac{1}{3} s b^2$: Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3} s$; momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6} s^2 b$. H.M. S.T.

Sectoris B α A, magnitudo $\frac{1}{2} f R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2} f R^2 + \frac{1}{6} s b R$; reſpectu T A, $\frac{1}{2} f R^2 - \frac{1}{6} s b R$; diſtantia centri gravitatis a $\tau\alpha$, $R + \frac{sb}{3f}$; a T A, $R - \frac{sb}{3f}$; a DC, $\frac{sh}{3f}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{3} v R^2 + \frac{1}{6} s^2 R$; Centri gravitatis inde diſtantia, $\frac{2vR + s^2}{3f}$. H.M. S.

Momenta autem eadem ſunt ubique & Semiquadrantales Ungulæ: Solidaque reſpectiva integrâ converſione facta, ſunt ad Ungulas illas, ut P ad R; & Semiſolida, eorum Semiſſes; quod & proportionaliter intelligendum eſt de Solidis aliis imperfectâ converſione factis. O.

Quæque de Momentis & Solidis reſpectu rectarum T A, $\tau\alpha$, D C, B V, dicta ſunt; facile transferentur ad alias rectas hiſce parallelas: Et, quæ reſpectu A α, ad alias huic parallelas: Aut (propter ipſa Centra gravitatis Planorum data) ad alias etiam rectas transferentur. O.P.X.

Quæque de Circulo dicta ſunt, ejúſque Portionibus; eadem Ellipſi, & portionibus hujus, facile accommodantur. Y.

Ntelligatur Circuli Sector C B A B, vel C B α B, (major, minor, æqualis Semicirculo, perinde eſt:) ex infinitis numero Sectori- A. Fig. 158.
componi: Sive, quod (propter infinitatem) eodem recidit, ex

Gg totidem

totidem triangulis, invicem æqualibus; (quorum communis vertex sit C Centrum:) per def. 1. Cap. 4. Quæ totidem rectis (ut eorundem Triangulorum Axibus) repræsententur, ut C B. Cumque (per prop. 6 hujus) Centrum gravitatis in Triangulo, Altitudinis Triente a Base distet, (sive, à parallelo plano per Verticem, duobus Trientibus;) Si Radio C b $= \frac{2}{3}$ C B, describatur peripheria bb (expositæ B B similis, & similiter posita) transibit hæc per Triangulorum singulorum Centra gravitatis. Cujus itaque cum singula puncta (æqualibus ab invicem distantiis remota) æqualiter onerentur (æqualibus utique Triangulis, quorum Centra gravitatis sustinere intelliguntur:) idem erit arcûs b b sic onusti Centrum gravitatis, atque integri Sectoris B C B, per 16 Cap. 4. Facto itaque; ut chorda bb ad arcum suum, hoc est, ut Chorda B B ad arcum suum; sic CG, ad radium C b, hoc est, ad $\frac{2}{3}$ C B: (Hoc est, C G $= \frac{2}{3}$ ... R:) Erit G Centrum gravitatis Arcus b b, (per prop. præced.) adeoque & (per jam demonstrata) Sectoris B C B. Quod demonstrandum erat.

Hoc est, speciatim in Semicirculo; Ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad Chordam suam, hoc est, ad Circuli Diametrum, $2R$: sic duo Trientes Radii, $\frac{2}{3}R$; ad $\frac{8R^2}{3P} =$ C G, distantiam Centri gravitatis Semicirculi (in axe suo positi) à Circuli Centro C.

B. Corollarium, de Circuli Segmento; constat ex 27 Cap. 4. Quippe cognitis tum magnitudine, tum Centro gravitatis, Sectoris C B A B, vel C B α B, & Trianguli B B C: Cognoscitur inde tum Magnitudo tum Centrum gravitatis Segmenti B B A, vel B B α.

Idemque in aliis Circuli portionibus ostendetur.

C. Exempli gratia. In exposito Circulo, sit Radius C A (vel C B)
Fig. 159, $= R$: Integra Peripheria, P: Arcus B A $= a$: Adeoque BAB
160. $= 2a$: Chorda B A $= c$: Sinus rectus B V $= s$; adeoque Chorda B B $= 2s$: Hujusque ab A vertice distantia, (hoc est, Segmenti B B A altitudo, vel expositi arcus B A sinus versus) V A $= v$; ejusque Altitudo seu distantia à base, V $\alpha = 2R - v = b$; ejusque a Centro C distantia V C $= x$. (eritque $x = R - v$, si V sit supra Centrum C, adeoque BAB minor quam Semiperipheria; vel $x = v - R$ si V sit infra Centrum, adeoque B A B major quam Semiperipheria; vel denique $x = 0$, si V sit in Centro, adeoque BAB Semiperipheria.) Item $a - s = e$; $a + s = f$; $R + v = z$.

D. Est itaque Sectoris B C B A magnitudo aR, (nempe $\frac{1}{2}$BAB×C

per prop. 12 hujus ;) ejusque Semissis BCA, $\frac{1}{2} a R$. Et, speciatim, totius Semicirculi, (propter $a = \frac{1}{2} P$,) $\frac{1}{4} RP$. Fig. 159, 160.

Item Trianguli BBC magnitudo $\frac{1}{2}$ BB × CV (per prop. 6 hujus ;) hoc est sx: (Nempe, $sR - sv$, si V fuerit supra Centrum ; vel $sv - sR$, si infra:) Adeoque BCV $= \frac{1}{2} sx$: Hoc est, $\frac{1}{2} sR - \frac{1}{2} sv$, si supra ; vel $\frac{1}{2} sv - \frac{1}{2} sR$, si infra. E.

Adeoque, Si à Sectore BCBA $= aR$, Auferatur Triangulum BBC $= sR - sv$; vel Addatur Triangulum BBC $= sv - sR$; (prout fuerit V supra infrave Centrum :) utrovis casu habetur Segmentum BBA $=$ ($aR \mp sx =$) $aR - sR + sv = eR + sv$. Adeoque BVA $= \frac{1}{2} aR \mp \frac{1}{2} sx = \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR + \frac{1}{2} sv = \frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} sv$. F.

Hoc est: Si inscripto (in Circuli Segmento) Triangulo æquialto ABB ($= sv$) addatur Triangulum aliud ($aR - sR = eR$) cujus nempe Basis sit æqualis Circuli Radio ($= R$) & Altitudo ($= 2a - 2s = 2e$) æqualis excessui Arcûs supra subtensam: Habetur Segmenti BBA magnitudo ; $aR - sR + sv = eR + sv$. Ejusque Semissis, Semisegmentum BVA $= \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR + \frac{1}{2} sv = \frac{1}{2} eR + \frac{1}{2} sv$.

Adeoque, duo simul Segmenta abscissa AB, AB, (quæ, cum inscripto Triangulo, complent Segmentum BBA,) æquant $aR - sR = eR$, & eorum utrumvis $\frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} eR$. G.

Hoc est; Si ($a - s = e$) excessus Arcus BA supra suum Sinum rectum BV, ducatur in ($\frac{1}{2} R$) Semissem Radii: Habetur magnitudo Segmenti BA ; $= \frac{1}{2} aR - \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} eR$.

Si verò Segmento BBA ($= eR + sv$,) adjiciatur Triangulum BBα ($= hs$:) Habetur Sector BαBA (angulum habens BαB in peripheria, & BAB arcum,) $eR + sv + sh$; hoc est (propter $v + h = 2R$,) $eR + 2sR$; vel (propter $e = a - s$,) $aR + sR = fR$. Adeoque BαA $= \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} fR$. H.

(Idem proveniret, si Sectori BCBA $= aR$, adderentur duo Triangula BCα, BCα ; quorum communis Basis est C$\alpha = R$, & utriusvis Altitudo BC $= s$: adeoque simul utraque sR. Hoc est, BαBA $= aR + sR = fR$: Et BαA $= \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} fR$.)

Hoc est ; Si ($a + s = f$) aggregatum Arcus BA, & Sinus Recti BV, ducatur in Semissem Radii ($= \frac{1}{2} R$:) Habetur Sector BαA $= \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} sR = \frac{1}{2} fR$.

Similiter de Centro Gravitatis procedendum. I.

Nempe, (per jam demonstrata ad hanc propositionem § A,) Sectoris BCBA (sive Semicirculo major sit, sive minor, sive ipsi æqualis) Centrum gravitatis est in CA rectâ, supra Centrum C, quantum est

Fig.159, 160. $\frac{2s}{3a}R$. Nempe eâ ratione ad $\frac{2}{3}R$, quæ est Chordæ BB $=2s$, ad arcum BAB $=2a$; sive ut s ad a:) Adeoque illius, à puncto α, seu $\tau\alpha$ tangente, distantia est $R+\frac{2s}{3a}R=\frac{3a+2s}{3a}R$. Adeoque à TA (tangente verticis) $R-\frac{2s}{3a}R=\frac{3a-2s}{3a}R$. Eademque est, ab eisdem $\tau\alpha$, TA, distantia Centri gravitatis semisectoris BCA; Propter dimidias BV & huic parallelas semisectorem complentibus, totis BB & huic parallelis complentibus Sectorem integrum, proportionales, & in eisdem cum illis distantiis sive à $\tau\alpha$, sive à TA. (Quod & similiter intelligendum erit de Semi-conis, Semi-segmentis, &c. quorum Centra gravitatis sive à Basis plano, sive à Plano verticis basi parallelo, tantundem distant, quantum inde distant Centra gravitatis integrorum suorum sive Conorum, sive Segmentorum, &c. Quod semel monitum esto, ne opus sit idem sæpius repetere.) Et, speciatim, Semicirculi ADα, Centri gravitatis (utpote in DC jacentis) distantia sive à $\tau\alpha$, sive à TA, est $R=C\alpha=CA$.

Adeoque (propter magnitudinem Sectoris BCBA $=aR$, & BCA $=\frac{1}{2}aR$,) Momentum (respectu rectæ $\tau\alpha$ ut Axis Libræ) Sectoris BCBA, est $\frac{3a+2s}{3}R^2$, (magnitudine scilicet in distantiam ductâ;) & Semisectoris BCA, $\frac{3a+2s}{6}R^2$. Et, respectu rectæ TA, Momentum Sectoris BCBA, est $\frac{3a-2s}{3}R^2$, & ipsius BCA, $\frac{3a-2s}{6}R^2$. Et speciatim, totius Semicirculi ADα, momentum sive respectu $\tau\alpha$, sive respectu TA, (propter $a=\frac{1}{2}P$, & $s=0$,) est $\frac{1}{4}R^2P$.

K. Estque (per 5 & 6 hujus) Trianguli BBC, Centrum gravitatis in CV, ejusque à C Centro distantia $\frac{2}{3}CV=\frac{2}{3}x$. Adeoque à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x$; prout infra suprave Centrum fuerit; (nempe $R+\frac{2}{3}x$ si supra; $R-\frac{2}{3}x$ si infra Centrum;) Hoc est (propter $x=R-v$ si supra Centrum, & $x=v-R$ si infra Centrum,) utroque casu, $\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$. Adeoque ejusdem à TA distantia, $R\mp\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$.

Est autem (ut supra, § E,) magnitudo Trianguli BBC $=sx$; (hoc est, $sR-sv$ si supra, vel $sv-sR$ si infra Centrum.)

Quod ductum in Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{2}{3}x=\frac{5}{3}R-\frac{2}{3}v$, exhibet ejusdem, respectu rectæ $\tau\alpha$, momentum $sxR\pm\frac{2}{3}sx^2$ =

$=\frac{5R-2v}{3}sx$; Hoc eſt $\frac{5sR^2-7svR+2sv^2}{3}$, vel $\frac{-5R^2+7svR-2sv^2}{3}$; prout ſupra infrave fuerit. Fig. 159, 160.

Idemque ductum in ejuſdem à T A diſtantiam, $R{-\atop+}\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}R+\frac{2}{3}v$; exhibet ejuſdem B B C Trianguli momentum reſpectu rectæ T A, $sxR{-\atop+}\frac{2}{3}sx^2$; hoc eſt $\frac{sR^2+svR-2sv^2}{3}$ vel $\frac{-sR^2-svR+2sv^2}{3}$, prout ſupra infrâve Centrum fuerit.

Aut etiam (propter A α, A B, A V; hoc eſt $2R, c, v$; continue proportionales: adeoque $2vR=c^2=s^2+v^2$:) Illic quidem $\frac{5sR^2-3svR-2s^3}{3}$, vel $\frac{-5sR^2+3svR+2s^3}{3}$: Hic vero $\frac{sR^2-3svR+2s^3}{3}$, vel $\frac{-sR^2+3svR-2s^3}{3}$; prout ſupra infrâvé Centrum fuerit hoc Triangulum.

(Atque hic monendum duxi; quod oppidò notandum velim, ne ſit opus idem ſæpius repetere: Hanc reductionem in ſequentibus ſæpiſſime occurrere. Nempe, propter $2vR=c^2=s^2+v^2$; quoties occurrit c^2 vel v^2; pro c^2 ſubſtitui $2vR$; &, pro v^2, ſubſtitui c^2-s^2, hoc eſt $2vR-s^2$. Omnino enim expedire compertum habeo, ut unam aliquam formam deſignandi eandem quantitatem adhiberem; ad quam æquipollentes aliæ reducantur quum opus fuerit; ne ſymbolorum varietas confuſionem pareret. Quod memineris velim, ne, in reductionibus à nobis ſubinde crebrò faciendis, aliquando hæreas.)

Atque hoc Trianguli Momentum, reſpective Subtractum Additumve, (prout ſupra Centrum infrave fuerit,) Momento Sectoris BCBA, (nempe, $aR^2+\frac{2}{3}sR^2$ reſpectu rectæ $\tau\alpha$, & $aR^2-\frac{2}{3}sR^2$ reſpectu rectæ TA,) exhibet (utroque caſu) Momentum Segmenti B B A reſpectu rectæ $\tau\alpha$, $aR^2-sR^2+svR+\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR+\frac{2}{3}s^3$; & ſemiſegmenti BVA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$: Et, reſpectu rectæ T A, Momentum Segmenti B B A, $aR^2-sR^2+svR-\frac{2}{3}s^3=eR^2+svR-\frac{2}{3}s^3$; & ſemiſegmenti B V A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$. L.

Quæ quidem momenta, per magnitudinem ſegmenti B B A $=eR+sv$, aut ſemiſegmenti B V A $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$, (reſpective,) diviſa: exhibent Segmenti, aut Semiſegmenti, diſtantiam à $\tau\alpha$ $R+\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Atque à T A, $R-\frac{2s^3}{3eR+3sv}$: Adeoque illius altitudinem ſupra Centrum C, aut C D rectam, $\frac{2s^3}{3eR+3sv}$, hoc eſt $\frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv}$: Et ſupra rectam BB, ſeu BV,

$2s^3$

Fig. 159, 160. $\frac{2s^3}{3eR+3sv} - R + v = \frac{2s^3}{3aR-3sR+3sv} - R + v.$

Atque hæc demum, à BV, distantia; in magnitudinem ducta, exhibet momentum, respectu rectæ B V, Segmenti B B A, $\frac{2}{3}s^3 - aR^2 + sR^2 + avR - 2svR + sv^2 = -eR^2 + avR - \frac{1}{3}s^3$. Et semisegmenti B V A, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3. = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}szv.$

M. Deinde, Trianguli B B α, aut B V α, distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est $\frac{2}{3}h = \frac{4}{3}R - \frac{2}{3}v$: adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}h = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}v$. Quæ in magnitudines ($sh, \frac{1}{2}sh,$) ducta; exhibet Trianguli B B α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sh^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{8}{3}svR + \frac{2}{3}sv^2 = \frac{8}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR - \frac{2}{3}s^3$; &, respectu T A, $2shR - \frac{2}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR - \frac{2}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{2}{3}s^3$, & Trianguli BV$\alpha$, momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sh^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; &, respectu rectæ TA, $shR - \frac{1}{3}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$.

Quæ quidem momenta, addita respectivis momentis Segmenti B B A, & Semisegmenti B V A, (§ L inventis) exhibent Sectorum B α B A, B α A, momenta respectu earundem $\tau\alpha$, T A. Nempe, Sectoris B α B A momentum respectu $\tau\alpha$, $aR^2 + \frac{5}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR = fR^2 + \frac{1}{3}shR$; & respectu rectæ T A, $aR^2 + \frac{1}{3}sR^2 + \frac{2}{3}svR = fR^2 - \frac{1}{3}shR$: Et Sectoris B α A, momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & respectu T A, $\frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$.

Eodem modo; Trianguli B C α, Centrum gravitatis est in recta $\alpha\beta$, quæ à puncto α ad medium rectæ B C ducitur, ejusdem duas tertias versus α abscindens. Est autem ipsius medii puncti β, eadem altitudo supra $\tau\alpha$, quam habet rectæ C V medium punctum γ; nempe $\alpha\gamma = R \pm \frac{1}{2}x$ (prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) hoc est, (utroque casu) $\alpha\gamma = \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}v$. Adeoque distantia Centri gravitatis Trianguli B C α, à $\tau\alpha$ est $\frac{2}{3}\alpha\gamma = R - \frac{1}{3}v$; atque à T A, $R + \frac{1}{3}v$.

Adeoque (propter magnitudinem Trianguli unius B C $\alpha = \frac{1}{2}sR$, & simul amborum 2 B C $\alpha = sR$,) erit unius momentum respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, & simul utriusque $sR^2 - \frac{1}{3}svR$: Et respectu rectæ T A, momentum unius $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; & simul utriusque $sR^2 + \frac{1}{3}svR$.

Quæ quidem addita momentis Sectorum B C A, & B C B A, nempe $\frac{1}{2}aR^2 \pm \frac{1}{3}sR^2$, & $aR^2 \pm \frac{2}{3}sR^2$ (per § I.) exhibent momentum, respectu rectæ $\tau\alpha$, Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR$; & sectoris B α B A, $fR^2 + \frac{1}{3}shR$: Et respectu rectæ T A, momentum Sectoris B α A, $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 - \frac{1}{6}shR$; & Sectoris B α B A, momentum $fR^2 - \frac{1}{3}shR$. ut prius.

Atque

Atque hæc demum momenta, per suas respective planorum magnitudines ($\frac{1}{2}fR$, fR,) divisa; exhibent utriusvis Sectoris $B\alpha A$, $BaBA$, Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $R+\frac{sb}{3f}$; & à TA, $R-\frac{sb}{3f}$; Adeoque altitudinem ejus supra Centrum C, vel CD rectam, $\frac{sb}{3f}=\frac{2sR-sv}{3a+3s}$. Fig. 159, 160.

Similiter, Trianguli A B V, magnitudo, est $\frac{1}{2}sv$; distantia centri gravitatis à TA, est $\frac{2}{3}v$; adeoque, à $\tau\alpha$, $2R-\frac{2}{3}v$; & propterea ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $svR-\frac{1}{3}sv^2=\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$: &, respectu T A, $\frac{1}{3}sv^2=\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3$. N.

Quæ quidem momenta, subducta ex respectivis momentis Semisegmenti BVA, (nempe, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR\pm\frac{1}{3}s^3$, per § L.) relinquit Segmenti A B A momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; &, respectu T A, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$.

Atque hæc momenta, divisa per sectoris A B A magnitudinem, $\frac{1}{2}eR$ (per § G.) exhibent distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{sv}{3e}$; & à T A, $R-\frac{sv}{3e}$; adeoque supra D C, $\frac{sv}{3e}=\frac{sv}{3a-3s}$.

Pariter, de Segmento $\alpha B\alpha$ judicandum; puta, pro arcu $AB=a$, substituendo arcum reliquum ad Semicirculum $\alpha B=\alpha=\frac{1}{2}P-a$: & pro sinu verso $AV=v$, substituendo $\alpha V=b=2R-v$; item pro TA tangente contermino arcui A B, substituendo $\tau\alpha$ tangentem conterminum ipsi αB; &, vice versa, T A pro $\tau\alpha$. Quippe sic momentum Segmenti $\alpha B\alpha$, respectu Tangentis oppositi T A, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}sbR$; &, respectu Tangentis contermini $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}sbR$.

Aut etiam, ex $\frac{1}{4}PR^2$ momento totius Semicirculi A D α, respectu Tangentis utriusvis $\tau\alpha$ vel T A, auferendo $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$ momentum sectoris $B\alpha A$ respectu ipsius $\tau\alpha$ (per § M.) habetur residui ad semicirculum Segmenti $\alpha B\alpha$ respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{4}PR^2-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$; hoc est (propter $\frac{1}{2}P-a=\alpha$, & $v=2R-b$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}sbR$: Atque similiter inde subducendo ejusdem $B\alpha A$ sectoris momentum respectu T A, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$; habetur segmenti $\alpha B\alpha$, respectu ejusdem T A, momentum $\frac{1}{4}PR^2-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$; hoc est (propter $\frac{1}{2}P-a=\alpha$, & $v=2R-b$,) $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}sbR$. ut prius.

Et

O. Et simili ratione, mutatis mutandis, eorundem expositorum omnium Planorum momenta respectu alius rectæ ipsis τα, TA, BV, parallelæ; cujus distantia infra vel supra harum aliquam datur.
Fig. 159, 160.

Quodque de horum Planorum Momentis respectu rectarum τα, TA, BV, aut hisce parallelarum, dictum est; pariter intelligendum est de Ungulis super eadem plana erectis, quæ plano abscindantur per easdem respective τα, TA, BV, vel hisce parallelas, (quæ expositum planum non secent,) transeunte. Nempe; Si secantis plani ad expositum inclinationis angulus sit Semiquadrantalis seu grad. 45, (quam *Semiquadrantalem Ungulam* dicimus;) eadem erit (per 11 hujus) Ungulæ atque Momenti designatio. (Erit enim Ungulæ altitudo, super quodvis expositi plani punctum, eadem atque ejusdem puncti ab illâ rectâ quæ est communis planorum intersectio quam *Ungulæ aciem* dicimus, distantia.) Sin major fuerit minorve Inclinationis Angulus; major erit minorve illa Ungula; & quidem in ratione Tangentium Anguli Inclinationis. Nempe Solido Prismatico seu Columnari æquatur; cujus Basis, sit expositum Planum; Altitudo, æqualis altitudini rectæ Centro gravitatis insistentis; (ut ad prop. 11. ostensum est;) Hoc est, (si angulus Inclinationis sit Semiquadrantalis) æqualis distantiæ Centri gravitatis ab illa recta quæ concipitur vel ut Axis motûs, vel ut planorum, expositi & secantis, communis sectio, seu Acies Ungulæ.

Denique; Eadem quæ diximus Momenta, exhibent etiam Magnitudinem Solidi, quod expositorum Planorum circa expositas rectas conversione describitur; (per 12 hujus.) Nempe, in ea ratione ad momenta ut jam designata, vel Ungulas Semiquadrantales, quam habet Peripheria (integra, vel dimidia, &c. prout conversio illa est integra vel dimidia, &c.) ad sui Circuli Radium. Est enim distantia Centri gravitatis plani, ab expositâ rectâ, Radius istius Peripheriæ (sive perfectæ, sive imperfectæ) quæ conversionis Centri gravitatis circa illam rectam describitur.

Puta, Sectoris BCA, respectu rectæ τα Momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est (ut supra, § I.) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$; & respectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$. Ergo Solidum Annulare, illius integra conversione circa τα factum, est, $\frac{1}{2}aRP + \frac{1}{3}sRP$; &, semiconversione, $\frac{1}{4}aRP + \frac{1}{6}sRP$: Et, circa TA, integrâ conversione, $\frac{1}{2}aRP - \frac{1}{3}sRP$; & semiconversione, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{6}sRP$.

Item, Sectoris Bα A, respectu rectæ τα, momentum, vel Semiquadrantalis

drantalis Ungula, (ut § M.) eſt $\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR$; Fig. 159,
& reſpectu rectæ TA, $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR=\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}shR$. Ergo, 160.
Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP+\frac{5}{6}sRP-\frac{1}{6}svP=\frac{1}{2}fRP+\frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP+\frac{5}{12}sRP-\frac{1}{12}svP=\frac{1}{4}fRP+\frac{1}{12}shP$: Atque, circa TA, converſione integrâ, $\frac{1}{2}aRP+\frac{1}{6}sRP+\frac{1}{6}svP=\frac{1}{2}fRP-\frac{1}{6}shP$; &, converſione dimidia, $\frac{1}{4}aRP+\frac{1}{12}sRP+\frac{1}{12}svP=\frac{1}{4}fRP-\frac{1}{12}shP$.

Item, Semiſegmenti BVA, reſpectu ipſius $\tau\alpha$ momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR+\frac{1}{3}s^3$; Et, reſpectu TA, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3=\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$. Ergo Solidum illius integra converſione circa $\tau\alpha$ deſcriptum, eſt, $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP+\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP+\frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP+\frac{s^3P}{6R}$: Ac, circa TA, converſione integrâ; $\frac{1}{2}aRP-\frac{1}{2}sRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}=\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}svP-\frac{s^3P}{3R}$; & converſione dimidiâ, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}sRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}=\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}svP-\frac{s^3P}{6R}$.

Item, ejuſdem Semiſegmenti BVA, reſpectu rectæ BV, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, eſt (per § L.) $e-\frac{1}{2}R^2+\frac{1}{2}avR-\frac{1}{6}s^3$. Ergo Solidi illius circa BV, converſione integrâ, deſcriptum, eſt $-\frac{1}{2}eRP+\frac{1}{2}avP-\frac{s^3P}{6R}$; & converſione dimidiâ, $-\frac{1}{4}eRP+\frac{1}{4}avP-\frac{s^3P}{12R}$.

Quodque hic de Semiſolidis, (intellige, quæ converſione dimidiâ deſcribuntur,) oſtenſum eſt; quæ ſunt Integrorum dimidia: Similiter de aliis, quæ converſionibus aliis imperfectis, (puta Quadrantali, &c.) deſcribuntur; ſervatâ proportione, judicandum erit. Quod & in ſequentibus pariter intelligendum erit.

Quodque, de Solidis, Planorum horum converſione circa rectas $\tau\alpha$, TA, BV, oſtenſum eſt; ſimiliter ad alia, mutatis mutandis, accommodabitur, quæ eorundem planorum, circa aliam quamvis in eodem plano rectam illis parallelam (quæ planum convertendum non ſecet,) quacunque ab illis diſtantiâ, infra ſuprave, poſitam, converſione deſcribuntur.

Hh Atque

P. Atque jam quidem, quod ad Sectores integros B C B A, B α B A, Fig. 159, 160. & integrum Segmentum B B A, &c. quorum non modo Centri gravitatis altitudo, (puta quantum distat à τ α, T A, B V, vel C D, &c.) sed ipsa Centra jam determinantur (ut quæ sint, in altitudine designatâ, in ipso Axe, puta A α rectâ, per 5 hujus:) Illorum Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, satis determinantur; non modo respectu rectæ quæ sit ipsis τ α, T A, &c. parallela, sed respectu rectæ cujusvis expositæ utcunque in illo plano sitæ (saltem quæ convertenda Plana, seu, Ungulæ Basin, non secet. Nam, propter datum ipsius gravitatis Centrum, datur etiam ejusdem distantia a quavis sic expositâ rectâ: Unde reliqua consequuntur.

Quod etiam, de Sectore B C A, Segmentis A B A, α B α, Triangulis B V C, B C α, &c. similiter intelligendum est: utpote quorum ipsa Centra gravitatis non minus determinantur, quam ipsorum BCBA, BBC; quippe in illorum axe posita.

Sed Semisectoris B α A, & Semisegmenti B V A; quorum Centri Gravitatis nondum ipsa determinantur, sed ipsorum tantum à τ α, T A, vel quæ hisce parallelæ sunt rectis, Distantia: Momenta, Ungulæ, & Solida conversione facta, nondum determinantur, nisi respectu ipsarum τ α, T A, rectarum, aut hisce parallelarum. Quum vero eorum item Centrorum distantia ab A α determinata fuerit (quod jam facturi sumus;) adeoque illorum Centra ipsa determinata; eadem etiam ad rectas ipsi A α parallelas, aut etiam alias in eodem plano rectas, similiter transferentur.

Ut igitur, de his etiam, eadem universaliter determinentur: eorum ipsa Gravitatis Centra jam determinabimus, (per 26 Cap. præced.) exhibitâ eorum etiam ab A α distantiâ, quæ ipsis τ α, T A, &c. parallela non est.

Q. Nempe; Centri gravitatis Sectoris B C A, à recta A α, distantia, Fig. 161, 162. est $\frac{c^2}{3a} = \frac{2vR}{3a}$. Quod sic ostenditur. Bisectis BA, BA, arcubus in δ, δ; erit (propter arcum δδ, æqualem arcui BA $=a$,) Chorda δδ $=$ BA $=c$; ejusque semissis δε $=\frac{1}{2}c$. Item Sectoris BCA, Centrum gravitatis G, in rectâ C δ; ejusque à Centro distantia CG $=\frac{2}{3}\frac{c}{a}R$; (per hujus § A.) Atque (propter similia Triangula) ut Cδ $=R$, ad δε $=\frac{1}{2}c$; sic CG $=\frac{2}{3}\frac{c}{a}R$, ad Ge $=\frac{c^2}{3a}$, distantiam Cen-

tri gravitatis ab Aα; vel (propter $2vR=c^2$) $\frac{2vR}{3a}$. Et, speciatim, in Semicirculo ADα, (propter $v=2R$, & $a=\frac{1}{2}P$,) distantia Centri gravitatis ab Aα, est $\frac{8R^2}{3P}$. In Quadrante vero ADC, (propter $v=R$, & $a=\frac{1}{4}P$) distantia Centri gravitatis ab Aα, est similiter $\frac{8R^2}{3P}$.

Est igitur, (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}aR$, per § D.) Sectoris BCA, respectu rectæ Aα, momentum vel Ungula Semiquadrantalis, (ducta magnitudine in distantiam,) $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$. Adeoque Solidum integra conversione circa Aα descriptum, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; &, conversione dimidia, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$. Et, speciatim, Momentum Semicirculi ADα respectu Aα, vel correspondens Ungula, $\frac{2}{3}R^3$: Et solidum conversione circa Aα factum (nempe Sphæra integra) $\frac{2}{3}R^2P$; & Semisolidum, seu Hemisphærium, $\frac{1}{3}R^2P$. Fig. 159, 160.

Quæque Quadrantem spectant, sunt eorum Semisses.

Sin, ex hoc Sectoris BCA momento $\frac{1}{6}c^2R=\frac{1}{3}vR^2$; auferatur momentum (respectu ejusdem Aα) Trianguli ABC; hoc est (propter Basin AC=R; altitudinem BV=s, adeoque a base AC distantiam, $\frac{1}{3}s$,) $\frac{1}{6}s^2R$: Habetur, segmenti ABA, momentum (respectu ejusdem Aα) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}c^2R-\frac{1}{6}s^2R=\frac{1}{6}v^2R$. Quod, per magnitudi- $\frac{1}{2}tR$ (per § G.) divisum; exhibet Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{v^2}{3t}=\frac{2vR-s^2}{3a-3s}$. Solidumque ejusdem integra conversione circa Aα; $\frac{1}{3}vRP-\frac{1}{6}s^2P=\frac{1}{6}v^2P$; & conversione dimidia, $\frac{1}{6}vRP-\frac{1}{12}s^2P=\frac{1}{12}v^2P$.

Et similiter de segmento αBα, mutatis mutandis: Puta, substitutis *x* pro *a*, & *h* pro *v*.

Deinde, Trianguli BVC, distantia centri gravitatis ab Aα, (per 6 hujus) est $\frac{1}{3}BV=\frac{1}{3}s$. Adeoque (propter magnitudinem, ut prius $\frac{1}{2}sx$; hoc est, $\frac{1}{2}sR-\frac{1}{2}sv$, vel $\frac{1}{2}sv-\frac{1}{2}sR$, prout supra infrave Centrum fuerit;) ejusdem, respectu rectæ Aα, momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2x$; hoc est $\frac{1}{6}s^2R-\frac{1}{6}s^2v$, vel $\frac{1}{6}s^2v-\frac{1}{6}s^2R$, prout supra infrave fuerit. Adeoque Solidum integra conversione circa Aα factum, est, $\frac{s^2xP}{6R}$; (hoc est, $\frac{R-v}{6R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{6R}s^2P$, prout supra infrave fuerit:) Et, semiconversione, $\frac{s^2xP}{12R}$; hoc est (prout supra infrave fuerit) $\frac{R-v}{12R}s^2P$, vel $\frac{v-R}{12R}s^2P$. R.

Fig. 159, 160. Illudque Trianguli BVC momentum vel semiquadrantalis Ungula, momento vel Ungulæ semiquadrantali Sectoris BCA (respectu ejusdem $A\alpha$ rectæ,) sublatum si supra Centrum fuerit, vel additum si infra; exhibet momentum (respectu ejusdem $A\alpha$) vel semiquadrantalem Ungulam correspondentem, Semisegmenti BVA. Hoc est, si momento Sectoris BCA, $\frac{1}{6}c^2R = \frac{1}{3}vR^2$ (per § Q.) auferatur $\frac{1}{6}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$, vel addatur $-\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; habetur Semisegmenti BVA momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu ipsius $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque Solidum illius integrâ conversione circa $A\alpha$ descriptum, $\frac{1}{3}vRP - \frac{1}{6}s^2P + \frac{s^2vP}{6R}$: & Semiconversione, $\frac{1}{6}vRP - \frac{1}{12}s^2P + \frac{s^2vP}{12R}$. Centrique gravitatis, ejusdem BVA Semisegmenti distantia ab $A\alpha$, (diviso Momento per magnitudinem § F inventam) erit $\dfrac{\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v}{\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv} = \dfrac{2vR^2 - s^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$.

Aut etiam, propter $2vR - s^2 = c^2 - s^2 = v^2$; Momentum erit $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$; Solidum conversione integrâ factum $\frac{1}{6}v^2P + \frac{s^2vP}{6R}$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{12}v^2P + \frac{s^2vP}{12R}$; & distantia centri gravitatis ipsius Semisegmenti BVA, ab $A\alpha$, $\dfrac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv} = \dfrac{vR + s^2}{3eR + 3sv}v$.

S. Si autem, ex hoc Semisegmenti BVA momento $\frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$, auferamus momentum Trianguli BAV (respectu ejusdem $A\alpha$) $\frac{1}{6}s^2v$ (est enim Basis $AV = v$, altitudo $BV = s$, Centrique gravitatis à base distantia $\frac{1}{3}s$; adeoque momentum $\frac{1}{6}s^2v$:) relinquitur Segmenti ABA (respectu ejusdem $A\alpha$) momentum, $\frac{1}{6}v^2R$. Ut prius.

Similiter; Distantia Centri gravitatis Trianguli $BC\alpha$, à recta $A\alpha$, est (per 6 hujus) $\frac{1}{3}BV = \frac{1}{3}s$; ejusque magnitudo $\frac{1}{2}sR$. Ergo illius (respectu rectæ $A\alpha$) momentum, vel Semiquadrantalis Ungula, est $\frac{1}{6}s^2R$: Adeoque Solidum integrâ conversione circa $A\alpha$ factum, $\frac{1}{6}s^2P$; & conversione dimidiâ, $\frac{1}{12}s^2P$.

Trianguli que $BC\alpha$ momentum illud $\frac{1}{6}s^2R$, additum Sectoris BCA momento (§ Q reperto) $\frac{1}{3}vR^2 = \frac{1}{6}c^2R$: exhibet Sectoris $B\alpha A$ (respectu ejusdem $A\alpha$) momentum, vel Semiquadrantalem Ungulam, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R = \frac{1}{6}c^2R + \frac{1}{6}s^2R$: Solidumque integra conversione circa $A\alpha$ factum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P = \frac{1}{6}c^2P + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum, $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P = \frac{1}{12}c^2P + \frac{1}{12}s^2P$.

At

Aut etiam; Propter Trianguli BVα magnitudinem $\frac{1}{2}sh = sR - \frac{1}{2}sv$; Fig. 159,
& Centri gravitatis ab Aα distantiam $\frac{1}{3}s$; erit ejusdem, respectu Aα, 160.
momentum $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$: Et solidum ejusdem circa Aα integrà conversione factum, $\frac{s^2hP}{6R} = \frac{1}{3}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$; & Semisolidum, $\frac{s^2hP}{12R} = \frac{1}{6}s^2P - \frac{s^2vP}{6R}$.

Triangulique BVα momentum illud $\frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$; semisegmenti BVA momento $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$ (§ R. reperto) additum; exhibet Sectoris BαA (respectu ejusdem Aα) momentum, seu semiquadrantalem Ungulam $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$. Ut prius. Adeoque (ut prius) Solidum, $\frac{1}{3}vRP + \frac{1}{6}s^2P$; & Semisolidum $\frac{1}{6}vRP + \frac{1}{12}s^2P$.

Eritque (Momento per magnitudinem $\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, § H inventam, diviso,) Sectoris BαA distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R}{\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR} = \frac{2vR + s^2}{3f} = \frac{c^2 + s^2}{3f}$.

Determinavimus igitur (inter alia) tum Sectoris BCA, tum BαA, tum Semisegmenti BVA, Centra gravitatis, (per eorum tum à $\tau\alpha$, seu TA, seu BV, seu DC, tum ab Aα, distantias,) quæque hinc dependent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, de aliis circuli portionibus judicandum erit.

Possunt autem hæc eadem, quæ rectam Aα spectant, (§ Q, R, S, T. tradita,) hac adhuc aliâ methodo explorari.

Sunt utique (per Nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*, prop. 111, 121, 123, &c.) Quadrata ordinatim-applicatarum in Quadrante, (vel Subtensarum in Semicirculo,) Series Æqualium mulctata serie Secundanorum. Puta, ut R^2-0, R^2-1, R^2-4, R^2-9, &c. usque ad R^2-R^2. Hoc est, ut Plana Cylindri Conice excavati, (per prop. 113. ejusdem;) Vel, (per ejusdem prop. 112.) ut Rectæ in Semiparabolâ diametro parallelæ.

Si enim Quadranti ADC, circumscribatur AODC quadratum, quod Fig. 163.
Diagonali CO dividatur; ducanturque ordinatim-applicatæ VB, occurrentes ipsi DO in M, ipsique CO in N: Manifestum est, Quadratum ordinatim-applicatæ BV, æquari quadrato CB minus quadrato CV (per 47 el. 1. Euclidis:) Hoc est, Quadrato VM minus quadrato VN: sunt enim VM = CB, & VN = CV: & sic ubique.

Adeoque, Omnia quadrata BV complentium ADC quadrantem; æquantur omnibus quadratis VM complentium AODC quadratum, minus

Fig. 163. minus omnibus quadratis NV complentium ACO Triangulum. Et ſingula ſingulis reſpective ſumptis.

Adeoque ſi ex Parallelepipedo ODCA (quod compleant omnia MVq;) eximi intelligatur Pyramis OCA (quam compleant omnia NVq;) quod reliquum eſt, æquabitur omnibus BVq.

Aut etiam (propter Circulos Quadratis Radiorum proportionales) Cylindrus ODDO, exempto Cono OCO; æquabitur Hæmiſphærio, DAD.

Sed & (propter ſingula BVq, ſingulis MVq—NVq, æqualia) etiam partes partibus reſpective ſumptis æquantur.

Nempe; Parallelepipedum OMVA dempto pyramidis trunco ONVA (ſi V ſit ſupra Centrum) vel dempta pyramide aucta OCNVA (ſi infra Centrum;) hoc eſt, dempto OCA$\mp$NCV: Æquatur quadratis ordinatim-applicatarum in ABV, ſegmento. Et ſic ubique.

Et ſimiliter: Cylindrus OMMO, dempto ONNO vel OCNNO (hoc eſt, dempto Cono OCO, mulctato vel aucto ſimili cono NCN, prout ſupra infrave Centrum fuerit punctum V) æquatur Segmento Sphærico ABB. Et ſic ubique.

His poſitis; erit (propter MVq$=R^2$, & AV$=v$,) Parallelepipedum OMVA$=vR^2$.

Item; (propter OAq$=$ACq$=R^2$, & AC$=R$,) eſt Pyramis OCA$=\frac{1}{3}R^3$.

Item; (propter NVq$=$VCq$=x^2$, & VC$=x$;) Pyramis NCV$=\frac{1}{3}x^3$.

Eſt ergo, Summa Quadratorum omnium Ordinatim-applicatarum, (puta omnia o^2) complentium ipſum ABV ſemiſegmentum; OMVA—OCA$\pm$NCV$=vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3$.

Eſt autem, ſupra Centrum, $x=R-v$; infra Centrum, $x=-R+v$: Adeoque illic $x^3=R^3-3vR^2+3v^2R-v^3$; hic vero $x^3=-R^3+3vR^2-3v^2R+v^3$. Ergo (cum illo caſu habeatur $+\frac{1}{3}x^3$; hoc vero $-\frac{1}{3}x^3$;) erit $vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3$ (utroque caſu) ſumma omnium o^2; ſeu Quadratorum ordinatim-applicatarum complentium ABV ſemiſegmentum.

Vel etiam (propter $v^2=c^2-s^2=2vR-s^2$; adeoque $v^2R=2vR^2-s^2R$; & $\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}v^2R-\frac{1}{3}s^2v=\frac{4}{3}vR^2-\frac{2}{3}s^2R-\frac{1}{3}s^2v$;) erit eadem Omnium o^2 ſumma $v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}s^2R+\frac{1}{3}s^2v$.

Sed & manifeſtum porro eſt; cujuſque rectæ ut BV, (atque de hujuſ parallelis, Semiſegmentum BVA complentibus ſimile erit judicium,) momentum reſpectu rectæ Aα, æquari ſemiquadrato ejuſdem, (propter Rectæ Centrū gravitatis in ipſius medio; adeoque VB$\times\frac{1}{2}$VB$=\frac{1}{2}$VBq)

Et

Et ſimiliter quæ ſemiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aα) Fig. 153.
complent plana, ipſis BV inſiſtentia, æquari ejuſdem BV ſemiquadrato; (nam, propter angulum in V ſemirectum; altitudo in B, æqualis erit ipſi BV baſi; ipſumque Triangulum Rectangulum Iſoſceles, erit Quadrati dimidium.) Et conſequenter, tum Semiſegmenti BVA momentum reſpectu ipſius Aα; tum ſemiquadrantalis Ungula eidem BVA inſiſtens, aciem habens Aα; æquabitur eorundem ſemiſummæ; Hoc eſt, $\frac{1}{2}v^2R - \frac{1}{6}v^3 = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v = \frac{1}{6}v^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Idem quod ſupra (§ R.) repertum erat.

Huic verò Semiſegmenti BVA momento (reſpectu rectæ Aα) ſic invento; Si addantur Triangulorum BVC, BVα, (reſpectu ejuſdem Aα) Momenta, (§ R, S, reperta:) Prodibunt Momenta (reſpectu ejuſdem Aα) Sectorum BCA, BαA: Cæteráque de Solidis converſione circa Aα factis, Centriſque gravitatis planorum ab Aα diſtantiis, ſimiliter eliciuntur atque prius. Ut non ſit opus eiſdem ulterius immorari.

At interim haud erit incommodum hic loci monuiſſe; eâdem etiam methodo Triangulorum BCV, BαV, BCα, momenta reſpectu ipſius Aα, haberi poſſe.

Cum enim ſingularum BV rectarum (ſeu huic parallelarum) Triangulum BCV complentium, momenta reſpectu Aα; ſeu Triangula eiſdem inſiſtentia, ſemiquadrantalem Ungulam (aciem habentem Aα) complentia; ſint earundem BV, &c. Semiquadrata: Quæ quidem Semiquadrata, Pyramidem complent, cujus Baſis eſt $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo, $CV = x$; Erit ipſa Pyramis (per 6 hujus;) Hoc eſt, momentum illud, ſeu ſemiquadrantalis ungula BVC aciem habens Aα, $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}x = \frac{1}{6}s^2x$. ut prius § R.

Item, (pari de cauſa,) Momentum Trianguli BαV, ſeu huic inſiſtens Semiquadrantalis Ungula aciem habens Aα; Pyramis erit, cujus Baſis, $\frac{1}{2}BVq = \frac{1}{2}s^2$, altitudo $V\alpha = h$; adeoque ipſa Pyramis (hoc eſt, Momentum illud, ſeu ſemiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{1}{3}h = \frac{1}{6}s^2h$. Ut prius § S.

Eſtque Triangulum BCα; idem atque BVα dempto additove (prout ſupra infrave Centrum C, ſit V punctum,) BCV: Adeoque (reſpectu ipſius Aα) momentum Trianguli BCα; idem atque momentum BVα, dempto, additove, momento BCV: Adeoque Trianguli BCα momentum (reſpectu ipſius Aα) ſeu Semiquadrantalis Ungula eidem inſiſtens aciem habens Aα; eſt $\frac{1}{6}s^2h \mp \frac{1}{6}s^2x$. Hoc eſt, (propter $h = 2R - v$; &, ſupra Centrum, $x = R - v$, auferendum; infra vero, $x = -R + v$ addendum; adeoque $h \mp x = R$;) $\frac{1}{6}s^2R$. Ut prius, § S.

Eadem

V. Eadem item ostendentur ex prop. 112. Arithm. Infin.

Fig. 154. Cum enim illic ostendatur, Rectas in Semiparabola, Diametro vel Axi parallelas, esse ut Seriem Æqualium serie Secundanorum Mulctatam; (sunt enim Omnes $V\delta$, parallelogrammum $AC\Delta\delta$ complentes, series Æqualium; omnesque $\beta\delta$, complentes Semiparabolæ complementum $A\Delta\delta$, series Secundanorum; Ergo, omnes residuæ $V\beta$, parabolæ diametro $C\Delta$ parallelæ, sunt series Æqualium mulctata serie Secundanorum:) Hoc est, Ut quadrata ordinatim-applicatarum in Circuli quadrante; ut modo ostensum est.

Si igitur, super eadem $A\alpha$ recta, (ut communi Base,) describatur tum $AD\alpha$ Semicirculus, tum $A\Delta\alpha$ Parabola recta (cujus Axis $C\Delta$ æqualis sit ipsi CD circuli Radio:) Et ordinatim-applicata in Semicirculo quælibet BV producta, occurrat Parabolæ in β: Erunt omnes $V\beta$ Rectæ, omnibus Quadratis VB respective sumptis proportionales.

Adeoque ductis omnibus $V\beta$ rectis, (sive totam Parabolam, sive ipsius segmentum ut $AV\beta$ complentibus,) in communem altitudinem $R = C\Delta = CD$: Erunt omnia $V\beta$ in R parallelogramma (Prisma Parabolæ, ejusve portioni, insistens complentia,) æqualia omnibus VB quadratis (& singula singulis respective sumptis;) Hoc est (per ante demonstrata) Duplo momenti Semicirculi, ejusve cui insistunt portioni, respectu rectæ $A\alpha$; seu, Duplo semiquadrantalis Ungulæ correspondentis, aciem habentis $A\alpha$. (Sunt enim hæc Parallelogramma, propter communem altitudinem R, ipsis quibus insistunt Rectis $V\beta$, proportionalia; adeoque, per jam ostensa, proportionalia ipsis VB quadratis: Sed &, propter $CD = C\Delta = R$, Parallelogrammum, $C\Delta$ in R, æquatur ipsi CD quadrato: Ergo & reliqua reliquis respective.) Eademque, $V\beta$ in $\frac{1}{2}R$, (utpote illorum dimidia,) ipsi momento plani ABV respectu ipsius $A\alpha$; vel Semiquadrantali Ungulæ correspondenti æquantur.

Si igitur, Parallelogrammo $AV\delta\delta$; auferatur $A\beta\delta\delta$ vel $A\Delta\beta\delta$ (hoc est, Semiparabolæ Complementum $A\Delta\delta$, dempto additove $\Delta\beta\delta$, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum;) habetur Parabolæ segmentum $AV\beta = AV\delta - A\Delta\delta \pm \beta\Delta\delta$.

Est autem (propter $AV = v$, & $V\delta = R$,) Parallelogrammum $AV\delta\delta = vR$.

Item; (propter Semiparabolæ Complementum, subtriplum circumscripti Parallelogrammi, [illegible] *Arithm. Infin.* vel prop. 1 hujus; rectámque $AC = C$ [illegible] complementum $A\Delta\delta = \frac{1}{3}R^2$.

Item

PRO

Ir

ipsi C

que S

logra

Er

—⅓ A

—⅙ A

A₂;

duplu

prius,

At

menta

rumg

Eac

Si i

Sector

dulis

vertex

dius;

Sphæ

versio

eisdem

Sphær

entem

Hab

catur

descrip

gravit

que C

ostensi

ii =

tis Arci

conver

Item; (propter AC=CΔ;) Parabolæ Latus rectum erit æquale ipsi CΔ=R: Et (propter βb=VC=x) erit βδ=bΔ=$\frac{x^2}{R}$: Adeoque Semiparabolæ complementum βΔδ (utpote circumscripti Parallelogrammi βbΔδ triens) =$\frac{x^3}{3R}$. Fig. 164.

Ergo; Parabolæ Segmentum AVβ=AVδ—AΔδ±βΔδ=vR $-\frac{1}{3}R^2\pm\frac{x^3}{3R}$. Atque hoc demum in $\frac{1}{2}R$ ductum; exhibet $\frac{1}{2}vR^2$ $-\frac{1}{6}R^3\pm\frac{1}{6}x^3$ Semisegmenti Circularis ABV momentum respectu rectæ Aα; vel Semiquadrantalem Ungulam correspondentem: Ejusque duplum, $vR^2-\frac{1}{3}R^3\pm\frac{1}{3}x^3=v^2R-\frac{1}{3}v^3=\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{3}s^2R+\frac{1}{3}s^2v$; ut prius, § T.

Atque hinc similiter elicientur, tum Sectorum BCA, BαA, momenta seu semiquadrantales Ungulæ respectu rectæ Aα, tum Centrorum gravitatis inde distantiæ; cæteraque ut prius.

Eademque adhuc aliàs sic investigantur. W.

Si intelligatur Sphæra, vel Sector Sphæricus, (puta BCB ex conversione Sectoris circularis BCA circa Aα factus,) ex numero-infinitis Pyramidalis (juxta def. 1. Cap. 4.) conflari: Quorum omnium communis vertex sit C Centrum; & communis altitudo Circuli Sphæræve Radius; Basesque compleant ipsam superficiem Sphæricam, vel Sectoris Sphærici Superficiem curvam, (puta BAB quæ arcûs BA circa Aα conversione describitur:) Erit (propter, Pyramides Prismatum super eisdem basibus æque altorum Trientes, per prop. 6 hujus;) Sector Sphæricus BCBA, æqualis superficiei Sphæricæ segmento BAB in Trientem Radii ducto. Fig. 159, 160.

Habetur autem Superficiei Sphæricæ segmentum illud BAB, si ducatur Arcus AB=a, in Peripheriam ejusdem arcûs Centro gravitatis descriptam, per 12 hujus. Est autem ejusdem AB arcûs Centrum gravitatis, puta G (in fig. 161, 162.) in rectâ Cδ arcus axe; rectaque CG=$\frac{c}{a}R$, (per 14 hujus.) Rectaque δε=$\frac{1}{2}c$, (ut § Q. ostensum est:) Atque (propter similia Triangula) Ut Cδ=R, ad δε=$\frac{1}{2}c$, sic CG=$\frac{c}{a}R$, ad $\frac{c^2}{2a}$=Ge distantiam Centri gravitatis Arcûs AB, ab Aα; Adeóque $\frac{c^2P}{2aR}$ est Peripheria ejusdem integrâ conversione circa Aα descripta. In quam itaque si ducatur AB=a, habetur Fig. 161, 162.

betur Sphæricæ Superficiei ſegmentum $BAB = \frac{c^2 P}{2R}$: vel (propter $c^2 = 2vR$,) Superficiei Sphæricæ ſegmentum $BAB = vP$.

Fig. 126, 130. Vel etiam (per 13 hujus;) Propter integram ſphæræ ſuperficiem quatuor Circulis maximis æqualem; hoc eſt, $2RP$: atque abſciſſum ſegmentum ABB, in ea ratione ad totam, qua eſt ipſius altitudo $AV = v$, ad $A\alpha = 2R$: Erit ut $A\alpha = 2R$, ad $AV = v$, ſic tota ſuperficies Sphærica $2RP$, ad ipſius ſegmentum $BAB = vP$, ut prius.

Quod itaque ſuperficiei Sphæricæ ſegmentum, in $\frac{1}{3}R$ ductum, exhibet Sectorem Sphæricum $BCBA = \frac{1}{3}vRP$: Adeóque Semiquadrantalem Ungulam, ſeu Plani BCA momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2$. Idem quod ſupra, § Q. repertum eſt. Cæteraque hinc, ut ibidem, deducentur.

X. Exhibuimus itaque Semicirculi Partiúmque ipſius expoſitarum, tum Magnitudines, tum Momenta reſpectu rectarum aliquot expoſitarum, eorúmque diſtantiam Centri gravitatis a rectis illis. Adeoque per prop. 26. Cap. præced. (propter datas eorum a duabus in eodem plano rectis, non invicem parallelis, diſtantias,) ipſa gravitatis Centra.

Eadémque methodo, de aliis Circuli portionibus, eorúmque Momentis, & Solidis converſione factis fiet judicium. Puta, ſi pro ſectore $B\alpha A$, (ad verticem terminato) exponeretur ſector $D\alpha B$, aliúſve hujuſmodi: Cum enim tum Sectoris $B\alpha A$, tum $D\alpha A$, magnitudines & momenta (reliquaque quæ hinc dependent) jam exhibeantur; etiam ſectoris $D\alpha B$ (qui illorum vel differentia vel ſumma ſit) magnitudines & momenta (adeóque & quæ hinc dependent) facile exhiberi poterunt.

Item; eâdem methodo quâ momenta, verbi gratia, ſemiſegmenti BVA, a recta $\tau\alpha$, ad rectas TA, vel BV, transferuntur; poſſunt ſimiliter a recta $A\alpha$, ad $T\tau$, vel Ba, transferri. Eaque, quæ hic traduntur, mille modis aliis ampliari.

Y. Quæ autem de circulo ejúſque portionibus dicta ſunt: eadem ad ellipſin, hujúſque portiones, facile transferentur. Nempe, ſi intelligatur axium ellipſeos alter $A\alpha$, alter $D\Delta$: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$; (adeoque $AV = v$, $V\alpha = h$;) erit $D\Delta$ in ea ratione ad $2R$, quæ eſt ad $A\alpha$; adeoque BV in eadem ratione ad s. Adeoque ubicunque BV, aut huic parallelæ in calculum veniunt; pro s, ſubſtituenda erit quantitas quæ ſit, ad s, in ea ratione qua eſt $D\Delta$ ad $A\alpha$: (majore quidem,

si D Δ sit axium major; minore, si minor;) Adeoque, pro s^2; quantitatem quæ sit ad hanc in duplicatâ ratione rectæ DΔ ad Aα: & similiter, mutatis mutandis, in reliquis ejusdem potestatibus.

PROP. XVI.

Sectoris Sphærici Centrum gravitatis, est in Axis sui illo puncto, quod à Centro Circuli distat Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ: Seu Tribus Quadrantibus Radii, minus Tribus Octantibus sinus versi: Seu, quod à Centro Circuli distat, Tribus Octantibus altitudinis residuæ superficiei curvæ; seu Tribus Octantibus Sinus versi residui. A. Fig. 165.

Hoc est, in Hemisphærio; $\frac{3}{8}$ Radii.

Atque hinc Segmenti Sphæræ (plano abscissi) Centrum gravitatis colligitur: Et in aliis portionibus similiter. Et quæ hinc dependent. B.

Fig. 159, 160.

Nempe; Si ponantur Symbola ut in propositione præcedente; erit, Semiquadrantalis Ungulæ totius semicirculi, aciem habentis Aα, (unde de Solidis conversione factis, & Semisoiidis fiet judicium,) Magnitudo $\frac{2}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis, sive à $\tau\alpha$, sive à TA, R; Momentum respectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{2}{3}R^4$: Distantia Centri gravitatis ab Aα $\frac{3}{32}P$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{16}R^3P$. C. P.

Aciemque habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; Momentum respectu Aα, $\frac{2}{3}R^4$; Distantia Centri gravitis ab Aα, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^3P$; respectu TA, $\frac{1}{16}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R$; à TA, $\frac{3}{4}R$. I. T.

I. Aciemque habentis TA, Magnitudo $\frac{1}{4}R^2P$; Momentum
Fig. 159, 160. respectu Aα, $\frac{2}{3}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab Aα,
T. $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu τα, $\frac{1}{16}R^3P$; respectu TA, $\frac{1}{16}R^3P$; Distantia centri gravitatis à τα, $\frac{1}{4}R$; à TA, $\frac{1}{4}R$.

C. Semiquadrantalis Ungulæ, Sectoris BCA, aciem habentis Aα, (unde de Solidis conversione factis, & semisolidis, fiet judicium;) Magnitudo, $\frac{1}{3}vR^2$; Distantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{8}b$; à τα, $R+\frac{3}{8}b$; à TA, $R-\frac{3}{8}b$; Momentum respectu τα, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; re-
P. spectu T A, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3s}{8v}R+\frac{1}{8}s$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}sR^3$ $+\frac{1}{8}svR^2$.

I. Aciemque habentis τα; Magnitudo $\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{3}sR^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri
X. gravitatis ab Aα, $\frac{8vR+3s^2}{12a+8s}$: Momentum respectu τα, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{19}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$; respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3$ $+\frac{1}{8}svR^2$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{15aR+19sR-3sv}{12a+8s}$ à TA, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a+8s}$.

I. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{3}sR^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri
X. gravitatis ab Aα, $\frac{8vR-3s^2}{12a-8s}$. Momentum respectu τα, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR$; respectu TA, $\frac{5}{8}aR^3-\frac{13}{24}sR^3$ $-\frac{1}{8}svR^2$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a-8s}$; à TA, $\frac{15aR-13sR-3sv}{12a-8s}$.

D. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Trianguli BVG, aciem

aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2x$; Distantia Centri gravitatis à DC, $\frac{1}{4}x$; à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{1}{4}x$; à TA, $R\mp\frac{1}{4}x$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}s^2xR\pm\frac{1}{8}s^2x^2$; respectu TA, $\frac{1}{6}s^2xR\mp\frac{1}{8}s^2x^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}s$; momentum respectu Aα, $\frac{1}{12}s^3x$. Fig. 159. 160. Q.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo $\frac{1}{6}sxR-\frac{1}{3}sxv$; Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR-\frac{1}{8}s^2vx$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{7R-3v}{20R-8v}s$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2\pm\frac{1}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R\pm\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\pm3x^2}{6R\pm4x}$. M. X.

Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{6}sxR+\frac{1}{3}sxv$; Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{24}s^2xR+\frac{1}{8}s^2xv$; Distantia Centri gravitatis ab Aα $\frac{R+3v}{4R+8v}s$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2\mp\frac{1}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$ $R\pm\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$; à TA, $R\mp\frac{4xR\mp3x^2}{6R\mp4x}$. M. X.

Ungulæ Semisegmenti BVA aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à TA, $R-\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à DC, $\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2=\frac{3s^2h=3hv}{4vR+4vh}$; à BV, $\frac{3h^2}{4R+4h}-R+v$; Momentum respectu BV, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2-\frac{1}{24}s^4$. Momentum respectu A$\alpha$, $\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^3x$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3sR^3+3svR^2\mp s^3x}{4v^2R+4s^2v}$, E. Q.

Aciemque

K. Aciemque habentis $\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; Distantia

Fig. 159, 160.

T. Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R + 3s^2h}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}v$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; à BV, $\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$ $= -\frac{3}{4}R + v + \frac{3s^3h}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$.

K. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; Distan-

T. tia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - 8s^2h}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}v$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; respectu BV, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$; à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$; à BV, $\frac{1}{4}R - h + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$ $= -\frac{3}{4}R + v + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$.

K. Aciemque habentis BV; Magnitudo, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 = \frac{1}{6}vR^3 - \frac{1}{24}v^3h^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

T. $\frac{4vR^2 - s^2h}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}v$. Momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; respectu TA, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; respectu BV, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis

vitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^3+12avR^2+3svR^2-6s^3R+2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à Fig. 159, 160.
TA, $\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$; à BV, $\frac{12eR^3+15svR^2-12as^2R+2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}$.

Ungulæ Trianguli BAV, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2v$; Centri gravitatis Distantia à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{4}v$; à TA, $\frac{1}{4}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3v$. G. S.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis distantia ab $A\alpha$, $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4vR^2+10s^2R-3s^2v}{4vR+4s}$; à TA, $\frac{4R^2-2s^2R+2s^2v}{4vR+4s^2}$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}svR^2+\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; respectu TA, $\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$. N. Y.

Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{1}{3}sv^2$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$; Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{3}{8}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{4}v$; à TA, $\frac{3}{4}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3$; respectu TA, $\frac{1}{4}sv^3$. N. Y.

Ungulæ Segmenti ABA, aciem habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{6}v^2R^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{2}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R+\frac{1}{2}h$; à TA, $R-\frac{1}{2}h$; à DC, $\frac{1}{2}h$. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2-4v^2}$. G. S.

Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravitatis ab N.

Y. ab $A\alpha$ distantia $\frac{4R^2-2bR+s^2}{6eR+2sv}v$: Momentum respectu
Fig. 159, 160. $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2$ $-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15eR^2+7svR+2s^3}{12eR-4sv}$; à TA, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR+4sv}$.

N. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{6}v^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia $\frac{4R^2-2bR-s^2}{6eR-2sv}v$. Momentum respectu
Y. $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Respectu TA, $\frac{3}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2$ $+\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR-4sv}$
à TA, $\frac{15eR^2-9svR+2s^3}{12eR-4sv}$.

F. Ungulæ Trianguli $BC\alpha$, aciem habentis $A\alpha$; magnitudo, $\frac{1}{6}s^2R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}R-\frac{1}{2}v$; à TA, $\frac{1}{4}R+\frac{1}{2}v$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; re-
R. spectu TA, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}s$; momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3R$.

M. Aciémque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; Centrique gravitatis
X. ab $A\alpha$ distantia, $\frac{5R-2v}{12R-4v}s$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7R^2-3vR-s^2}{6R-2v}$; à TA, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R-2v}$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{7}{12}sR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$.

M. Aciémque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri
X. gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3R+2v}{12R+4v}s$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{12}sR^3-\frac{1}{12}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{7}{12}sR^3+\frac{1}{12}svR^2$ $-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $5R^2$

AP. V.

respect

$-\frac{3}{24}nR^3$

7 :

R; Mo-

gravita-

respect.

$-\frac{1}{8}nR^3$

$nR-2r^2$

R $-4n$

gnitudo,

à TA,

nR; re-

gravitatis

Momen-

gravitatis

gravita-

momen-

u TA,

R; Mo-

Centri

ctu 7 &c,

$-\frac{1}{12}nR^3$

7 &c,

$5R^2$

PRO

Ung

T

Aciè

re

Mo

Acién

me

gra

resp

Ce

Ungul

Ce

Aα,

$\frac{5R^2-vR+s^2}{6R+2v}$; à TA, $\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$. . Fig. 159, 160.

Ungulæ Trianguli BVα, aciem habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{6}s^2h$; Centri gravitatis distantia à τα, $\frac{1}{4}h$; à TA, $2R-\frac{1}{4}h$; Momentum respectu τα, $\frac{1}{8}s^2h^2$; respectu TA, $\frac{1}{3}s^2hR-\frac{1}{8}s^2h^2$: Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}s$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{12}s^3h$. F. R.

Aciémque habentis τα; Magnitudo $\frac{1}{3}sh^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}s^2h^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3}{8}s$: Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{3}{4}h$; à TA, $2R-\frac{3}{4}h$; Momentum respectu τα, $\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{4}sh^3=\frac{1}{12}sh^3+\frac{1}{3}s^3h$. M. W.

Aciémque habentis TA; Magnitudo, $shR-\frac{1}{3}sh^2$; Momentum respectu Aα, $\frac{1}{3}s^2hR-\frac{1}{8}s^2h^2$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8R-3h}{24R-8h}s$: Momentum respectu τα, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v=\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{4}sh^3=\frac{1}{12}sh^3+\frac{1}{3}s^3h$; respectu TA, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à τα, $R-\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}$; à TA, $R+\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}$; à DC, $\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}=\frac{3v^2}{12R-4b}=\frac{3v^2}{4R+4v}$. M. W.

Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis Aα; Magnitudo $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; Momentum respectu τα, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2-\frac{1}{12}s^2vR$; respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à τα, $R+\frac{s^2h}{4vR+2s^2}$ à TA, $R-\frac{s^2h}{4vR+2s^2}$; à DC, $\frac{s^2h}{4vR+2s^2}$: Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2+3svR+2s^3}{8vR+4s^2}$. F. R.

L. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR=\frac{1}{2}aR^2$
Fig. 159, $+\frac{1}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{3}s^2R^2$
160. $-\frac{1}{12}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,
W. $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6fR+2sh}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3$ $+\frac{1}{8}sR^3-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{3}{8}fR^3+\frac{1}{8}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3+\frac{7}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R=\frac{1}{8}fR^3$ $-\frac{1}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{15fR^2+9shR-2s^3}{12fR+4sh}$; à TA, $\frac{9fR^2-shR+2s^3}{12fR+4sh}$.

L. Aciemque habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}shR=\frac{1}{2}aR^2$ $+\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3+\frac{1}{12}s^2vR$;

W. Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4vR^2+s^2v}{6fR-2sh}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3+\frac{7}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$ $=\frac{3}{8}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$; respectu TA, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3$ $+\frac{7}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{5}{8}fR^3-\frac{7}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{9fR^2-shR+2s^3}{12fR-4sh}$; à TA, $\frac{15fR^2-7shR-2s^3}{12fR-4sh}$.

Z. Adeoque exhibuimus, Sphæricorum Sectorum & Segmentorum, Ungularum item aliorumque Solidorum expositorum tum magnitudines, tum momenta respectu expositorum aliquot planorum, eorúmque Centrorum gravitatis à planis illis distantiam, ipsaque gravitatis Centra.

Quæ omnia, ad alia etiam Solida, ad Sphæram ejusve partes spectantia, facile poterunt accommodari: Aut etiam ad alia Solida ex Circulorum portionibus oriunda.

Quæque, de Ungulis Semicirculi ejusve portionum; Sphæraque & portionibus hujus, dicta sunt; eadem ad Ungulas Semiellipseos hujúsve portionum; & Sphæroides,

roides, portionésque hujus; facile accommodantur.

INtelligatur BCB Sector Sphæricus; (intellige Figuram Solidam in Sphærâ, quæ conversione Sectoris Circularis BCA, seu BCα, circa ACα, describitur:) Ex infinitis numero Pyramidulis similibus & æqualibus (juxta def. 1. Cap. 4.) componi: Quarum communis vertex sit Sphæræ Centrum C; Basesque componant Sphæricæ superficiei segmentum Sectori sphærico conveniens. Erit itaque, Tum simul omnium Magnitudo, æqualis Trienti Radii (communis Altitudinis omnium) in Sphæricam superficiem BAB, vel BαB, sectori convenientem, (utpote Basium Aggregatum,) ducto: (Quod ex 1 vel 6 hujus probabitur; propter Parallela Pyramidum Plana similia, aut etiam parallelas sectorum sphæricorum curvas superficies similes, in ratione Secundanorum:) Tum Centra gravitatis omnium, in Simili Superficie Sphæricâ, descriptâ Radio $\text{Cb}=\frac{3}{4}\text{CB}=\frac{3}{4}R$: (propter Centra gravitatis Pyramidum, in Axe suo posita, tres quadrantes ejusdem ad verticem abscindentia; per 6 hujus.) Cujus quidem superficiei b a b, radio Cb descriptæ, cum singula puncta intelligantur æque onusta, (ut quæ æqualium Pyramidum Centra gravitatis sustinent;) idem erit hujus Centrum gravitatis, atque expositi Sectoris Sphærici. Puta (in sectore BCBA) in G, medio puncto rectæ a v (sinus versi arcûs b a) per 13 hujus. Est autem, (propter $\text{Cb}=\frac{3}{4}\text{CB}=\frac{3}{4}R$:) recta $\text{av}=\frac{3}{4}\text{AV}=\frac{3}{4}v$, Adeoque $\text{aG}=\frac{1}{2}\text{av}=\frac{3}{8}v$, & $\text{CG}=\text{Ca}-\text{aG}=\frac{3}{4}\text{CA}-\frac{3}{8}\text{AV}=\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}v=\frac{3}{8}b$, (propter $2R-v=b$.) Et similiter ostendetur, in opposito Sectore BCBα; $\text{av}=\frac{3}{4}\alpha\text{V}=\frac{3}{4}b$; & $\text{aG}=\frac{1}{2}\text{av}=\frac{3}{8}b$; & $\text{CG}=\text{Ca}-\text{aG}=\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}b=\frac{3}{8}v$, (propter $2R-b=v$.) Hoc est; Distantia Centri gravitatis Sectoris Sphærici (in Sectoris Axe positi) à Centro Sphæræ, æqualis Tribus Quadrantibus Radii minus Tribus Octantibus altitudinis superficiei Curvæ Sectori convenientis; aut etiam (quod eodem recidit) æqualis Tribus Octantibus altitudinis reliquæ superficiei sphæricæ. Quod erat propositum. A. Fig. 165.

Hoc est, speciatim in Hemisphærio, (propter $v=b=R$,) $\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}R=\frac{3}{8}R$.

Corollarium constat, ex prop. 24. Cap. præced. Nam Sectori BCBA, dempto BBC Cono, habetur Segmentum BBA; & Sectori BCBα, addito eodem BBC Cono, habetur Segmentum BBα. Cum itaque tum Sectoris sphærici (per jam ostensa;) tum dempti additive Coni (per 6 hujus;) magnitudines & Centra gravitatis assignantur; B.

 habebitur

habebitur & Residui, vel Aggregati, Segmenti Sphærici, tum Magnitudo, tum & Centrum gravitatis. Et similiter, (mutatis mutandis,) in aliis Sphæræ portionibus.

C. Fig. 159, Exempli gratia. Centri gravitatis Sectoris integri BCBA (conversione Semisectoris Circularis BCA, circa CA, descripti) distantia a C, (per modo demonstrata) est $\frac{3}{4}$CA $-\frac{3}{8}$AV $=\frac{3}{8}$Aα $-\frac{3}{8}$AV $=\frac{3}{8}$Vα, in ipso Axe AC.

Hoc est (positis ut in demonstratione propositionis præcedentis, Radio CA $=$ CB $=$ Cα $=R$; integra Peripheria, P; Arcu BA $=a$; chorda BA $=c$; sinu recto BV $=s$; & verso AV $=v$; versique residuo ad Diametrum Vα $=2R-v=h$; à Centro Distantia VC $=z=R-v$ vel $v-R$; Item $a-s=e$; $a+s=f$; &c.) $\frac{3}{4}R-\frac{3}{8}v=\frac{3}{8}h$.

Adeóque ejusdem Centri gravitatis ab α, vel $\tau\alpha$, (intellige; à plano in α Sphæram Tangente,) $R+\frac{3}{8}h=\frac{7}{4}R-\frac{3}{8}v$. Atque à TA, $R-\frac{3}{8}h=\frac{1}{4}R+\frac{3}{8}v$.

Eadémque est ab iisdem $\tau\alpha$, vel TA, planis; distantia Centri gravitatis Semisectoris, (puta, qui plano per Aα transeunte, integrum bisecante, determinatur;) aut Sectoris Quadrantalis; aliúsve imperfectâ quâvis conversione descripti, (adeóque duobus ejusmodi planis, quorum communis sectio sit Aα, interjecti;) propter omnia plana, Sectorem integrum complentia, ipsorum partibus, Sectores partiales complentibus, proportionalia, atque in iisdem a $\tau\alpha$, TA, planis Tangentibus, distantiis. Quod de semi-conis, vel semisegmentis Sphæricis aliis, aliisve Solidis imperfectâ conversione descriptis, & correspondentibus Ungulis, &c. similiter obtinet. Quod semel moneo, ne sæpius sit opus idem repetere.

Est autem (per prop. præced. § Q.) Sphærici Sectoris integri BCBA, magnitudo, $\frac{1}{6}c^2P=\frac{1}{3}vRP$; (adeóque semisectoris magnitudo, $\frac{1}{12}c^2P=\frac{1}{6}vRP$;) & Ungulæ Semiquadrantalis, qui huic respondet, (intellige, qui Sectori circulari BCA insistit, aciem habens Aα,) magnitudo $\frac{1}{6}c^2R^2=\frac{1}{3}vR^2$.

Ductâ igitur distantiâ illâ in magnitudinem; Habetur momentum sphærici sectoris integri BCBA (respectu Axis motus, Planive Tangentis, $\tau\alpha$,) $\frac{1}{6}c^2RP+\frac{1}{16}c^2hP=\frac{7}{12}vR^2P-\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P+\frac{1}{8}s^2RP$: Semisectoris, $\frac{1}{6}vR^2P+\frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{4}vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2$.

Et, respectu ipsius TA, momentum sphærici Sectoris integri BCBA, $\frac{1}{6}c^2RP-\frac{1}{16}c^2hP=\frac{1}{12}vR^2P+\frac{1}{8}v^2RP=\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{8}s^2RP$:

Semi-

Semisectoris $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$: Ungulæque Semiquadrantalis, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Fig. 159, 160.

Et speciatim, quæ toti Semicirculo insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens $A\alpha$; (propter $v = 2R$, & $s = c$,) Est $\frac{2}{3}R^2$, & solidum conversione factum, hoc est, Sphæra integra, $\frac{4}{3}R^2P$; & Semisolidum, seu Hemisphærium $\frac{2}{3}R^2P$. Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, vel TA, R: Momentum Ungulæ respectu $\tau\alpha$, vel TA, $\frac{2}{3}R^3$; Sphæræ, $\frac{4}{3}R^3P$; Hemisphærii $AD\alpha$; $\frac{2}{3}R^3P$.

Deinde (per prop. præced. § R.) Coni integri BBC, (conversione Trianguli BVC, circa $A\alpha$,) magnitudo est $\frac{xs^2P}{6R}$; Semiconi, $\frac{xs^2P}{12R}$; Ungulæ Semiquadrantalis, $\frac{1}{6}xs^2$. Hoc est; Si V sit supra C Centrum; $\frac{R-v}{6R}s^2P$; $\frac{R-v}{12R}s^2P$; $\frac{R-v}{6}s^2$: Si, infra Centrum; $\frac{v-R}{6R}s^2P$, $\frac{v-R}{12R}s^2P$, $\frac{v-R}{6}s^2$, D.

Est autem (per 6 hujus) Centri gravitatis à DC distantia, $\frac{3}{4}x$: Hoc est $\frac{3}{4}R - \frac{3}{4}v$, si supra Centrum; & $\frac{3}{4}v - \frac{3}{4}R$, si infra Centrum. Et, utroque casu, ejusdem à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{7}{4}R - \frac{3}{4}v = R \pm \frac{3}{4}x$: Atque, à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{3}{4}v = R \mp \frac{3}{4}x$.

Et propterea (ductis magnitudinibus in distantias) Momentum, respectu ipsius $\tau\alpha$, Coni integri BCB, $\frac{1}{6}xs^2P \pm \frac{x^2s^2P}{8R}$; Semi-coni, $\frac{1}{12}xs^2P \pm \frac{x^2s^2P}{16R}$, Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2R \pm \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{7R-3v}{24R}xs^2P$, $\frac{7R-3v}{48R}xs^2P$, $\frac{7}{24}xs^2R - \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est; si supra Centrum, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{7R^2-4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{7}{24}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; Si infra Centrum, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-7R^2+4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{7}{24}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$.

Et, respectu ipsius TA; momentum Coni integri, Semi-coni, & Semiquadrantalis Ungulæ, $\frac{1}{6}xs^2P \mp \frac{x^2s^2P}{8R}$, $\frac{1}{12}xs^2P \mp \frac{x^2s^2P}{16R}$, $\frac{1}{6}xs^2R \mp \frac{1}{8}x^2s^2$: vel, $\frac{R+3v}{24R}xs^2P$, $\frac{R+3v}{48R}xs^2P$, $\frac{1}{24}xs^2R + \frac{1}{8}xs^2v$. Hoc est

Fig. 159, 160. est, Supra Centrum, $\frac{R^2-4vR+3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{R^2-4vR+3s^2}{48R}s^2P$, $\frac{1}{24}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$; vel, Infra centrum $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{24R}s^2P$, $\frac{-R^2+4vR-3s^2}{48R}s^2P$, $-\frac{1}{24}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$.

E. Hæc itaque momenta Coni, Semiconi, Ungulæve, BBC, BVC, momentis Sectoris, Semisectoris, Ungulæve, BCBA, BCA, respectivis; Subducta, Additave, prout vel supra vel infra centrum fuerint; exhibent Segmenti, Semisegmenti, Ungulæve, BBA, BVA, momenta respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{6}s^2RP+\frac{1}{6}s^2vP+\frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{12}s^2RP+\frac{1}{12}s^2vP-\frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR+\frac{1}{8}s^4$.

Et, respectu ipsius TA, $\frac{1}{3}vR^2P-\frac{1}{6}s^2RP+\frac{1}{6}s^2vP-\frac{s^4P}{8R}$, $\frac{1}{6}vR^2P-\frac{1}{12}s^2RP+\frac{1}{12}s^2vP-\frac{s^4P}{16R}$, $\frac{1}{3}vR^3-\frac{1}{6}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4=\frac{1}{6}v^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR-\frac{1}{8}s^4$.

Adeoque, momenta per magnitudines dividendo (puta, Ungulæ momenta, per magnitudinem Ungulæ, $\frac{1}{6}v^2R+\frac{1}{6}s^2v=\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$, prop. præced. § R. inventam,) habetur distantia Centri gravitatis Ungulæ BVA aciem habentis $A\alpha$, (adeoque & Sectoris, vel Semisectoris correspondentis,) à $\tau\alpha$, $R+\frac{3s^4}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}$: à TA, $R-\frac{3s^4}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}$: à DC, $\frac{3s^4}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}$: à BV, $\frac{3s^4}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}+R-h=\frac{3s^4}{8vR^2-4s^2R+4s^2v}-R+v$.

Vel (quod eodem recidit) à $\tau\alpha$, $R+\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2$; à TA, $R-\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2=\frac{2vR+3s^2}{4vR+4s^2}v$; à DC, $\frac{6R-3v}{4vR+4s^2}s^2=\frac{3hs^2}{4vR+4s^2}=\frac{3h^2v}{4vR+4vh}=\frac{3h^2}{4R+4h}$; à BV, $\frac{3h^2}{4R+4h}+R-h=\frac{3h^2}{4R+4h}-R+v$.

Et (restituendo magnitudines) momentum (respectu ipsius BV)

Segmenti

Segmenti Sphærici BBA, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{s^4P}{24R}$; Semisegmenti BVA, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP - \frac{s^4P}{48R}$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4$.

Sed & possunt hæc eadem, sic aliàs haberi.

Cum enim (ut ostensum est prop. præced. §. V.) Semi-Quadrata rectarum BV & huic parallelarum Semisegmentum AVB complentium; sint rectis Vβ, &c. (fig. 164.) parabolæ portionem AVβ complentibus, proportionalia; & quidem ipsis Vβ, &c in $\frac{1}{2}R$ ductis sigillatim æqualia; atque in eisdem a τα, TA, DC, distantiis: Eadem erunt respectu ipsarum τα, TA, DC, momenta Semiquadrantalis Ungulæ (quam illa complent Semiquadrata) Semisegmento AVB insistentis; atque Prismatis portioni Parabolæ AVβ insistentis, quam illa complent parallelogramma βV × $\frac{1}{2}R$; Eademque utriusque Solidi distantia Centri gravitatis, (puta G, & γ,) ab ipsis τα, TA, DC, (planis) respective. Hoc est (per 5 hujus) quantum inde distat ipsius portionis Parabolæ AVβ centrum gravitatis γ. Fig. 164

Est autem Semiparabolæ AΔC magnitudo (per 6 hujus) $\frac{2}{3}$ΔC×CA $=\frac{2}{3}R^2$; ejúsque Centri gravitatis ab Axe CΔ distantia (per 8 hujus) $\frac{3}{8}$AC$=\frac{3}{8}R$; adeoque à τα, $R+\frac{3}{8}R=1\frac{3}{8}R$; à TA, $R-\frac{3}{8}R=\frac{5}{8}R$. Adeoque ipsius momentum respectu DCΔ, est $\frac{1}{4}R^3$; respectu τα, $\frac{11}{12}R^3$; respectu TA, $\frac{5}{12}R^3$.

Item Semiparabolæ βΔb, magnitudo $\frac{2}{3}$Δb×bβ$=\frac{2x^2}{3R}x=\frac{2x^3}{3R}$: Centrique gravitatis à CΔ distantia $\frac{3}{8}$bβ$=\frac{3}{8}x$: (adeoque à τα, $R\pm\frac{3}{8}x$; à TA, $R\mp\frac{3}{8}x$; prout fuerit supra infrave rectam CΔ.) Adeoque momentum ejus, respectu ipsius CΔ, $\frac{x^4}{4R}$; Cui additum momentum parallelogrammi VCbβ, hoc est (propter βb$=x$, & Cb$=R-\frac{x^2}{R}=\frac{R^2-x^2}{R}=\frac{s^2}{R}$; Centrique gravitatis à CΔ distantiam, $\frac{1}{2}$βb$=\frac{1}{2}x$;) $\frac{R^2x^2-x^4}{2R}=\frac{s^2}{2R}x^2$, exhibet portionis VβΔC momentum respectu ipsius CΔ, $\frac{2x^2R^2-x^4}{4R}=\frac{2s^2+x^2}{4R}x^2$. Hujusq; propterea portionis VβΔC (propter magnitudinem $xR-\frac{x^3}{3R}$) distantia Centri gravitatis à CΔ, est

6x

Fig. 164. $\frac{6x^2R^2 - 3x^4}{12xR^2 - 4x^3} = \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$: Adeoque à $\tau\alpha$, $R \pm \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; à TA, $R \mp \frac{6R^2 - 3x^2}{12R^2 - 4x^2}x$; (prout supra infrave Centrum fuerit.) Et (restituendo Magnitudinem) Momentum ejusdem V$\beta\Delta$C, respectu $\tau\alpha$, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \pm \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$, & respectu TA, $xR^2 - \frac{1}{3}x^3 \mp \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$.

Atque hæc portionis V$\beta\Delta$C momenta respectiva, dempta addita (prout supra infrave Centrum C contigerit V punctum,) respectivis Semiparabolæ AΔC (respectu rectarum $\tau\alpha$, TA,) momentis $\pm\frac{11}{12}R^3$, $\mp\frac{5}{12}R^3$: exhibent Portionis AVβ, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm\frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2$; & respectu TA, $\mp\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm\frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x$.

Reductione autem factâ, valorem ipsius x restituendo, reperietur hæc momentis superius designatis convenire.

Est enim $x = \pm R \mp v$; prout supra infrave Centrum contigerit; (Hoc est, $x = R - v$, supra Centrum; vel $x = -R + v$ si infra Centrum.) Adeoque $\mp xR^2 = -R^3 + vR^2$.

Similiter $x^3 = \pm R^3 \mp 3vR^2 \pm 3v^2R \mp v^3$. Adeoque $\pm\frac{1}{3}x^3 = \frac{1}{3}R^3 - vR^2 + v^2R - \frac{1}{3}v^3$. Hoc est (propter $v^2 = 2vR - s^2$, & $v^3 = 4vR^2 - 2s^2R - s^2v$,) $\pm\frac{1}{3}x^3 = +\frac{1}{3}R^3 - \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$.

Et utroque casu (hoc est, sive $x = +R - v$, sive $x = -R + v$,) est $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$. Adeoque $\frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{R^2 + s^2}{4R}x^2 = \frac{R^4 - s^4}{4R} = \frac{1}{4}R^3 - \frac{s^4}{4R}$.

Adeoque momentum Portionis AVβ, respectu $\tau\alpha$, $\frac{11}{12}R^3 \mp xR^2 \pm\frac{1}{3}x^3 - \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v + \frac{s^4}{4R}$; & respectu TA, $\mp\frac{5}{12}R^3 \mp xR^2 \pm\frac{1}{3}x^3 + \frac{2R^2 - x^2}{4R}x^2 = \frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v - \frac{s^4}{4R}$.

Atque hæc momenta (propter prismatis ipsi AVβ insistentis altitudinem, $\frac{1}{2}$R) ducta in $\frac{1}{2}R$; exhibent istius Prismatis momentum, hoc est momentum Semiquadrantalis Ungulæ Semisegmento Circulari ABV insistentis

AP. V.

$\frac{x^2}{4x^2}$; x;

rit.) E

, respect

$-\frac{1}{3}x^2$;

addatur

respectiva

momentis,

pectu $\tau\alpha$,

$x R^2 + \frac{1}{3}x^2$

, reperie-

contigerit;

infra Cen-

$= \frac{2}{3}R^3 - vR^2$

$v^3 = 4vR^2$

$-R+v$,)

$\frac{-x^2}{4R}x^2$

$\frac{11}{12}R^2 + xR^2$

spectu TA,

R^4

ntis altitudi-

, hoc est mo-

i ABV in-

sistet

PRO

ſiſtent

$+\frac{1}{8}s^4$

us.

Inde

elicietu

Porr

deſcript

ſemicon

Cent

à TA, 2

Quæ

reſpectu

$\frac{4R^2-2}{8R}$

talis, Un

Et, r

$\frac{4R^2-2v}{24}$

que $\frac{1}{6}s^2R^2$

Atque

& correſp

bent mom

$\frac{1}{3}vR^2P+$

$-\frac{1}{24}s^2vP$

Et reſp

$+\frac{1}{12}s^2vP$

$\frac{2}{3}vR^3+\frac{1}{12}$

Vel etiam

drantalis,

& baſin Tr

ris (in rect

à C (verti

(plano) c

Trianguli c

fistentis (aciem habentis Aα) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & respectu TA, $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Ut prius.

Indeque Centri gravitatis distantia, sive à $\tau\alpha$, sive TA, sive à BV, elicietur, ut prius.

Porro; Coni integri BBα (Trianguli BVα, circa Aα conversione descripti,) magnitudo (per prop. præced. § S.) $\frac{s^2h}{6R}P = \frac{2R-v}{6R}s^2P$; semiconi, $\frac{2R-v}{12R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$. F. Fig. 159. 160.

Centrique gravitatis distantia (per 6 hujus) à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}h = \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}v$; à TA, $R - \frac{1}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{1}{4}v$.

Quæ quidem distantiæ, in magnitudines ductæ, exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Coni $\frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 4vR + v^2}{8R}s^2P = \frac{4R^2 - 2vR - s^2}{8R}s^2P$; Semiconi $\frac{4R^2 - 2vR - s^2}{16R}s^2P$; Semiquadrantalis, Ungulæ, $\frac{1}{8}s^2h^2 = \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$.

Et, respectu ipsius TA, Momentum Coni $\frac{1}{3}s^2hP - \frac{s^2h^2P}{8R} = \frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{24R}s^2P$; Semiconi, $\frac{4R^2 - 2vR + 3s^2}{48R}s^2P$; Ungulæque $\frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Segmenti, Semisegmenti, & correspondentis Ungulæ, BBA, BVA, respective addita; exhibent momenta, respectu ipsius $\tau\alpha$, Sphærici sectoris BαBA, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semisectoris B$\alpha$A, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; & correspondentis Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$.

Et respectu TA, momentum Sectoris Sphærici BαBA, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$; Semisectoris B$\alpha$A, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$; Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$.

Vel etiam; Intelligatur, super BCα Triangulo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens Aα: Quæ Pyramis erit verticem habens α; & basin Triangularem super BC rectam. Hujusque Basis Triangularis (in rectam CB projectæ) Centrum gravitatis puta β, distabit à C (vertice Trianguli) $\frac{2}{3}$ CB, (per 6 hujus;) ejusque ab Aα (plano) distantia, $\beta\gamma = \frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$; &, in recta inde ad α ducta, Trianguli centrum gravitatis ut g, abscindet $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$; Cujus itaque

Fig. 159, 160. ab $A\alpha$ distantia $gG = \frac{1}{4}\beta\gamma = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{2}s$: Ejusque à $\tau\alpha$ distantia $G\alpha = \frac{1}{4}\gamma\alpha$; hoc est (propter $\gamma\alpha = R \frac{+}{-} \frac{2}{3}x = \frac{5}{3}R - \frac{2}{3}v$,) $\frac{5}{4}R - \frac{1}{2}v$; adeoque ejusdem à TA distantia $\frac{1}{4}R + \frac{1}{2}v$.

Quæ quidem distantiæ, in $\frac{1}{6}s^2R$ (pyramidis magnitudinem, per prop. præced. § S.) ductæ; exhibent momentum Pyramidis; (seu Ungulæ $BC\alpha$, aciem habentis $A\alpha$,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; &, respectu ipsius TA, $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$. Adeoque Solidi (scil. Coni, conicè excavati,) conversione Trianguli $BC\alpha$ circa $A\alpha$ facti, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{24}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; &, respectu TA, $\frac{1}{8}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP$: Semisolidique momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{48}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$; &, respectu TA, $\frac{1}{16}s^2RP + \frac{1}{24}s^2vP$.

Atque hæc momenta, momentis Sphærici Sectoris, Semisectoris, & correspondentis Ungulæ, BCBA, BCA, respective addita; exhibent momenta Sectoris, Semisectoris, Ungulæque, $B\alpha BA$, $B\alpha A$, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$;

Et, respectu ipsius TA, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$. Ut prius.

Quæ quidem momenta, per magnitudines divisa, (prop. præced. § S. traditas) exhibent distantiam Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, $\frac{\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR}{\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R} = R + \frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2}$; & à TA, $R - \frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2}$; à DC, $\frac{2s^2R - s^2v}{4vR + 2s^2} = \frac{hs^2}{4vR + 2s^2}$.

G. Similiter; Coni integri BAB, (Trianguli BAV conversione circa $A\alpha$ descripti) magnitudo (per § R, prop. præced.) $\frac{s^2vP}{6R}$; Semiconi $\frac{s^2vP}{12R}$; & Semiquadrantalis Ungulæ $\frac{1}{6}s^2v$. Centrique gravitatis distantia à TA, $\frac{3}{4}v$ (per 6 hujus;) atque $\tau\alpha$ $2R - \frac{3}{4}v$. Quæ quidem distantiæ in magnitudines ductæ, exhibent, respectu TA, momentum Coni $\frac{s^2v^2P}{8R}$; Semiconi $\frac{s^2v^2P}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{8}s^2v^2$ $= \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$: Respectu $\tau\alpha$, momentum Coni $\frac{1}{3}s^2vP - \frac{s^2v^2P}{8R}$, Semiconi $\frac{1}{6}s^2vP - \frac{s^2v^2P}{16R}$; Ungulæque $\frac{1}{3}s^2vR - \frac{1}{8}s^2v^2 = \frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$.

Quæ quidem momenta, ex respectivis momentis Segmenti, Semisegmenti

ſegmenti, Ungulæque, BBA, BVA, (§ E. traditis,) ſubducta; Fig. 159,
Relinquunt Annuli, (converſione ſegmenti ABA circa Aα,) mo- 160.
mentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP + \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P$
$-\frac{1}{12}s^2RP + \frac{1}{24}s^2vP$; Et correſpondentis Ungulæ $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2$
$+\frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$. Atque, reſpectu TA, momentum
Annuli $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; Semiannuli $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{12}s^2RP$
$-\frac{1}{24}s^2vP$: Ungulæque $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$.
Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem § Q, R. prop. præced.
$\frac{1}{6}v^2R = \frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R$,) diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R + \frac{s^2}{2v}$
$= R + \frac{1}{2}b$; à TA, $R - \frac{1}{2}b$; atque à DC, $\frac{1}{2}b = \frac{s}{2v}s$.

Porro, Cum jam exhibuerim, Momenta reſpectu rectæ $\tau\alpha$ (aut H.
huic parallelæ) ut Axis Motus ſeu Libræ; Solidorum ex converſione vel ſemiconverſione Semiſectorum vel Semiſegmentorum BCA, BαA, BVA, circa Aα ut axem Converſionis; & Ungularum Semiquadrantalium, illis correſpondentium, aciem habentium Aα: Eidem operâ etiam exhibuimus, Momenta reſpectu Aα ut Axis Motûs ſeu Libræ, Solidorum ex converſione vel Semiconverſione eorundem Semiſectorum vel Semiſegmentorum BCA, BαA, BVA, circa $\tau\alpha$ (vel huic parallelam) ut axem Converſionis. Et Ungularum Semiquadrantalium illis correſpondentium, aciem habentium $\tau\alpha$, vel huic parallelam. (Quod &, Solidis ex quavis alia converſione imperfectâ, non minus quam ex Semiconverſione ortis; Ungulíſque aliis quam Semiquadrantalibus; mutatis mutandis, accommodabitur,)

Quippe idem omnino momentum erit; ſive ſit Aα Axis Converſionis, & $\tau\alpha$ axis Libræ; ſive $\tau\alpha$ axis converſionis, & Aα axis Libræ. (Et ſimiliter in ungulis; idem momentum erit, ſive Acies Ungulæ ſit Aα, & Axis Libræ $\tau\alpha$; ſive Acies Ungulæ $\tau\alpha$, & Axis Libræ Aα, & ſimiliter alibi.)

Cum enim, (verbi gratia,) rectæ BV momentum reſpectu Aα, ſit BV×½BV, (propter ipſius centrum gravitatis in ſui medio,) hoc eſt, ½BVq: Atque tantundem etiam ſit Triangulum, in Ungula Semiquadrantali (cujus Acies Aα,) eidem BV inſiſtens, (ut dudum oſtenſum eſt:) Erit hujus Trianguli momentum reſpectu $\tau\alpha$ rectæ (propter Vα diſtantiam) ½BVq×Vα. Sed & in Ungula Semiquadrantali cujus acies $\tau\alpha$, eidem BV inſiſtet parallelogrammum cujus altitudo (propter angulum Semiquadrantalem) æqualis erit ipſi Vα di-

 ſtantiæ;

Fig. 159, 160. ſtantiæ; cujus itaque magnitudo erit $BV \times V\alpha$: Cúmque hujus Centrum gravitatis ſit in mediâ ſui longitudine (per 2 hujus,) adeóque illius diſtantia ab $A\alpha$, ſeu perpendiculari plano huic inſiſtente, ſit $\frac{1}{2}BV$; erit ejuſdem Parallelogrammi, reſpectu axis Libræ $A\alpha$, momentum, $\frac{1}{2}BV \times BV \times V\alpha = \frac{1}{2}BVq \times V\alpha$, ut prius. Cúmque idem obtineat, de ſingulis rectis ipſi BV parallelis, Semiſectores vel Semiſegmenta BCA, BαA, BVA, complentibus: Idem de totius Ungulæ Momento obtinebit: Nempe idem omnino eſſe Momentum Ungulæ (ſuper eodem plano,) ſive ſit $A\alpha$ acies, & $\tau\alpha$ axis libræ; ſive $\tau\alpha$ acies, & axis libræ $A\alpha$.

Atque idem plane obtinet de Solidis converſione, vel Semiconverſione deſcriptis: Quippe hæc tum magnitudine, tum & momento, nihil aliud ab Ungulis Semiquadrantalibus correſpondentibus differunt quam quod ſint ad illas in ratione P ad R, vel $\frac{1}{2}P$ ad R: ut ſupra oſtenſum eſt. Adeoque tum facti ex converſione BV circa $A\alpha$ momentum reſpectu $\tau\alpha$, tum ejuſdem converſione circa $\tau\alpha$, momentum reſpectu $A\alpha$, eſt $\frac{\frac{1}{2}BVq \times V\alpha}{R}P$ ſeu $\frac{BVq \times V\alpha}{2R}P$; factique ex Semiconverſione, utrobique, $\frac{BVq \times V\alpha}{4R}P$. Et ſic ubique.

I. Eſt itaque Semiquadrantalis Ungulæ ſuper BCA ſectore, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum reſpectu rectæ (planive perpendicularis) $A\alpha$ (ut § C.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique ejuſdem integrâ converſione circa $\tau\alpha$ facti momentum (reſpectu ipſius $A\alpha$) $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{8}s^2RP$; & Semiſolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{16}s^2RP$.

Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Sectoris BCA reſpectu $\tau\alpha$) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (per prop. præced. § I.) erit iſtius Ungulæ Centri gravitatis ab $A\alpha$ diſtantia $\frac{8vR+3s^2}{12a+8s} = \frac{14R-3v}{12a+8s}v = \frac{8R+3b}{12a+8s}v$. Eademque eſt diſtantia ab $A\alpha$ (rectâ, planove perpendiculari) Solidi converſione (perfectâ vel imperfectâ) BCA circa $\tau\alpha$ deſcripti.

Ungulæque Semiquadrantalis ſuper eodem BCA ſectore aciem habentis TA, Momentum reſpectu ipſius $A\alpha$, eſt (ut § C) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Solidique Correſpondentis, $\frac{1}{3}vR^2P - \frac{1}{8}s^2RP$; & Semiſolidi, $\frac{1}{6}vR^2P - \frac{1}{16}s^2RP$. Adeoque, (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$, per § I. prop. præced.) diſtantia Centri gravitatis

tatis istius Ungulæ (adeoque & Solidi seu Semisolidi correspondentis) Fig. 159, 160.
ab $A\alpha$, est $\frac{8vR - 3s^3}{12a - 8s} = \frac{8R - 3b}{12a - 8s}v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo insistit semiquadrantalis Ungulæ aciem habentis sive $\tau\alpha$, sive T A, Momentum respectu $A\alpha$, est $\frac{1}{3}R^4$; Solidique correspondentis $\frac{2}{3}R^3P$; & Semisolidi, $\frac{1}{3}R^3P$: Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{8R^2}{3P}$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super B V A Semisegmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; (Solidique correspondentis, & Semisolidi, momenta, ad hoc; ut P, vel $\frac{1}{2}P$, ad R.) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (vel momentum Semisectoris B V A respectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis istius Ungula (adeoq; solidi Semisolidive correspondentis) ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR + 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12svR + 8s^3} = \frac{4vR^2 + 4s^2R + 3s^2b}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}v$. K.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem B V A Semisegmento, aciem habentis T A, momentum respectu ejusdem $A\alpha$, est (ut § E.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; (Solidique aut Semisolidi correspondentis momentum, ad hoc; ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani BVA momentum respectu TA,) $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ (Solidive aut Semisolidi conversione facti) ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 3s^4}{12aR^2 - 12sR^2 + 12svR - 8s^3} = \frac{4vR^2 + 4s^2R - 3s^2b}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}v$.

Similiter, Semiquadrantalis Ungulæ super eodem B V A, aciem habentis B V, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § E,) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{24}s^4 = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{24}v^2b^2$; (Solidique & Semisolidi conversione facti momenta, ad hoc, ut P & $\frac{1}{2}P$ ad R:) Adeoque propter Ungulæ magnitudinem (vel plani respectu B V momentum) $-\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3 = \mp\frac{1}{2}exR + \frac{1}{6}svz$; (per § L. prop. præc.) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{8vR^3 - 4s^2R^2 - s^4}{-12aR^2 + 12sR^2 + 12avR - 4s^3}$: Vel (quod eodem recidit) $\frac{c^2 + s^2}{4svz \mp 12exR}v^2$, seu $\frac{4R - v = 2R + b}{4svz \mp 12exR}v^3$, seu $\frac{4vR^2 - s^2b}{-12eR^2 + 12avR - 4s^3}v$.

Item, Semiquadrantalis Ungulæ super $B\alpha A$, aciem habentis $\tau\alpha$, L.

momentum

Fig. 159, 160. momentum respectu Aα, (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{2}s^2R^2 + \frac{1}{12}v^3R$; (Solidique conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{3}s^2RP - \frac{1}{12}s^2vP$; & Semisolidi $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{6}s^2RP - \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem (seu plani momentum respectu $\tau\alpha$,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6aR + 10sR - 2sv} = \frac{4R^2 + 4hR - s^2}{6fR + 2sh}v$.

Ungulæque Semiquadrantalis super eodem BαA, aciem habentis T A, momentum respectu ejusdem Aα (ut § F.) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{12}s^2vR$; (Solidique & Semisolidi, conversione facti, $\frac{1}{3}vR^2P + \frac{1}{12}s^2vP$, $\frac{1}{6}vR^2P + \frac{1}{24}s^2vP$:) Adeoque, propter Ungulæ magnitudinem, (seu plani momentum respectu T A,) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$, (per § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{4vR^2 + s^2v}{6aR + 2sR + 2sv}$ $= \frac{4R^2 + s^2}{6fR - 2sh}v$.

M. Eodem modo, Semiquadrantalis Ungulæ Triangulo BCα insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu Aα, est (ut § F.) $\frac{1}{24}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; (& Solidorum, conversione vel semiconversione descriptorum, his proportionalia; nempe in ratione P seu $\frac{1}{2}P$ ad R: quod & in sequentibus intellige.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. præced.) distantia Centri gravitatis ab Aα, est $\frac{5sR - 2sv}{12R - 4v} = \frac{5R - 2v}{12R - 4v}s$. Ungulæque Semiquadrantalis super eodem BCα insistentis, aciem habentis TA, momentum respectu Aα, est (ut § F.) $\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ per § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3R + 2v}{12R + 4v}s$.

Ungulæque Semiquadrantalis super Triangulo BVC, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu Aα; est (ut § D.) $\frac{7R - 3v}{24}s^2x$: Et magnitudo (per § K. prop. præced.) $\frac{5R - 2v}{6}sx$: Distantiaque Centri gravitatis ab Aα $\frac{7R - 3v}{20R - 8v}s$. Aciemque habentis T A, momentum (respectu Aα,) $\frac{R + 3v}{24}s^2x$; Magnitudo, $\frac{R + 2v}{6}sx$; Distantiaque $\frac{R + 3v}{4R + 8v}s$.

Et Semiquadrantalis Ungulæ super Triangulo $BV\alpha = BC\alpha \pm BVC$, Fig. 159, 160.
aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$ $\frac{5R-2v}{24}s^2R \pm \frac{7R-3v}{24}s^2x$; hoc est (propter $x=R-v$, supra centrum, addendum; vel $x=-R+v$, infra Centrum, auferendum;) $\frac{5R-2v}{24}s^2R + \frac{7R^2-10vR+3v^2}{24}s^2 = \frac{12R^2-12vR+3v^2}{24}s^2$; vel (propter $v^2=2vR-s^2$,) $\frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4 = \frac{1}{8}s^2h^2$; (ut § F.) Adeoq; (propter mag. $\frac{R-v}{6}sR \pm \frac{5R-2v}{6}sx = \frac{3R-v}{6}sR + \frac{5R^2-7vR+2v^2}{6}s =$ $\frac{4}{3}sR^2 - \frac{4}{3}svR + \frac{1}{3}sv^2 = \frac{4}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3 = \frac{1}{3}sh^2$; ut § M. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3}{8}s$. Aciemque habentis TA; momentum (ut § F.) $\frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{8}s^2h^2$; Magnitudo (ut § M. prop. præced.) $shR - \frac{1}{3}sh^2$; Distantiaque $\frac{8R-3h}{24R-8h}s = \frac{2R+3v}{8R+8v}s$.

Ungulæque Semiquadrantalis super Triangulo BAV, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G,) $\frac{1}{12}s^2vR + \frac{1}{8}s^4$; & magnitudo (propter magnitudinem Trianguli $\frac{1}{2}sv$; distantiamque Centri gravitatis a TA $\frac{2}{3}v$, & à $\tau\alpha$ $2R - \frac{2}{3}v$,) $svR - \frac{1}{3}sv^2 = \frac{1}{3}svR + \frac{1}{3}s^3$; & distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$ $\frac{2vR+3s^2}{8vR+8s^2}s$. Aciemque habentis TA, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$; magnitudo, $\frac{1}{3}sv^2 = \frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}s^3$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{6vR-3s^2}{16vR-8s^2}s = \frac{3}{8}s$. N.

Et Semiquadrantalis Ungulæ super ABA segmento, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, est (ut § G.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 + \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo (per § N. pr. præ.) $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{4vR^2-2s^2R+s^2v}{6aR-6sR+2sv} = \frac{4R^2-2hR+s^2}{6eR+2sv}v$. Aciemque habentis TA, momentum $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR = \frac{1}{6}v^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$; magnitudo, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; distantiaque $\frac{4vR^2-2s^2R-s^2v}{6aR-6sR-2sv} = \frac{4R^2-2hR-s^2}{6eR-2sv}v$.

Atque jam (inter alia) Solidorum Semisectoris BCA, $B\alpha A$, O.
aut

Fig. 159, 160. aut ſemiſegmenti B V A, Segmentive A B A (nedum Triangulorum B C α, B C V, B A V, B V α, &c.) circa A α, integra converſione deſcriptorum, Centra gravitatis determinavimus: Oſtendimus utique, diſtantiam Centri gravitatis à τ α, T A, B V, &c. Atque in ipſo Axe A α ſitum eſſe, conſtat, ex prop. 5 hujus. Ipſum itaque punctum determinavimus.

Et ſimiliter, Centra gravitatis Solidorum integrorum, quæ (non modo Sectoris B C B, vel B α B, vel Segmenti B B A; ut quæ in medio Axis converſionis eſſe manifeſtum eſt; ſed &) Semiſectoris B C A, vel B α A, aut Semiſegmenti B V A, Segmentive A B A, circa τ α vel T A, aut etiam Semiſegmenti B V A circa B V, converſione integra deſcribuntur, determinavimus. Cum enim eorum diſtantias ab A α plano deſignavimus, eáque in ipſo converſionis Axe τ α, T A, vel B V, eſſe conſtet (per 5 hujus:) ipſa Axis puncta, quæ Centra gravitatis ſunt, determinantur.

Verum in horum Semiſolidis, ſolidiſve imperfectâ quâvis converſione deſcriptis; Unguliſque correſpondentibus: nondum determinantur ipſa Centra; ut quæ non in ipſo Axe poſita ſunt, ſed alibi, extra axem, in plano per axem tranſeunte.

Cum tamen in quo per axem converſionis, ſeu aciem Ungulæ, tranſeunte plano conſtituta ſint, jam conſtet ex § G prop. 12. hujus; (nempe, in eo per converſionis axem plano quod ſolidorum, converſione factorum, arcum converſionis biſecat; eoque per Ungularum aciem plano, quod biſecat ungulæ altitudinem:) Atque in quâ quidem hujus plani rectâ, jam ſit determinatum; nempe in eis quorum Axis ſeu Acies eſt A α, per Centri gravitatis diſtantiam, à τ α, T A, B V, &c. & in eis quorum Axis eſt τ α, T A, vel B V, per ejus ab A α diſtantiam: Id ſolum ſupereſt, ut in quo iſtius rectæ puncto ſitum ſit, determinemus per ipſius a converſionis Axe diſtantiam in eis quæ converſione deſcribuntur Solidis; &, in Ungulis, per diſtantiam à perpendiculari per Aciem Plano. (Unde ipſum gravitatis Centrum determinatum iri conſtat, per prop. 26. Cap. præced) Id autem ſic aggredimur.

P. Ut Sectorem Sphæricum integrum, B C B A, § A, (plani B C A circa rectam A α integra converſione deſcripti,) ſic ejuſdem ſemiſectorem ſeu Semiſectorem Sphæricum, aliúmve imperfectum, (converſione dimidiâ, aliâve imperfectâ deſcriptum,) intelligamus ex Pyramidulis (ſimilibus & æqualibus) componi, (juxta def. 1. Cap. 4.) Quarum communis vertex ſit Sphæræ centrum, Baſéſque compleant Superficiei

AP. V,

gulorum
onverfio-
tendimus
Atque
m itaque

quæ (non
t quæ in
nifectoris
A B A,
V, con-
m eorum
onis Axe
cta, quæ

converfi-
erminan-
bi, extra

læ, tran-
. hujus;
converfi-
rum aci-
quidem
um Axis
A, BV,
Az di-
tum fit,
uæ con-
n à per-
m deter-
c aggre-

i BCA
femiffem
verfione
amidulis
Qu-
t Super-
ficiei

PRO

ficiei &
venien
pellab
Cu
à vert
omnis
intelli
cujus
pote
reput
Secto
que ta
Q
circul
idem
aciem
distan
Ef
super
idem
conve
R du
ced.)
dine
exhi

ab A

ba i
ta)

dista

atim
Cen
v=
E
ejusd
me;
pro.
prop
24

ficiei Sphæricæ portionem Semisectori huic, Sectorive imperfecto, convenientem: nempe Trilineum Sphæricum, quod *Sectoris Basin* appellabimus. Fig. 159, 160.

Cumque (per 6 hujus) Centri gravitatis in Pyramide, distantia à vertice pyramidis sit $\frac{3}{4}$ totius altitudinis; Pyramidularum illarum omnia Centra gravitatis (æqualibus ab invicem distantiis remota) intelligantur complere Simile Trilineum Sphæricum, ut b a, fig. 165. cujus radius sit $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$. Cujus cum singula puncta, (utpote æqualium Pyramidum Centra gravitatis,) æqualiter onerata reputentur; Idem erit Trilinei hujus, ipsiúsque expositi Semisectoris, Sectorisve imperfecti, Centrum gravitatis; (per 16 Cap. 4.) adeóque tantundem ab A α conversionis axe distabit.

Quod & similiter accommodabitur Ungulæ eidem B C A sectori circulari insistenti; Cujus utique (pari ratione) Centrum gravitatis idem erit atque Superficiei Ungulæ Cylindraceæ arcui b a insistentis aciem habentis A α; adeoque tantundem ab A α perpendiculari plano distans.

Est autem (per § V, W. prop. 13.) Semiquadrantalis Ungulæ superficialis, arcui B A insistentis, momentum respectu ipsius A α; idem atque summa quadratorum sinuum rectorum ipsi A B arcui convenientium; adeoque æquatur facto ex B V A semisegmento, in R ducto; hoc est, (propter $BVA = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, per § F. prop. præced.) $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR$: Atque hoc, per Ungulæ superficialis magnitudinem divisum; hoc est, (per § N. Q. prop. 13) per vR divisum; exhibet istius Ungulæ Superficialis B A, distantiam Centri gravitatis ab $A\alpha = \frac{e}{2v}R + \frac{1}{2}s$. Adeoque (propter $Cb = \frac{3}{4}CB = \frac{3}{4}R$,) arcui b a insistentis Ungulæ superficialis, & propterea (per jam demonstrata) Ungulæ Solidæ ipsi B C A insistentis, aciem habentis A α, distantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3e}{8v}R + \frac{3}{8}s$. (Et, speciatim, istius quæ toti A D α semicirculo insistit, Ungulæ, Distantia Centri gravitatis ab A α, propter $s = 0$ adeoque $e = a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, erit $\frac{3}{32}P$.)

Eademque esset, distantia Centri gravitatis Solidi, imperfectâ ejusdem B C A circa A α conversione descripti, ab A α conversionis axe; demptâ curvaturâ. Sed, propter curvaturam, minuenda est pro ratione quam habet ad conversionis arcum chorda sua, (per prop. 14. hujus) hoc est, in Semiconversione, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P; (& in aliis conversionibus similiter, mutatis mutandis,

in

Fig. 159, 160. in ratione Chordæ ad Arcum;) Adeóque Semisolidi, ipsius BCA semiconversione circa $A\alpha$ descripti, distantia Centri gravitatis à conversionis suæ Axe $A\alpha$, est $\frac{3eR+3sv}{2vP}R$. (Et, speciatim, quod Semiconversione Semicirculi $AD\alpha$ describitur, Hemisphærii, Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, est $\frac{3}{8}R$.)

Atque hæ distantiæ in magnitudines ductæ, (nempe Ungulæ, $\frac{1}{3}vR^2$; & Semisolidi, $\frac{1}{6}vRP$, per § Q. prop. præced.) exhibent Semiquadrantalis Ungulæ super BCA sectore, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu ipsius $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$; Semisolidique correspondentis, $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2$. Et speciatim, pro Ungula Semicirculi, & Hemisphærio; $\frac{1}{16}R^3P$, & $\frac{1}{8}R^3P$.

(Atque hic obiter notare non erit importunum, momentum Semisolidi respectu sui axis conversionis, duplum esse momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis respectu aciei suæ seu Plani per illam perpendicularis; quod in hujusmodi casibus semper obtinet, quod semel moneo: Cum enim magnitudo ad magnitudinem sit ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique distantia, propter conversionem dimidiam, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; erit quæ ex utrisque componitur, momentorum ratio $\frac{\frac{1}{2}P}{R}\times\frac{2R}{\frac{1}{2}P}=\frac{2}{1}$.)

Q. Deinde, quæ Triangulo BVC insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens $A\alpha$, Pyramis est; verticem habens C Centrum; Basemque Triangularem rectæ BV insistentem; cujus quidem Trianguli Centrum gravitatis ab $A\alpha$ plano, distat $\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}s$; Centrúmque gravitatis Pyramidis (utpote in rectâ, à basis Centro ad C pyramidis verticem ductâ, quæ est Pyramidis axis, tres quadrantes versus C abscindens; per 6 hujus;) distabit ab $A\alpha$ plano, $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{6}s$. Quæ quidem distantia, ducta in Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{6}sx$, (per § R. prop. præced.) exhibet ejusdem momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^2x$: Et Semisolidi correspondentis (cujus magnitudo ad magnitudinem Ungulæ est ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Centrique gravitatis distantia, ad distantiam hujus, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$;) momentum $\frac{1}{6}s^2x$.

Atque hæc Ungulæ, Semisolidique momenta; momentis Ungulæ Semisolidique Sectoris BCA (§ P. repertis;) Ablata, si supra Centrum; vel Addita, si infra Centrum; exhibent Ungulæ Semisegmento BVA insistentis, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2\mp\frac{1}{12}s^2x$: Hoc est, (propter $x=R-r$, supra

supra Centrum, auferendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, addendum;) $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Et Semisolidi, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 \mp \frac{1}{6}s^3x = \frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{6}s^3v$. Adeoque (propter Ungulæ magnitudinem, $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$, per 9 R. propositionis præcedentis) distantia Centri gravitatis Ungulæ ab A α, Fig. 159, 160.

$$\frac{3eR^3 + 3svR^2 - 2s^3R + 2s^3v}{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v} = \frac{3eR^3 + 3svR^2 \mp 2s^3x}{4v^2R + 4s^2v}$$

: Centrique Semisolidi inde distantia, ad hanc ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P.

Potest autem hoc momentum Ungulæ & Semisolidi, Semisegmento BVA convenientium, sic aliter concipi. Nempe, si omnes ordinatim applicatæ BV &c. æqualibus intervallis sumptæ, (complentes BVA spacium,) ducantur primum in sui semisses, ut habeantur Triangula eidem insistentia (Ungulam complentia,) quæ sunt (ut supra ostensum est) ordinatim-applicatarum Semiquadrata: Atque hæc demum Triangula (semiquadratis æqualia) in rectarum duos Trientes, (pro distantia Centri gravitatis à vertice in Triangulo:) Quod prodit, $BV \times \frac{1}{2}BV \times \frac{2}{3}BV = \frac{1}{3}BVc$, exhibebit momentum Trianguli rectæ BV insistentis. Quod cum ubique fiat: Erit Ungulæ Semiquadrantalis, super BVA insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu ipsius A α; summæ Cuborum ordinatim-applicatarum Triens; Puta, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3. Quod perinde verum est, si pro Semisegmento BVA in vertice terminato, sumeretur BVCD, vel quævis alia Semicirculi portio, duabus ordinatim-applicatis interjecta. Quippe, & hic, $\frac{1}{3}$ *Omn.* o^3 momentum Ungulæ similiter exhibebit.)

Sed & idem momentum jam modo repertum est, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Hujus itaque Triplum, $\frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, æquatur *Omnibus* o^3; hoc est, summæ cuborum ordinatim-applicatarum, quæ Semisegmentum circulare BVA, in vertice terminatum, complent.

(Si vero hæc ad summam Cuborum ordinatim-applicatarum in alia portione, puta BVCD, non ad verticem A terminatâ, accommodare libet; id fiet, ut aliis modis, sic hac saltem facili ratione; nempe, si, modo jam tradito, habeatur primum summa *omnium* o^3 quæ totum ADC Semisegmentum spectant; atque deinde summa *omnium* o^3 quæ spectant Semisegmentum ABV; atque demum hæc summa, ab illa subducatur; quod restat, erit *omnium* o^3 portionem BVCD spectantium summa,)

Fig. 159, 160. Verùm poteſt & hoc idem Ungulæ ſemiſegmento B V A inſiſtentis aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu ipſius $A\alpha$, ſic adhuc aliter concipi. Nempe, ſi rectæ omnes ipſi A V parallelæ, Semiſegmentum B V A complentes, ducantur in quadrata diſtantiarum ſuarum reſpective, à recta A V: (hoc eſt; propter æqualia quæ ſupponimus parallelarum illarum interſtitia; in ſeriem ſecundanorum, ut 0, 1, 4, 9, &c. quorum maximum ſit remotiſſimæ parallelarum diſtantia quadrata:) Nam rectarum quælibet in diſtantiam ſuam ducta, exhibet parallelogrammum eidem inſiſtens in Semiquadrantali Ungula expoſita; idémque iterum in eandem diſtantiam ductum, exhibet iſtius parallelogrammi momentum reſpectu Axis A V, ſeu $A\alpha$. Adeóque ſimul omnia, iſtius parallelogrammi momentum.

Quæque de Ungula dicta ſunt; ſolido ejuſdem plani B V A converſione imperfecta deſcripto facile (ex præmonſtratis) accommodari poterunt. Sed de his hactenus.

R. Progredimur ad imperfectum Sectorem, Sectoris plani $B\alpha A$ circa $A\alpha$ imperfecta converſione deſcriptum; Ungulámque huic correſpondentem. Quantum ſcilicet, in his, Centrum gravitatis diſtat ab $A\alpha$, converſionis Axe, ſeu plano per aciem Ungulæ perpendiculari.

Quæ Triangulo $BV\alpha$ inſiſtit Semiquadrantalis Ungula aciem habens $A\alpha$, Pyramis eſt; Cujus vertex α; Baſiſque triangularis ipſi BV inſiſtens. Centrique gravitatis diſtantia ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{6}s$. (Quod eodem modo oſtendetur, atque in § Q. de Pyramide triangulo BVC incumbente.) Ejúſque magnitudo (per § S. prop. præced.) $\frac{1}{6}s^2h$. Adeóque momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{12}s^3h=\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$. Quod quidem additum momento Ungulæ Semiſegmenti B V A (§ Q. invento) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R+\frac{1}{12}s^3v$; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ Sectori $B\alpha A$ inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, momentum reſpectu ipſius $A\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$.

Idémque ſic habetur. Semiquadrantalis Ungula Trianguli $BC\alpha$, aciem habens $A\alpha$, eſt item Pyramis cujus vertex, α; Baſiſque Triangulari (ipſi C B inſiſtentis) Centrum gravitatis ab $A\alpha$ plano diſtat, $\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}s$; adeoque Centrum pyramidis inde diſtat, $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{6}s$. Adeoque, propter magnitudinem $\frac{1}{6}s^2R$ (per § S. prop. præced.) Momentum $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc Additum momento Ungulæ BCA, (§ P. invento,) $\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2$; exhibet momentum Ungulæ Semiquadrantalis Sectori $B\alpha A$ inſiſtentis, aciem habentis $A\alpha$, reſpectu ipſius

ipsius A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$. Ut prius. (Hujúsque duplum, Fig. 159,
est Semisolidi correspondentis momentum.) 160.

Atque hoc Ungulæ momentum, per ipsius magnitudinem divisum; hoc est, per $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. præced.) exhibet hujus Ungulæ Sectori B α A insistentis, aciem habentis A α, distantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3eR+3svR+2s^3}{8vR+4s^2}$. Adeoque Semisolidi correspondentis, distantia Centri gravitatis ab A α conversionis axe, $\frac{3eR+3svR+2s}{2vRP+s^2P}R$: nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$, ad P.

Similiter ostendetur, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A V insistentis, aciem habentis A α, (quæ etiam Pyramis est,) Centrum gravitatis ab A α plano distare $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$; magnitudinem esse $\frac{1}{6}s^2v$; momentum respectu A α, $\frac{1}{12}s^3v$. Atque hoc ex momento Ungulæ Semisegmenti B V A (§ Q. invento) sublatum; exhibet Semiquadrantalis Ungulæ, Segmento A B A insistentis, aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$. S.

Vel etiam, Ungulæ Semiquadrantalis Triangulo B A C insistentis, aciem habentis A α, (quæ vel Pyramis, vel saltem duarum Pyramidum aggregatum vel differentia, quarum communis basis triangularis ipsi B V insistit,) Centrum gravitatis similiter ab A α distare, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}s=\frac{1}{2}s$; magnitudinem, $\frac{1}{6}s^2R$; momentum respectu A α, $\frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc ex momento Ungulæ Sectoris B A C (§ P. invento) $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2$, subductum; relinquit $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum, respectu A α, Ungulæ aciem habentis A α, ipsi A B A, segmento insistentis. Ut prius. (Hujúsque duplum $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$, momentum Semisolidi correspondentis.)

Illudque Ungulæ momentum, per ipsius magnitudinem divisum, hoc est per $\frac{1}{6}v^2R=\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$ (per § Q. prop. præced.) exhibet istius Ungulæ Segmento A B A insistentis, aciem habentis A α, distantiam Centri gravitatis ab A α plano, $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{8vR-4s^2=4v^2}$. Semisolidique correspondentis, Centri inde distantiam $\frac{3eR^2+3svR-2s^3}{2vRP-s^2P}R$.

Restat, ut similiter expendamus Solida, imperfectâ conversione circa τα, T A, B V, descripta: Ungulásque correspondentes: Eorum Momenta respectu τα, T A, B V, respective, determinando; Centríque gravitatis inde distantiam. Intelligatur T.

Fig. 159, 160. Intelligatur itaque super A D α Semicirculo, Ungula Semiquadrantalis, aciem habens $\tau\alpha$. Cujus itaque singulis ordinatim-applicatis, ut B V, totidem insistunt Parallelogramma Rectangula, Ungulam complentia; quorum altitudines sint ipsis V α respectivis æquales; eorúmque a T A distantia V A. Eritque propterea Rectangulorum horum cujusque momentum respectu T A, (oppositæ tangentis,) æquale facto ex Base B V, in altitudinem V α, & distantiam à vertice V A, continuè ductâ: Hoc est, $BV \times V\alpha \times VA$. Est autem $\alpha V \times VA = BVq$, (propter B V mediam proportionalem inter Diametri segmenta AV, αV:) Adeoque $BV \times \alpha V \times VA = BVc$. Et sic ubique.

Idemque erit (eâdem de causâ) momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ, aciem habentis T A. Quæ enim est, in alterâ, altitudo; est, in reliqua, Distantia: & vice versa.

Sunt itaq; Parallelogrammorum horum omnium (sive quæ Ungulam totam ipsi A α D insistentem; sive quæ ipsius portionem ipsi BVA, vel B V C D, insistentem complent; quippe utrobique eadem est ratio;) momenta respectu, TA, si acies sit $\tau\alpha$; vel respectu $\tau\alpha$, si acies sit TA, Summa cuborum ordinatim-applicatarum basin complentium. Puta, *omnium* o^3, respective.

Et quidem in eâ quæ Semisegmento B V A insistit, (ad verticem A terminato,) *Omn.* o^3, $= \frac{3}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, ut § Q. ostensum est. (Idémque, si opus fuerit ad aliam portionem, ut B V C D, facile accommodabitur; ut ibidem etiam ostensum est.)

Illud itaque momentum; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi B V A Semisegmento insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$ (per § L. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis ab (oppositâ) T A, $\dfrac{9eR^3 + 9svR^2 - 6s^3R + 6s^3v}{12eR^2 + 12svR + 8s^3}$ $= \frac{3}{4}R - \dfrac{6s^3R - 3s^3v}{6eR^2 + 6svR + 4s^3} = \frac{3}{4}R - \dfrac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$: Adeoque ab ipsa $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \dfrac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$; & à BV, $\frac{1}{4}R - b + \dfrac{3s^3b}{6eR^2 + 6svR + 4s^3}$. Ungulæque propterea respectu ipsius BV, momentum $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: Ejusdemque respectu ipsius $\tau\alpha$, aciei suæ, momentum, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{11}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. Hujúsque duplum $\frac{5}{4}eR^3 + \frac{5}{4}svR^2 + \frac{11}{6}s^3R - \frac{1}{2}s^3v$ momentum semisolidi, semiconversione semisegmenti B V A circa $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$ axis conversionis: Atque hoc, per Semisolidi magnitudi-

nem

nem divisum, exhibet $\frac{15eR^3+15svR^2+22s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R = \frac{5R}{P}R$ Fig. 159, 160.
$+\frac{12s^3R-6s^3v}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R = \frac{5R}{P}R + \frac{6s^3h}{3eRP+3svR^2P+2s^3P}R$; Semisolidi istius, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, (nempe ad illam Ungulæ, ut $4R$, ad P.) Adeoque, à TA, $\frac{2P-5R}{P}R - \frac{6s^3h}{3eR^2P+3svRP+2s^3P}R$, Semisolidique istius, respectu ipsius TA (axi oppositæ) momentum $\frac{1}{2}eR^2P+\frac{1}{2}svRP+\frac{1}{3}s^3P-\frac{5}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{11}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Idemque (quod prius) momentum $\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$; si dividatur per Ungulæ magnitudinem ipsi BVA insistentis, aciem habentis TA, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR-\frac{1}{3}s^3$, (per § L. prop præced.) exhibet, hujus, Centri gravitatis distantiam ab (opposita) $\tau\alpha$, $\frac{9eR^3+9svR^2-6s^3R+6s^3v}{12eR^2+12svR-8s^3} = \frac{3}{4}R+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Atque à BV, $\frac{3}{4}R-h+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3} = -\frac{1}{4}R+v+\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$; à TA, $\frac{1}{4}R-\frac{3s^3v}{6eR^2+6svR-4s^3}$: Ungulæque propterea, respectu BV, momentum $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; & respectu ipsius TA (aciei suæ) momentum $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$: Hujusque duplum, $\frac{5}{4}eR^3+\frac{5}{4}svR^2-\frac{5}{6}s^3R-\frac{1}{2}s^3v$, momentum Semisolidi correspondentis. Hujusq; propterea Semisolidi distantia Centri gravitatis à TA (axe suo) est $\frac{5R}{P}R-\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$; adeoque à $\tau\alpha$, (axi opposita) $\frac{2P-5R}{P}R+\frac{6s^3v}{3eR^2P+3svRP-2s^3P}R$: Ejusque momentum respectu hujus $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eR^2P+\frac{1}{2}svRP-\frac{1}{3}s^3P-\frac{5}{4}eR^3-\frac{5}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{2}s^3v$.

Et, speciatim, quæ toti Semicirculo ADα insistit Ungula, aciem habens, sive $\tau\alpha$, sive TA; momentum habet (propter $s=0$, & $e=a=\frac{1}{2}P$,) respectu earum alterius, nempe aciei suæ, $\frac{5}{16}R^3P$; alterius vero, quæ aciei opponitur, $\frac{1}{16}R^3P$; Adeoque Centri gravitatis distantiam inde, $\frac{3}{4}R$; hinc, $\frac{1}{4}R$. Et correspondentis Semisolidi conversione facti, momentum respectu axis conversionis suæ, $\frac{5}{8}R^3P$; Centrique gravitatis inde distantia, erit $\frac{5R^2}{P}$. Unde habetur

eiusdem

Fig. 159, 160. ejusdem ab altero extremo distantia, & momentum respectu istius.

V. Deinde; ut hæc ad Axem B V, transferantur; (per § F. prop. 11. hujus:) Ex Ungulæ Semisegmenti B V A, aciem habente T A, momento respectu $\tau\alpha$, modo invento, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; si auferatur factum ex Ungulæ magnitudine $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, in $\alpha V = b$ ductâ, hoc est, $\frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}svbR - \frac{1}{3}s^3b = \frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}s^3R - \frac{1}{3}s^3b$, (propter $bv = s^2$,) hoc est, $eR^3 - \frac{1}{2}evR^2 + \frac{1}{2}s^3R - \frac{2}{3}s^3R + \frac{1}{3}s^3v = eR^3 - \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{3}s^3v$: Quod restat $-\frac{5}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$, est ejusdem Ungulæ B V A aciem habentis T A, momentum respectu B V; (quod § T. aliter ostensum est:) Ejusque Centri gravitat. distan. à BV, $\frac{-15eR^3 + 12avR^2 - 3svR^2 - 2s^3R - 2s^3v}{12eR^2 + 12svR - 8s^3}$

$= v - \frac{5}{4}R + \frac{3s^3v}{6eR^2 + 6svR - 4s^3}$. Idemque habetur, si ejusdem Centri distantia à T A, auferatur ex $AV = v$, (aut ab ejus à $\tau\alpha$ distantia auferatur $b = 2R - v$;) ut habeatur illius à B V distantia; atque hæc a B V distantia ducatur in magnitudinem Ungulæ, ut habeatur momentum: (ut § T. factum est.) Et, utrovis modo, habebitur Semisolidi correspondentis momentum respectu ejusdem B V; Centrique gravitatis inde distantia: Nempe, distantia, $\frac{6s^3v}{3eR^2P + 3svRP - 2s^3P}R - \frac{5R^2}{P} + v$; & momentum, $\frac{1}{4}fvRP - \frac{1}{4}s^3P - \frac{s^3vP}{6R} - \frac{5}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{2}s^3v$.

Ex Ungula vero Semisegmenti B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; puta V v f A (fig 141.) auferendum primò factum ex plano BVA in αV, puta Prisma V v a A, ut habeatur v a f, seu V A F, Ungula ejusdem basis aciem habens B V: Atque ex momento istius Ungulæ respectu ejusdem $\tau\alpha$ hoc est, ex $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$ (per § T) auferendum illius Prismatis respectu ejusdem $\tau\alpha$ momentum; hoc est, plani B V A momentum, in V v, seu $\alpha V = b$ ductum; hoc est (per § L. prop. præced.) $\frac{1}{2}ebR^2 + \frac{1}{2}svbR + \frac{1}{3}s^3b = eR^3 - \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{2}{6}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$; ut habeatur momentum Ungulæ B V A F (Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis BV,) respectu ipsius $\tau\alpha$, $-\frac{3}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque momentum respectu B V, aciem habentis $\tau\alpha$.) Atque ex hoc demum momento respectu $\tau\alpha$, auferendum quod fit ex ipsa Ungula

B V A F

CAP. V.

respectu

prop. 11.
T A, mo-
$+\frac{4}{4}s^3v$;
^{3}, in $\frac{1}{2}V$
$R-\frac{4}{3}s^3b$,
$^3v=eR^3$
$R^2-\frac{4}{8}svR^2$
entis TA,
) Ejúsque
$^3R-2s^3v$

em Centri

stantia au-
atque hæc
ocatur mo-
debitur Se-
; Centri

$P-2s^3p$ R

$R^3-\frac{4}{4}svR^2$

; puta
BVA in
Ungula e-
us Ungulæ
s^3v (per
omentum;
ductum;
$s^3b=eR^3$
n Ungulæ
BV,) re-
. (Idem
que ex hoc
ssa Ungulæ
BVAB

PRO

BVA

mome
habent
nitudi

respon
mentu
BV, e

distant

que m

tis T A
auferat
hæc in
T A

Por
habens

Atq
habent

tum Un
ipsius
solidi,
hoc ef
prop.

12

BVAF magnitudine, in $V\alpha = b$; hoc est, (per § L. prop. præced. $-\frac{1}{2}ehR^2+\frac{1}{2}avhR-\frac{1}{6}s^3h=-eR^3+\frac{1}{2}evR^2+\frac{1}{2}as^2R-\frac{1}{3}s^3R+\frac{1}{6}s^3v$: Et habebitur $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$ momentum Ungulæ B V A F (semisegmento B V A insistentis, aciem habentis BV,) respectu aciei suæ BV: Adeóque (per magnitudinem dividendo) distantia Centri gravitatis a B V, Fig. 159, 160.

$$\frac{15eR^3+15svR^2-12as^2R+2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3};$$ atque à $\tau\alpha$,

$$\frac{-9eR^3+12avR^2+3svR^2-6s^3R+2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3}.$$ (Semisolidique correspondentis momentum, sive respectu $\tau\alpha$, sive BV, est duplum momentum Ungulæ: Ejusque Centri gravitatis, distantia sive à $\tau\alpha$, sive à BV, est ad distantiam Centri Ungulæ, ut $4R$ ad P.) Centriq; Ungulæ distantia à T A, $$\frac{-15eR^3+12avR^2-3svR^2-2s^3R-2s^3v}{-12eR^2+12avR-4s^3};$$ ejusque momentum respectu T A, $-\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{2}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$. (Idem atque, respectu B V, momentum aciem habentis T A.) Similiter, si Semisolidi distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, auferatur ex $A\alpha=2R$; habebitur ejusdem à T A distantia. Atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet ejusdem respectu T A momentum.

Porro; Triangulo B V α insistens Ungula Semiquadrantalis aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis; Cujus magnitudo $BV\times V\alpha\times\frac{1}{3}V\alpha=\frac{1}{3}sh^2=\frac{4}{3}sR^2-\frac{4}{3}svR+\frac{1}{3}sv^2=\frac{4}{3}sR^2-\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3$: Ejusque Centri gravitatis, à $\tau\alpha$, distantia $\frac{3}{4}V\alpha=\frac{3}{4}h$: Adeoque Ungulæ momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sh^3=2sR^3-3svR^2+\frac{3}{2}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3=2sR^3-\frac{3}{2}s^3R-\frac{1}{4}sv^3=2sR^3-svR^2-s^3R+\frac{1}{4}s^3v$. W.

Atque hoc additum momento Ungulæ ipsi B V A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) seu $\frac{5}{8}aR^3-\frac{5}{8}sR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; exhibet $\frac{5}{8}aR^3+\frac{11}{8}sR^3-\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$, seu $\frac{5}{8}fR^3+\frac{3}{8}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$. (Hujusque duplum est momentum correspondentis Semisolidi, respectu ejusdem $\tau\alpha$.) Idemque per magnitudinem divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2+\frac{1}{6}shR=\frac{1}{2}aR^2+\frac{5}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$; (ut § M. prop. præced.) exhibet distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$

$$\frac{15aR^2+33sR^2-9svR-2s^3}{12aR+20sR-4sv}=\frac{15fR^2+9shR-2s^3}{12fR+4sh}.$$ Adeoque ejus-

Fig. 159, 160. dem Centri distantia à TA, $\frac{9aR^2+7sR^2+svR+2s^3}{12aR+20sR-4sv} = \frac{9fR^2-shR+2s^3}{12fR+4sh}$; & propterea ejusdem Ungulæ momentum respectu TA, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. (Et correspondentis Semisolidi, distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, est ad illam Ungulæ, ut $4R$ ad P; ejusque residuum ad $2R$, est ejusdem distantia à TA; atque hæc in Semisolidi magnitudinem ducta, exhibet semisolidi momentum respectu ipsius TA.)

Ejusdemque Triangulo BVα insistentis Ungulæ, Pyramidisve, Centrum gravitatis à TA, distat $2R - \frac{3}{4}h = \frac{1}{2}R + \frac{3}{4}v$: Adeoque ipsius respectu TA momentum (distantiâ in magnitudinem ductâ) $\frac{2}{3}sR^3 + \frac{2}{3}svR^2 - \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v = \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h$; propter $s^2 = hv$.

Atque hoc additum, momento Ungulæ ipsi BVA insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(= \frac{3}{8}eR^3)$ $+ \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$, (ut § V.) exhibet $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$ seu $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, momentum Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius TA. ut prius.

Eidem verò Triangulo BVα insistens Ungula, aciem habens TA, constat ex Prismate eidem insistente cujus altitudo $AV = v$; eique superjacente pyramide cujus basis Triangulum BVα (aut huic æquale,) altitudo, perpendicularis supra α punctum æqualis ipsi $V\alpha = h$; Adeoque (propter $BV\alpha = \frac{1}{2}sh$) Pyramidis magnitudo $\frac{1}{6}sh^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{2}{3}svR + \frac{1}{6}sv^2 = \frac{2}{3}sR^2 - \frac{1}{3}svR - \frac{1}{6}s^3$: Et, (propter Centri gravitatis basis BVα, à $\tau\alpha$ distantiam, $\frac{2}{3}h$; pyramidisque Centrum gravitatis in rectâ inde ad verticem ipsi α puncto supereminentem ductâ, abscissâ inde versus verticem, $\frac{3}{4}$ ipsius;) distantia Centri gravitatis pyramidis à $\tau\alpha$ plano, erit $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}h = \frac{1}{2}h$; & propterea pyramidis momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}sh^3 = \frac{2}{3}sR^3 - svR^2 + \frac{1}{2}sv^2R - \frac{1}{12}sv^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 - \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$. Prismatis verò, eidem BVα incumbentis magnitudo (propter basem $BV\alpha = \frac{1}{2}sh$; & altitudinem $VA = v$) est $\frac{1}{2}shv = \frac{1}{2}s^3$: Ejusque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia (quippe eadem quæ basis Triangularis) $\frac{2}{3}h$; adeoq; Prismatis respectu $\tau\alpha$ momentum $\frac{1}{3}svh^2 = \frac{1}{3}s^3h = \frac{2}{3}s^3R - \frac{1}{3}s^3v$. Atq; hoc additum Pyramidis momento $\frac{1}{12}sh^3$; exhibet Ungulæ (ipsi BVα insistentis, aciem habentis TA,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}svh^2 = \frac{1}{12}sh^3 + \frac{1}{3}s^3h = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$. (Idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu TA.) Atque hoc additum, momento Ungulæ Semisegmento BVA insistentis, aciem item habentis TA, respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3$ $(= \frac{3}{8}eR^3)$ $+ \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; exhibet, Ungulæ Sectori BαA insistentis aciem

aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3+\frac{7}{24}sR^3+\frac{1}{24}svR^2$ Fig. 159, 160.
$+\frac{1}{12}s^3R=\frac{3}{8}fR^3-\frac{1}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R$. (Idem planè atque Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu T A: Quippe quæ illic est Altitudo, hic est Distantia; & vice versa.) Atque hoc momentum per Ungulæ mag. divisum, hoc est, per $\frac{1}{2}fR^2-\frac{1}{6}shR=\frac{1}{2}aR^2+\frac{1}{6}sR^2$ $+\frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) exhibet $\frac{9aR^2+7sR^2+svR+2s^3}{12aR+4sR+4sv}$ $=\frac{9fR^2-shR+2s^3}{12fR-4sh}$; distantiam Centri gravitatis (Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis T A,) à $\tau\alpha$. Adeoque ejusdem Centri à T A distantia est $\frac{15aR^2+sR^2+7svR-2s^3}{12aR+4sR+4sv}=$ $\frac{15fR^2-7shR-2s^3}{12fR-4sh}$; & Ungulæ respectu ipsius TA (aciei suæ) momentum $\frac{5}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3+\frac{7}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{5}{8}fR^3-\frac{7}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R$. (Quæ omnia correspondenti semisolido, facile accommodantur: eodem modo quæ in iis quæ aciem habent $\tau\alpha$ factum est.)

Vel etiam; propter Ungulæ Triangulo BVα insistentis (aciem habentis T A, ex Pyramide & Prismate constantis) magnitudinem (modo exhibitam) $\frac{1}{6}sh^2+\frac{1}{2}shv=\frac{2}{3}sR^2-\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$; $=shR$ $-\frac{1}{3}sh^2$; Momentum ejus respectu $\tau\alpha$ (modo ostensum) $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2$ $+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$, per magnitudinem illam dividendo; habebitur istius Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia $\frac{8sR^3-4svR^2+4s^3R-3s^3v}{8sR^2-4svR+4s^3}$ $=R-\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}$; & à T A, $R+\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}$; (adeoque à D C, $\frac{3s^2v}{8R^2-4vR+4s^2}=\frac{3v^2}{12R-4h}=\frac{3v^2}{4R+4v}$; & propterea ejusdem respectu T A momentum, $\frac{2}{3}sR^3-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}s^3R$ $+\frac{1}{4}s^3v$. Atque hoc additum Momento Ungulæ Semisegmento BVA insistentis (aciem item habentis T A) respectu ipsius T A, $\frac{5}{8}aR^3$ $-\frac{5}{8}sR^3$ $(=\frac{5}{8}eR^3)$ $+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$, (ut § T;) exhibet momentum Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{5}{8}aR^3+\frac{1}{24}sR^3+\frac{7}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$. ut prius.

X. Deinde; ex his momentis Ungularum sectori BαA insistentium, subductis Ungularum Triangulo BCα insistentium momentis respectivis, habentur momenta Ungularum sectori BCA insistentium respectiva. Quæ autem Triangulo BCα insistit Ungula semiquadrantalis,

Fig. 159, 160. aciem habens $\tau\alpha$, eſt Pyramis: Cujus vertex α; Baſis, Trapezium rectæ BC inſiſtens, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C inſiſtens, æqualis eſt rectæ $C\alpha = R$; altera, inſiſtens puncto B, æqualis rectæ $V\alpha = h$; quas itaque, in planum replicatas, repræſentent rectæ $C\alpha$, Ba. Quod quidem Trapezium, (quò Centrum gravitatis habeatur,) dirimi intelligatur in duo Triangula αBC, αBa. Quæ (propter communem altitudinem αa ſeu $BV = s$,) ſunt ut baſes $C\alpha$, Ba; hoc eſt $C\alpha$, $V\alpha$; ſeu, R, h: Puta $\frac{1}{2}sR$, $\frac{1}{2}sh$. Diſtatque illius Centrum gravitatis ab $A\alpha$ (rectâ planove) $\frac{1}{3}VB = \frac{1}{3}s$; hujus vero, $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$. Erúntque, propterea, eorum momenta reſpectu $A\alpha$, ut $\frac{1}{6}s^2R$, $\frac{1}{3}s^2h$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}s^2h$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ diviſum, exhibet totius Trapezii diſtantiam Centri gravitatis, quod puncto β deſignatum intelligatur (toto ſcilicet Trapezio, in rectam cui inſiſtit, BC projecto,) ab $A\alpha$ $\frac{s^2R + 2s^2h}{3sR + 3sh} = \frac{R + 2h}{3R + 3h}s = \beta\gamma$. Adeoque (propter ſimilia Triangula BVC, $\beta\gamma C$,) ut $BV = s$, ad $VC = x$; ſic $\beta\gamma$, ad $\gamma C = \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Et $\gamma\alpha = R \pm \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Sumptâque $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$, (ductâque, ut $\beta\gamma$, ſic gG, ipſi $\tau\alpha$ parallelâ,) erit $\alpha G = \frac{3}{4}\alpha\gamma = \frac{3}{4}R \pm \frac{R + 2h}{4R + 4h}x = \frac{3}{4}R \pm \frac{5R - 2v}{12R - 4v}x$, diſtantia Centri gravitatis pyramidis à (plano Tangente) $\tau\alpha$. Hoc eſt (propter $x = R - v$, ſupra Centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm x = R - v$,) $\frac{3}{4}R + \frac{5R^2 - 7vR + 2v^2}{12R - 4v} = \frac{7R^2 - 5vR + v^2}{6R - 2v} = \frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$. Atque hæc diſtantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc eſt, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ exhibet Pyramidis illius reſpectu $\tau\alpha$, momentum $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{12}sR = \frac{7}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc demum momentum, ſubductum ex momento Ungulæ Sectori $B\alpha A$ inſiſtentis, (aciem item habentis $\tau\alpha$) reſpectu ipſius $\tau\alpha$; hoc eſt (ut § W.) ex $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; relinquit momentum Ungulæ Sectori BCA inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{19}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. (Semiſolidique correſpondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Ungulæ (ipſi BCA inſiſtentis momentum, per

per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) divisum, exhibet ejusdem Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, Fig. 159, 160.
$\frac{15aR + 19sR - 3sv}{12a + 8s}$. (Adeoque Semisolidi correspondentis, Centri gravitatis inde distantiam, $\frac{15aR + 19sR - 3sv}{3aP + 2sP}R$; utpote ad illam Ungulæ, ut 4 R ad P.) Et propterea distantia Centri gravitatis Ungulæ, à T A, $\frac{9aR - 3sR + 3sv}{12a + 8s}$; Ungulæque istius (Sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$,) momentum respectu T A, $\frac{1}{4}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. (Quod Semisolido facile accommodabitur.)

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo B Cα incumbentis, magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$, (ut dictum est,) adeoque à T A, $\frac{R^2 - vR + s^2}{6R - 2v}$; erit ejusdem, respectu T A, momentum $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Quod quidem momento Ungulæ sectori BαA incumbentis (aciem habentis $\tau\alpha$) respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, (ut § W.) sublatum; relinquit Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{1}{4}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi B Cα insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, idem planè habet respectu $\tau\alpha$ momentum, quod habet respectu T A ea quæ aciem habet $\tau\alpha$; (propter altitudines & Distantias ubique reciprocatas, ut pridem Aliquoties:) Hoc est, (ut modo ostensum est) $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; quod per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) divisum; exhibet sui Centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$ $\frac{5R^2 - vR + s^2}{6R + 2v}$; Adeoque, à T A, $\frac{7R^2 + 5vR - s^2}{6R + 2v}$; & propterea ejusdem respectu T A (aciei suæ) momentum $\frac{7}{12}sR^3 + \frac{5}{12}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ (Solidique correspondentis momentum est hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ momenta, momentis respectivis Ungulæ sectori BαA insistentis, aciem habentis T A, (hoc est, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, resp. $\tau\alpha$; & resp. T A, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; ut § W.) sublata; relinquunt Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A,

Fig. 159, 160. aciem habens $\tau\alpha$, est Pyramis: Cujus vertex α; Basis, Trapezium rectæ BC insistens, duabus rectis plano circuli perpendicularibus & invicem parallelis interjectum; quarum altera, puncto C insistens, æqualis est rectæ $C\alpha = R$; altera, insistens puncto B, æqualis rectæ $V\alpha = h$; quas itaque, in planum replicatas, repræsentant rectæ $C\alpha$, Ba. Quod quidem Trapezium, (quo Centrum gravitatis habeatur,) dirimi intelligatur in duo Triangula αBC, αBa. Quæ (propter communem altitudinem αa seu $BV = s$,) sunt ut bases $C\alpha$, Ba; hoc est $C\alpha$, $V\alpha$; seu, R, h: Puta $\frac{1}{2}sR$, $\frac{1}{2}sh$. Distatque illius Centrum gravitatis ab $A\alpha$ (rectâ planove) $\frac{1}{3}VB = \frac{1}{3}s$; hujus vero, $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$. Erúntque, propterea, eorum momenta respectu $A\alpha$, ut $\frac{1}{6}s^2R$, $\frac{1}{3}s^2h$. Adeoque momentum totum $\frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{3}s^2h$, per totam magnitudinem $\frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ divisum, exhibet totius Trapezii distantiam Centri gravitatis, quod puncto β designatum intelligatur (toto scilicet Trapezio, in rectam cui insistit, BC projecto,) ab $A\alpha$ $\frac{s^2R + 2s^2h}{3sR + 3sh} = \frac{R + 2h}{3R + 3h}s = \beta\gamma$. Adeoque (propter similia Triangula BVC, $\beta\gamma C$,) ut $BV = s$, ad $VC = x$; sic $\beta\gamma$, ad $\gamma C = \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Et $\gamma\alpha = R \pm \frac{R + 2h}{3R + 3h}x$. Sumptâque $\alpha g = \frac{3}{4}\alpha\beta$, (ductâque, ut $\beta\gamma$, sic gG, ipsi $\tau\alpha$ parallelâ,) erit $\alpha G = \frac{3}{4}\alpha\gamma = \frac{3}{4}R \pm \frac{R + 2h}{4R + 4h}x = \frac{3}{4}R \pm \frac{5R - 2v}{12R - 4v}x$, distantia Centri gravitatis pyramidis a (plano Tangente) $\tau\alpha$. Hoc est (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; vel $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum; adeoque $\pm x = R - v$,) $\frac{3}{4}R + \frac{5R^2 - 7vR + 2v^2}{12R - 4v} = \frac{7R^2 - 5vR + v^2}{6R - 2v} = \frac{7R^2 - 3vR - s^2}{6R - 2v}$. Atque hæc distantia, in Pyramidis magnitudinem ducta, hoc est, (per § M. prop. præced.) in $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$ exhibet Pyramidis illius respectu $\tau\alpha$, momentum $\frac{7R^2 - 3vR - s^2}{12}sR = \frac{7}{12}sR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$. Atque hoc demum momentum, subductum ex momento Ungulæ Sectori $B\alpha A$ insistentis, (aciem item habentis $\tau\alpha$) respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est (ut § W.) ex $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{8}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; relinquit momentum Ungulæ Sectori BCA insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu ipsius $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{11}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$. (Semisolidique correspondentis momentum, hujus duplum.) Quod quidem Ungulæ (ipsi BCA insistentis momentum,

per

per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) divisum, exhibet ejusdem Centri gravitatis distantiam à τα, $\frac{15aR+19sR-3sv}{12a+8s}$. (Adeoque Semisolidi correspondentis, Centri gravitatis inde distantiam, $\frac{15aR+19sR-3sv}{3aP+2sP}R$; utpote ad illam Ungulæ, ut 4 R ad P.) Et propterea distantia Centri gravitatis Ungulæ, à T A, $\frac{9aR-3sR+3sv}{12a+8s}$; Ungulæque istius (Sectori B C A insistentis, aciem habentis τα,) momentum respectu T A, $\frac{1}{4}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. (Quod Semisolido facile accommodabitur.) Fig. 159, 160.

Aut etiam, propter Pyramidis illius, Triangulo B C α incumbentis, magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR$; Centrique gravitatis à τα distantiam $\frac{7R^2-3vR-s^2}{6R-2v}$, (ut dictum est,) adeoque à T A, $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R-2v}$; erit ejusdem, respectu T A, momentum $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$. Quod quidem momento Ungulæ sectori B α A incumbentis (aciem habentis τα) respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{14}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, (ut § W.) sublatum; relinquit Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis τα, momentum respectu T A, $\frac{1}{4}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Quæ vero Triangulo illi B C α insistit Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, idem planè habet respectu τα momentum, quod habet respectu T A ea quæ aciem habet τα; (propter altitudines & Distantias ubique reciprocatas, ut pridem Aliquoties:) Hoc est, (ut modo ostensum est) $\frac{5}{12}sR^3 - \frac{1}{12}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; quod per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{6}svR$ (ut § M. prop. præced.) divisum; exhibet sui Centri gravitatis distantiam à τα $\frac{5R^2-vR+s^2}{6R+2v}$; Adeoque, à T A, $\frac{7R^2+5vR-s^2}{6R+2v}$; & propterea ejusdem respectu T A (aciei suæ) momentum $\frac{7}{12}sR^3 + \frac{5}{12}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ (Solidique correspondentis momentum est hujus duplum.) Quæ quidem Ungulæ momenta, momentis respectivis Ungulæ sectori B α A insistentis, aciem habentis T A, (hoc est, $\frac{3}{8}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, resp. τα; & resp. T A, $\frac{5}{8}aR^3 + \frac{1}{24}sR^3 + \frac{7}{24}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; ut § W.) sublata; relinquunt Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A,

Fig. 159, 160. T A, momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}aR^3 - \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{8}svR^2$ (idem nempe quod Ungulæ eidem B C A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu T A; propter altitudines & diſtantias ubique reciprocatas;) & reſpectu (aciei ſuæ) T A, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{11}{24}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2$; (hujuſque duplum, eſt momentum correſpondentis Semiſolidi, reſpectu ſui axis converſionis:) Ungulæque hæc momenta, per magnitudinem $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{3}sR^2$ (ut § I. prop. præced.) diviſa; exhibent ejuſdem Centri grav diſtant. à $\tau\alpha$, $\frac{9aR - 5sR + 3sv}{12a - 8s}$; &, à TA, $\frac{15aR - 13sR - 3sv}{12a - 8s}$; (quæ, obſervatis obſervandis, Semiſolidis accommodari facile poterunt.)

Eadem haberi poterunt, ope Trianguli B V C, & Ungularum huic inſiſtentium.

Quæ autem huic inſiſtit Ungula ſemiquadrantalis, aciem habens D C; eſt Pyramis: Cujus vertex C, altitudo $CV = x$, Baſis (rectæ B V inſiſtens) $BV \times CV = sx$; adeoque pyramidis magnitudo $\frac{1}{3}sx^2$; Diſtantia Centri gravitatis à D C, $\frac{3}{4}x$; adeoque momentum Pyramidis reſpectu D C, $\frac{1}{4}sx^3$.

Si verò ponatur Ungulæ axis $\tau\alpha$, ſitque V ſupra Centrum; vel acies T A, ſitque V infra Centrum; Pyramidi huic ſubjungendum, eſt Priſma, ſuper eadem baſe, altitudinem habens $C\alpha$, vel CA, hoc eſt, R; cujus itaque (propter Trianguli magnitudinem $\frac{1}{2}sx$,) magnitudo erit $\frac{1}{2}sxR$; Centrique gravitatis à D C diſtantia (eadem quippe quæ Trianguli,) $\frac{2}{3}x$; adeoque momentum reſpectu DC, $\frac{1}{3}sx^2R$.

Totius itaque Ungulæ ipſi B V C triangulo inſiſtentis; aciem habentis $\tau\alpha$ vel T A, tangentem remotiorem; ex Priſmate & Pyramide conflatæ: momentum reſpectu D C, eſt, $\frac{1}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$.

Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}sxR + \frac{1}{3}sx^2$ diviſum, exhibet Centri gravitatis à D C diſtantiam $\frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; adeoque ab Ungulæ acie, ſeu tangente remotiore, (intellige, ut alibi, à perpendiculari plano huic inſiſtente,) $R + \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; à propiore, $R - \frac{4xR + 3x^2}{6R + 4x}$; Adeoque momentum reſpectu remotioris tangentis (aciei ſuæ) $\frac{1}{2}sxR^2 + \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; & reſpectu tangentis propioris (quæ aciei oppoſita eſt) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

Si vero ponatur Ungulæ acies $\tau\alpha$, & V infra Centrum; vel acies T A, & V ſupra Centrum; Priſmati auferenda eſt illa Pyramis, (ejuſque

(ejusque momento momentum hujus:) Adeoque Ungulæ magnitudo, Fig. 159, erit, $\frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}sx^2$; momentum respectu DC, $\frac{1}{3}sx^2R - \frac{1}{4}sx^3$; Cen- 160. trique gravitatis à DC distantia, $\frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; & ab Acie, seu tangente propiore; $R - \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$; à remotiore (quæ aciei opposita est) $R + \frac{4xR - 3x^2}{6R - 4x}$: Et momentum respectu aciei (seu tangentis propioris) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; & respectu tangentis oppositæ (remotioris) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$.

Hoc est: Ungulæ Triangulo BVC insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu ipsius $\tau\alpha$; est $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra infrave Centrum fuerit V:) Et respectu TA, $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$, (sive supra sive infra Centrum fuerit V, propter altitudinum & distantiarum reciprocationem.) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$, distantia, $R \pm \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$; &, à TA, $R \mp \frac{4xR \pm 3x^2}{6R \pm 4x}$.

Ungulæque eidem Triangulo BVC insistentis, aciem habentis TA; momentum respectu $\tau\alpha$ (oppositæ) $\frac{1}{2}sxR^2 - \frac{1}{4}sx^3$ (sive supra Centrum, sive infra, fuerit V punctum;) &, respectu Aciei suæ TA, $\frac{1}{2}sxR^2 \mp \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$, (prout supra Centrum infrave fuerit V punctum) Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ (opposita) distantia, $R \pm \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$; à TA (acie) $R \mp \frac{4xR \mp 3x^2}{6R \mp 4x}$.

Atque hæc momenta, momentis Ungularum (respective sumptarum) semisegmento BVA insistentium, Addita, vel Ablata, prout supra infrave Centrum fuerit V punctum; exhibent momenta respectiva Ungularum Sectori BCA insistentium.

Puta; Ungulæ Semisegmenti BVA, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3$ ($= \frac{5}{8}eR^3$) $+ \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; (ut § T.) si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit,) respectivum Ungulæ Trianguli BVC momentum, $\frac{1}{2}sxR^2 \pm \frac{2}{3}sx^2R + \frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (propter $x = R - v$, supra Centrum, addendum; & $x = -R + v$, infra Centrum, auferendum: adeoque $x^3 = R^3 - 3vR^2 + 3v^2R - v^3 = R^3 - vR^2 - s^2R + s^2v$, addendum; & $x^3 = -R^3 + 3vR^2 - 3v^2R + v^3 = -R^3 + vR^2 + s^2R - s^2v$, auferendum; quæ tantundem valent: Sed, $x^2 = R^2 - 2vR + v^2 = R^2 - s^2$; sitque vel $+x^2$ addendum, vel $-x^2$ auferendum, quod tantundem valet:) Si addatur $\frac{1}{12}sR^3 - \frac{1}{4}vR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$: Habetur

Fig. 159, 160. betur momentum Ungulæ sectori B C A insistentis, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}aR^3+\frac{19}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Atque ejusdem Ungulæ B V A (aciem habentis $\tau\alpha$) momentum respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3-\frac{1}{6}sR^3$ $(=\frac{1}{8}eR^3)$ $+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$ (ut § T.) si addatur vel auferatur (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{1}{4}sx^3$; Hoc est, (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{4}sR^3-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{4}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$: Habetur, Ungulæ sectori B C A insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{3}{8}aR^3-\frac{1}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

Ungulæque aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque illud aciem habentis $\tau\alpha$, respectu T A; propter altitudines & distantias ubique reciprocatas.

Ungulæ vero insistentis semisegmento illi B V A, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{5}{6}aR^3-\frac{1}{6}sR^3$ $(=\frac{5}{6}eR^3)$ $+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; si addatur, vel auferatur, (prout supra infrave fuerit V,) momentum correspondens Ungulæ B V C, $\frac{1}{2}sxR^2-\frac{2}{3}sx^2R+\frac{1}{4}sx^3$; Hoc est (ob causam modo dictam) si addatur $\frac{1}{12}sR^3-\frac{3}{4}svR^2+\frac{5}{12}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$: Habetur momentum Ungulæ Sectori B C A insistentis, aciem habentis T A, respectu ipsius T A, $\frac{5}{6}aR^3-\frac{13}{24}sR^3-\frac{1}{8}svR^2$. Ut prius.

V. Denique: Ex momentis eisdem Ungularum Semisegmento B V A insistentium, si auferantur respectiva momenta insistentium Triangulo B A V; habentur momenta insistentium Segmento A B A.

Quæ autem Triangulo B A V insistit Semiquadrantalis Ungula, aciem habens T A; est Pyramis. Cujus vertex A, basis $BV \times VA = sv$; altitudo $AV = v$; adeoque magnitudo $\frac{1}{3}sv^2=\frac{2}{3}svR-\frac{1}{3}s^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{4}v$; adeoque a $\tau\alpha$, $2R-\frac{1}{4}v$: Et propterea momentum respectu T A, $\frac{1}{4}sv^3=svR^2-\frac{1}{2}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}sv^2R-\frac{1}{4}sv^3=\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$.

Hæc itaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, $(\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{8}svR^2-\frac{5}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{1}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$, per § T.) subducta; relinquunt, Ungulæ segmento A B A insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{3}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$: Et (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2-\frac{1}{6}svR$, ut § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis a T A, erit $\frac{15eR^2-9svR+2s^3}{12eR-4sv}$; & a $\tau\alpha$, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR-4sv}$.

Quæque

PROP

Quæc
habens
cujus aci
procatas
(propter

præced.)

& à $r\alpha$,

$\frac{4}{3}svR^2+$
Eaque
BVA in
& $\frac{5}{8}eR^3+$
Ungulæ S
respectu
$+\frac{1}{24}svR$
per § N.
$\frac{9eR^2+sv}{12eR+}$
Eademq
quæ Segm
substituend
Puta;
habens $r\alpha$
$-\frac{5}{6}sR^2+$
$+\frac{1}{12}s^3R=$
$\frac{3}{8}eR^3-\frac{3}{8}s$
$-\frac{1}{12}s^3R.$
Et; Seg
bens T A,
$-\frac{5}{6}sR^2$
$+\frac{1}{24}shR^3.$
respectu T
$-\frac{1}{24}sR^3-$

Exhibui
Segmentor
tium Solid
nitudines,

Quæque Triangulo B A V insistit semiquadrantalis Ungula, aciem habens τα; idem habet respectu T A momentum, quod habet ea cujus acies T A respectu τα; (propter altitudines & distantias reciprocatas:) hoc est, (ut modo) $\frac{1}{3}svR^2-\frac{1}{6}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$: Adeoque (propter magnitudinem $svR-\frac{1}{3}sv^2=\frac{1}{3}svR+\frac{1}{3}s^3$, per § N. prop. præced.) distantia Centri gravitatis à T A, erit $\frac{4vR^2-2s^2R+3s^2v}{4vR+4s^2}$; & à τα, $\frac{4vR^2+10s^2R-3s^2v}{4vR+4s^2}$; ideoque momentum respectu τα, $\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{4}s^3v=2svR^2-\frac{4}{3}sv^2R+\frac{1}{4}sv^3$. Fig. 159, 160.

Eaque momenta, momentis respectivis Ungulæ Semisegmento B V A insistentis, aciem habentis τα, ($\frac{3}{8}eR^3+\frac{3}{8}svR^2-\frac{1}{4}s^3R+\frac{1}{4}s^3v$, & $\frac{5}{8}eR^3+\frac{5}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R-\frac{1}{4}s^3v$, ut § T.) subducta; relinquunt Ungulæ Segmento A B A insistentis, aciem habentis τα, momentum respectu T A, $\frac{3}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; &, respectu τα, $\frac{5}{8}eR^3+\frac{1}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$; & (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{6}svR$; per § N. propositionis præced.) Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{9eR^2+svR-2s^3}{12eR+4sv}$; & à τα, $\frac{15eR^2+7svR+2s^3}{12eR+4sv}$.

Eademque Segmento α B α respectu rectæ τα, accommodantur, quæ Segmento A B A respectu T A; & vice versa. (Nempe, pro a, substituendo $\alpha=\frac{1}{2}P-a$; & pro v, substituendo $h=2R-v$.

Puta; Segmento α B α insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens τα, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2-\frac{1}{6}shR=\frac{1}{4}R^2P-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{6}sR^2+\frac{1}{6}svR$: Momentum respectu τα, $\frac{5}{8}\alpha R^3-\frac{5}{8}sR^3-\frac{1}{8}shR^2+\frac{1}{12}s^3R=\frac{5}{16}R^3P-\frac{5}{8}aR^3-\frac{7}{8}sR^3+\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$ respectu T A, $\frac{3}{8}\alpha R^3-\frac{3}{8}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{3}{16}R^3P-\frac{3}{8}aR^3-\frac{7}{24}sR^3-\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$.

Et; Segmento α B α insistens Semiquadrantalis Ungula aciem habens T A, magnitudinem habet $\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{1}{2}sR^2+\frac{1}{6}shR=\frac{1}{4}R^2P-\frac{1}{2}aR^2-\frac{1}{6}sR^2-\frac{1}{6}svR$: Momentum respectu τα, $\frac{3}{8}\alpha R^3-\frac{3}{8}sR^3+\frac{1}{24}shR^2-\frac{1}{12}s^3R=\frac{3}{16}R^3P-\frac{3}{8}aR^3-\frac{7}{24}sR^3-\frac{1}{24}svR^2-\frac{1}{12}s^3R$; & respectu T A, $\frac{5}{8}\alpha R^3-\frac{5}{8}sR^3+\frac{7}{24}shR^2+\frac{1}{12}s^3R=\frac{5}{16}R^3P-\frac{5}{8}aR^3-\frac{1}{24}sR^3-\frac{7}{24}svR^2+\frac{1}{12}s^3R$.

Exhibuimus itaque, expositorum Sectorum Sphæricorum, & Z.
Segmentorum, Ungularumque eò spectantium, & correspondentium Solidorum seu Semisolidorum conversione factorum, tum magnitudines, tum momenta respectu Planorum aliquot expositorum; eorumque

Fig. 159, 160. eorumque Centrorum gravitatis distantiam à duobus saltem planis sibi invicem non parallelis; atque in quo tertio per Ungulæ aciem seu conversionis axem ducto, neutri priorum parallelo, idem reperiatur: Adeoque (per prop. 26. Cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinavimus.

Quæque ad calcem Propositionis præcedentis monuimus; etiam hic monenda erunt: Nempe, hæc omnia aliis Sphæræ portionibus, simili methodo accommodari posse. Puta, quæ de Sectore B α A (ad verticem terminato) ejusque Ungulis, &c. dicta sunt; facile accommodari posse sectori D α B (duorum ad verticem terminatorum D α A, B α A, differentiæ,) ejusque Ungulis &c.

Et, prout hic quæ de Ungularum aut Solidorum magnitudinibus & momentis docentur, à recta τ α, ad T A vel B V, transferuntur; simili methodo, hæc aut his similia, à recta A α, ad T τ vel B β, transferri poterunt. Aliaque quæ hic traduntur, mille modis ampliari.

Quæque de Ungulis Semicirculi, ejusve portionibus; Sphæræque, & portionibus hujus; dicta sunt; ad Ungulas Semiellipseos, & portionum hujus; Sphæroides hujusque portiones; facile accommodantur. Nempe si intelligatur axium ellipseos alter A α, alter D Δ: manente $A\alpha = 2R$, (adeoque $AV = v$, $V\alpha = h$;) erit D Δ in ea ratione ad 2 R, quâ est ad A α; majore quidem si sit D Δ axium major, (adeoque Sphæroides conversione descriptum, Sphæroides latum;) minore, si sit D Δ axium minor, (adeoque Sphæroides longum, conversione descriptum:) & B V, in eadem ratione ad s. Adeoque, quoties B V in calculum venit; pro s, substituenda erit alia quantitas, quæ sit ad hanc, ut est D Δ ad A α: &, pro s^2, alia quæ sit ad hanc, ut in duplicatâ ratione rectæ D Δ ad A α: & in reliquis potestatibus similiter, mutatis mutandis.

PROP.

PROP. XVII.

PARS PRIMA.

Figura *Sinuum Verſorum*, ut A τ α; (quæ eadem eſt & Figura *Arcuum:*) Eſt Semicirculi correſpondentis *Dupla*; & partes, partium (reſpective ſumptarum,) *Duplæ*; Puta, b β a A = 2 B α A. Et ſic ubique. A. Fig. 169, 170.

Momenta verò illorum, ad momenta horum, reſpectu ejuſdem τ α tangentis, ſunt ut 3 ad 2 ſeu *ſeſquialtera*. C.

Atque hinc, eadem reſpective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in hac Sinuum Verſorum Figura; quæ ſupra in Semicirculo (prop. 15.) determinantur. Nempe; (retentis Symbolis ut in propoſitionibus præcedentibus.)

Trilinei A τ α; Magnitudo $\frac{1}{2}RP$: Momentum reſpectu τα, $\frac{1}{8}R^2P$; reſpectu T A, $\frac{5}{8}R^2P$; Diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R$; à T A, $\frac{5}{4}R$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$; reſpectu T τ, $\frac{1}{8}RP^2+2R^3$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P-\frac{4R^2}{P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P+\frac{4R^2}{P}$. B. C. G.

Portionis b β α A; Magnitudo, fR: Momentum reſpectu τα, $\frac{1}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR$; reſpectu T A, $\frac{5}{4}fR^2-\frac{1}{4}shR$; Diſtantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R+\frac{sh}{4f}$; à T A, $\frac{5}{4}R-\frac{sh}{4f}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$; re- B. D. H.

Fig. 169, 170. respectu b β; $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{a^2+2as-2vR}{2a+2s}$; à b β, $\frac{a^2+2vR}{2a+2s}$.

B. E. Portionis A b K; Magnitudo, eR: Momentum respectu T A, $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$; respectu τ α, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Distantia Centri gravitatis, à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{sv}{4e}$; à τ α, $\frac{1}{4}R$

H. $+\frac{sv}{4e}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; respectu β b K, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{a^2-2as+2vR}{2a-2s}$; à β b K, $\frac{a^2-2vR}{2a-2s}$.

B. E. Portionis b β τ; Magnitudo, $\alpha R - sR$: Momentum respectu τ α, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; respectu T A, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; Distantia Centri gravitatis à τ α,

H. $\frac{1}{4}R - \frac{sh}{4\alpha - 4s}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{sh}{4\alpha - 4s}$: Momentum respectu τ T, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$ respectu β b, $\frac{1}{2}\alpha^2R - hR^2$; Distantia Centri gravitatis à τ T, $\frac{\alpha^2 - 2\alpha s + 2hR}{2\alpha - 2s}$; à β b, $\frac{\alpha^2 - 2hR}{2\alpha - 2s}$.

B. F. Parallelogrammi b B α β; magnitudo, $ah = 2aR - av$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{2}h$; à T A, $2R - \frac{1}{2}h$; Momentum respectu τ α, $\frac{1}{2}ah^2$; respectu T A, $2ahR$

I. $-\frac{1}{2}ah^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$. Distantia Centri gravitatis ab A α, seu b β, $\frac{1}{2}a$; momentum respectu A α, vel b β, $\frac{1}{2}a^2h$.

B. F. Portionis b B A, Magnitudo $fR - ah = -eR + av$: Momentum respectu τ α, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$; respectu T A, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à b B, $v - \frac{1}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; Momentum

mentum respectu bB, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$: Momentum respectu Aα, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; respectu bβ, $-\frac{1}{2}s^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R$; à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR - as}{-2eR + 2av}R$. I. Fig. 169, 170.

Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Versorum, arcuumve, ejusque partium expositarum magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum, eorumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias; adeoque & ipsa Centra gravitatis, per eorundem à duabus saltem in eodem plano non parallelis rectis, determinavimus.

Atque hinc Ungularum, & Solidorum conversione factorum, horumve Semisolidorum, momentis jam traditis correspondentium, magnitudines habentur. Horumque omnium rationes, ad his correspondentia Semicirculum ejusve portiones spectantia. Quæ & ad alia facile poterunt ampliari. K.L.R.

PARS SECUNDA.

Atque his Analoga, in Figura *Sinuum Rectorum* ατκ, similiter determinantur. Nempe, M. Fig. 170.

Bilinei ατκ, magnitudo, $2R^2$; momentum respectu τα, $\frac{1}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{16}P$; à Tτ vel Aα, $\frac{1}{4}P$; momentum respectu Tτ, vel Aα, $\frac{1}{2}R^2P$.

Trilinei αδκ; magnitudo, R^2; Momentum respectu τα, $\frac{1}{16}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{16}P$: Momentum respectu Aα, R^3; respectu δκ, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, R, à δκ, $\frac{1}{4}P - R$. N,Q. P,Q.

Portionis αβυ, magnitudo vR; Momentum respectu τα, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Distantia Centri gravitatis ab τα, O,Q.

eR

P, Q. Fig. 169, 170. $\frac{eR+sv}{4v}$: Momentum respectu $A\alpha$, $-eR^2+avR$; respectu $\beta\upsilon$, eR^2; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-eR+av}{v}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{eR}{v}$.

R. Adeoque determinavimus, totius Figuræ Sinuum Rectorum, ejusque partium expositarum, magnitudines, & momenta respectu rectarum aliquot expositarum; eorumq; Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis: Adeoque & ipsa gravitatis Centra, per suas à duabus saltem in eodem plano rectis non sibi mutuo parallelis distantias, determinavimus.

Atque huic de Ungulis; Solidisve conversione factis, eorúmve Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo debite adhibito, judicium fiet.

Quæque de portionibus hic expositis dicta sunt, possunt & aliis portionibus facile accommodari; aliásve multis modis ampliari.

Eademque (horum ope) ad $\alpha\kappa\Gamma$ figuræ Sinuum rectorum unius quadrantis Complementum facile transferetur.

S. Quæ autem de his Sinuum Versorum, Rectorumve, Figuris dicta sunt: ad easdem Protractas, vel Contractas, facile accommodantur.

T. Quæque de Figura Sinuum Rectorum unius quadrantis traduntur, eadem ad figuram Subtensarum sive Chordarum Semicirculi, similiter transferentur. Quod & de Solidis inde oriundis etiam intelligendum erit.

A. Fig. 169, 170. INtelligatur Circuli $A\alpha$, (Fig. 169.) Semiperipheria $AD\alpha$, in partes quotlibet æquales dividi, in punctis X, Z, D, E, &c. unde ducantur XO, ZV, DC, EΣ, &c. Sinus Recti arcuum arithmetice proportionalium, AX, AZ, AD, AE. &c, quorum Sinus Versi AO, AV, AC, &c. adeoque arcuum residuorum ad Semicirculum

circulum Sinus versi (seu punctorum X, Z, D, &c. altitudines supra Fig. 169,
τα, tangentem,) O α, V α, C α, &c. 170.

Eique Semiperiphæriæ in rectam expansæ, æqualis ponatur (Fig. 170.) A T, seu α τ, similiter divisa, in punctis ξ, ζ, δ, ε, &c. quibus insistant ex una parte,) ξ o, ζ v, δ x, &c. ipsis X O, Z V, D C, &c. (Fig. 160.) æquales; figuram Sinuum Rectorum α n τ (si numero infinitæ intelligantur) complentes, (juxta def. 1. Cap. 4.) & (ex parte contraria) ipsis O α, V α, C α, &c. æquales rectæ x ξ, z ζ, d δ, &c. similiter complentes A τ α figuram Sinuum versorum; ipsi A α circulo æquealtam.

Quæ quidem A τ α *Figura Sinuum versorum*, sumptis arcubus arithmetice proportionalibus; est etiam, alia consideratione, *Figura Arcuum*, sumptis nempe Sinubus Versis arithmetice proportionalibus. Sumptis utique A V, A C, A Σ, &c. Sinubus versis arithmetice proportionalibus; (divisa sc recta A α in partes quotlibet æquales) quæ ipsis occurrant rectæ Z V, d C, e Σ, &c. æqualibus intervallis dissitæ figuram A τ α complentes; hoc est, α ζ, α δ, α ε, &c. æquantur arcubus correspondentibus, A Z, A D, A F, &c. & sic ubique.

Ductis jam in Semicirculo rectis X α, Z α, D α, &c. dirimi intelligatur Semicirculus in totidem Sectores A α X, X α Z, Z α D, &c. quorum arcus A X, X Z, Z D, &c. sint æquales; adeoque sectorum X α A, Z α A, D α A, &c. arcus X A, Z A, D A, &c. arithmetice proportionales.

Quibus quidem arcuum æqualium Sectoribus A α X, X α Z, Z α D, &c. respondeant, in figura Sinuum versorum, quadrilatera A α ξ x, X ξ ζ z, z ζ δ d, &c. basium α ξ, ξ ζ, ζ δ, &c. æqualium, tum inter se, tum ipsis A X, X Z, Z D, &c. arcubus; (propter rectam α τ, Semiperipheriæ A D α, æqualem, & similiter divisam.) Adeoque arcuum arithmeticè proportionalium Sectoribus, X α A, Z α A, D α A, &c. similiter respondebunt quadrilinea x ξ α A, z ζ α A, d δ α A, basium arithmetice proportionalium α ξ, α ζ, α δ, &c.

Suntque hæc Quadrilinea, Sectorum illorum, (Singula singulorum respectivè sumptorum,) dupla. Quod sic ostenditur.

Intelligatur vel tota A D α Semiperipheria, vel ipsius arcus A B, in partes æquales numero infinitas dirimi; adeoque (ductis à divisionum punctis ad α rectis X α, Z α, &c.) vel totus A D α Semicirculus, vel ipsius Sector B α A, in totidem Sectores dirimi. Ductisque, à divisionum punctis, rectis X D, Z P, &c. tangenti τ α parallelis. intelligatur Sectori Inscribi figura ex totidem Triangulis, O X α, P Z α, &c. Ductisque porro eidem tangenti parallelis, A Q, X I, &c. (productisque α X, α Z, &c.) similiter intelligatur Sectori Circumscribi figura ex Triangulis A Q α, X Γ α, &c.

Et

Fig. 169, 170. Et similiter Figuræ Sinuum versorum $A\tau\alpha$, vel tota, vel ipsius portio $b\beta\alpha A$, (Sectori $B\alpha A$ correspondens) in totidem Quadrilinea, basium æqualium, (Sectoribus correspondentia) distribui; (rectâ scilicet $\alpha\tau$, vel $\alpha\beta$ similiter divisâ, prout dividitur $AD\alpha$, vel AB, arcus; ductisque rectis correspondentibus, ξx, ζz, &c.) Ductisque xO, zp, &c. ipsi $\tau\alpha$ parallelis; inscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Ox\xi\alpha$, $pz\zeta\xi$, &c. (Triangulis $OX\alpha$, $PZ\alpha$, &c. correspondentibus.) Ductisque eidem $\tau\alpha$ parallelis Aq, xi, &c. (productisque ξx, ζz, &c.) Circumscribi intelligatur Figura ex Parallelogrammis $Aq\xi\alpha$, $xi\zeta\alpha$, &c. (Triangulis $AQ\alpha$, $Xl\alpha$, &c. correspondentibus.)

Suntque hæc Parallelogramma Triangulis illis, (propter rectas $A\alpha$, $x\xi$, $z\zeta$, &c. ipsis $A\alpha$, $O\alpha$, $V\alpha$, &c. ex constructione æquales,) singula singulis respective sumptis, æquealta: Tum quæ Circumscriptas, tum quæ Inscriptas figuras complent.

Sunt autem Inscriptorum Parallelogrammorum Bases, basibus Triangulorum inscriptorum correspondentium, ubique majores; & propter Parallelogramma Triangulorum, (singula singulorum respective, adeoque & omnia omnium,) plusquam dupla. Est utique Parallelogrammi $Ox\xi\alpha$, basis xo, seu $\xi\alpha$ recta, hoc est (utpote ipsi æqualis ex constructione) arcus XA, major sinu suo Xo (base Trianguli correspondentis;) ut patet. In reliquis autem; ut $pz\zeta\xi$; Parallelogrammi basis zp, seu $\zeta\xi$, recta; (æquali, arcui ZX, ex constructione,) est major quam ZX chorda: sed & hæc major est, quam ZP, basis triangulis correspondentis $PZ\alpha$; propter angulum ZPX (Trianguli PZX) illi oppositum majorem angulo huic opposito ZXP. Est enim angulus ZPX, vel huic æqualis PXO, hoc est, αXO, angulus in Peripheriâ arcum subtendens (in opposito Semicirculo) æqualem arcui $X\alpha$; & angulus ZXP, hoc est, $ZX\alpha$, angulus item in Peripheriâ, subtendens arcum $z\alpha$, (arcu $X\alpha$ minorem;) est igitur angulus PXO, hoc est angulus ZPX, major angulo ZXP; adeoque ZX recta, major rectâ ZP; & multo magis ZX Curva, seu huic æqualis $\zeta\xi$ seu zp basis parallelogrammi, major erit quam eadem ZP basis Trianguli: adeoque parallelogrammum Trianguli plusquam Duplum. Et sic ubique. Itaque Figura ex Parallelogrammis, sive toti Figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni $Az\zeta\alpha$ inscripta plusquam dupla Figuræ ex Triangulis inscriptæ sive toti Semicirculo, sive Sectori $B\alpha A$.

Sed Circumscriptorum Parallelogrammorum bases, Basibus Triangulorum circumscriptorum correspondentibus, minores sunt. Est enim

enim Parallelogrammi A q ξ α, basis A q seu ξ α, hoc est arcus X A, Fig. 169,
minor Tangente Q A; (cujus semissis, est tangens semiarcûs, 170.
secanti ex Centro ductæ occurrens: adeoque semiarcu illo major.)
In reliquis vero, ut x i ζ ξ; Basis Parallelogrammi x i, seu ξ ζ; hoc
est arcus Z X, minor est quam recta X I, basis Trianguli correspondentis. Ducta enim tangente Z χ, (quæ rectæ X I occurrat in χ,) æquales erunt anguli (propter eundem arcum Z A interceptum) χ Z A, & Z α A (angulus in peripheria) seu I α O: adeoque & horum ad rectum residui χ Z I & χ I Z seu O I α; (est utique, propter A Z α angulum in semicirculo, etiam A Z I, hoc est χ Z A + χ Z I, rectus; &, propter I O α triangulum rectangulum, ad O, duo reliqui anguli O I α + I α O rectum æquant.) Et propterea æquales sunt Z χ & I χ rectæ; & (sumpta communi χ X,) recta I X, hoc est I χ + χ X, æqualis duabus simul Z χ + χ X; adeoque major arcu Z X. Est itaque Z X arcus, hoc est recta ζ ξ, seu i x, basis Parallelogrammi, minor quam I X basis Trianguli correspondentis: Et propterea Parallelogrammum Trianguli minus quam Duplum. Et sic ubique. Est itaque Figura ex parallelogrammis, sive toti A τ α figuræ Sinuum versorum, sive ipsius portioni b β α A, circumscripta, minor quam Dupla Figuræ ex Triangulis correspondentis, sive toti Semicirculo, sive ejusdem Sectori B α A circumscriptæ.

Cum itaque Figura ex Parallelogrammis inscripta, sit inscriptæ ex Triangulis major quam dupla; & circumscripta circumscriptæ minor quam dupla: Cumque, multiplicatis sectionibus, inscriptæ & circumscriptæ differentia continuè decrescat utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta inscriptæ minor quam dupla, nec Circumscripta circumscriptæ major quam dupla esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; inscriptis simul & circumscriptis coincidentibus; illic, cum Figura A τ α, ejusve Quadrilineo b β α A; hic, cum Semicirculo A D α, ejusve Sectore B α A: Eritque illa Sinuum versorum Figura A τ α, ejusve Portio b β α A; Dupla semicirculi A D α, ejusve Sectoris B α A. Quod erat probandum.

Hoc est; Trilineum A τ α, duplum semicirculi A D α; ejusque portio b β α A, dupla Sectoris B α A; Et, propterea, portio reliqua b β τ, segmenti α B α, dupla erit. Item, d δ ξ x, dupla Sectoris correspondentis D α X; & sic ubique.

Est autem, (retentis symbolis, ut in propositionibus duabus proxime præcedentibus,) Semicirculus A D α $= \frac{1}{4} PR$; ergo, Figura B.

Pp Sinuum

Fig. 169 170. Sinuum versorum seu Trilineum A $\tau\alpha = \frac{1}{2} PR$. Item Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}fR$, (per § H. prop. 15.) Ergo, (posita αβ = BA = a; adeoque β B = αV = b; & bK = VA = v;) portio bβαA (utpote Sectoris dupla) $aR + sR = fR$. Item, Segmentum ABA $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}eR$ (per § G. prop. 15.) Ergo AbK $= aR - sR = eR$. (Est utique AzK: simile, & similiter positum ad TA, ut τeε ad τα: sicut &, in Semicirculo, Segmentum AZA ad TA, ut αEα ad τα: & sic alibi.) Et similiter Segmentum αBα $= \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}PR - \frac{1}{2}fR$: Ergo portio bβτ $= aR - sR = \frac{1}{2}PR - aR - sR = \frac{1}{2}PR - fR$. Et sic alibi.

Et consequenter; si ex bβαA portione, auferatur Parallelogrammum βbBα $= ab = 2aR - av$; erit Segmentum residuum AbB $= fR - ab = -aR + sR + av = -eR + av$. Et speciatim in segmento AdC, (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) R^2.

Item Quadrilineum zkCA = zζαA − kζαC (propter zζαA $= aR + sR$, & kζαC $= aR$) est sR. Et zkd $= R^2 - sR$; Nempe, (propter $R - s$, differentiam Radii & Sinus recti arcûs ZA, æqualem sinui verso arcûs ZD,) factum ex sinu verso arcus DZ in Radium ducto. (Dico autem zkCA; potius quam bkcA, ut distinguam punctum b supra Centrum, ab illo infra Centrum. Quamquam & alteri etiam b, re rite intellectâ, idem accommodabitur: Nempe, si dkb infra Centrum hoc est dke, exponatur negative, utpote ad contrarias partes rectæ Cdc & extra figuram Aτα: Quippe sic, utrovis situ, erit bβαA − kβαC = bkCA; id quod rectis bk, kC, CA, & curvâ Ab, comprehenditur; nempe, utrobique, AdC − dkb, sensu positivo.)

Et similiter de aliis portionibus utcunque rectâ abscissis, mutatis mutandis, fiet judicium.

Poteſtque Trilinei AbB seu AbV fig. 170. (quod utique complent rectæ bV æquales arcubus BA $= a$, quorum Sinus versi AV $= v$ sint arithmetice proportionales) magnitudo, sic alias (ex arcuum ad sinus versos ratione) explicari.

Ductis enim (ut fig. 186.) BgT Semicirculum tangentibus,

Fig. 186. (Tangenti verticis TA in T occurrentibus;) divisaque Aα diametro in partes æquales infinite exiguas, quarum una intelligatur Vo $= B$; (adeoque sumptis AV $= v$, arithmetice proportionalibus;) ductaque recta oXg (rectæ BV parallelâ) quæ semicirculo in X occurrat, & tangenti proximæ BT in g: Erit ubique (per § A. propositionis 13.) ut BV $= s$, ad R; sic Vo $= B$, ad Bg $= \frac{BR}{}$

$\frac{BR}{s}$. (Nempe, ut *Secantes complementi*, Sinibus rectis reciproce proportionales.) Et, consequenter; si intelligantur αO, vel V O, rectangulum A α O O complentes, singulis V o (rectam A α complentibus) æquales; & sumantur ubique, ut B V = *s*, ad *R*; sic VO, ad V ω: erunt singulæ V ω, (hoc est totidem $\frac{BR}{s}$, sumptis *v* arithmetice proportionalibus,) singulis B g tangentibus (respective sumptis,) hoc est, (in partibus infinite exiguis,) ipsis B X arcubus (totum B A complentibus) æquales. Adeoque, ut *Omnes* $\frac{BR}{s}$, seu rectæ V ω, complentes A V ω ω figuram interminabilem; ad *totidem B*, complentes A V O O rectangulum; (seu ut Figura illa, ad hoc rectangulum;) sic *omnes* B X arcum B A complentes, ad *totidem* V o complentes rectam V A; seu Arcus A B, ad ejusdem sinuum versum A V.

Cumque hoc ubique obtineat; erunt, *Omnes* A B arcus (superficialem Ungulam Semiquadrantalem B A, cujus acies B V, complentes,) vel (his æquales) rectæ b V trilineum A b V complentes; ad *omnes* A V respectivos sinus versos arithmetice proportionales vel A V Semiquadrantalem Ungulam aciem habentem V, hoc est, ad Semiquadratum A V; ut sunt *omnes* A V ω ω figuræ interminabiles correspondentes, hoc est, Ungula A V ω ω aciem habens V ω; ad *omnes* A V *O O*, hoc est, Ungulam A V O O aciem habentem VO.

(Et, eadem ratione; Momentum superficialis istius Ungulæ, arcui B A insistentis, ad momentum istius superficialis Ungulæ seu Semiquadrati A V, respectu ejusdem b V B; ut ejusdem Ungulæ solidæ A V ω ω momentum, ad momentum correspondentis Ungulæ Solidæ A V O O, respectu aciei V ω. Et similiter ejusmodi aliæ solidorum portiones huc spectantium, facile exhibentur)

Verum, cum præcedens illa figuræ A τ α consideratio, sit calculo magis accommoda, quam hæc figuræ interminabilis, (*Secantium complementi*, sinibus versis arithmetice proportionalibus convenientium:) priorem potius prosequemur. Atque inde, si opus fuerit, interminabilis hujus figuræ dimensio, reliquaque quæ eo spectant, deduci poterunt. Quod hic sufficiat innuisse.

Porro; Si intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. Cap. 4) ex infinitis numero Sectoribus constitutis ut A α X, X α Z, &c. vel C.

Fig. 169, 170. etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet,) ex infinitis numero Triangulis, figuram inscriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. sive, ex totidem Triangulis figuram circumscriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c. aut etiam figuram inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α X, α Z, &c. ut illorum axibus repræsententur:) Intelligenda erit similiter Figura Sinuum versorum A τ α, ex totidem constitui correspondentibus Quadrilineis ut A α ξ x, x ξ ζ z, &c. Sectorum illorum duplis; vel etiam (quod eodem recidit, sectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Parallelogrammis, figuram inscriptam complentibus, ut X x ξ α, p z ζ ξ; &c. aut circumscriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inscriptam partim circumscriptam complent, qualia p y δ ξ, &c. (quæ rectis x ξ, z ζ, &c. ut eorum axibus repræsententur; quæ triangulorum æquealtorum α X, α Z, &c. dupla intelligantur.)

Est autem Distantia Centri gravitatis in Parallelogrammis ξ x, ζ z, &c. ad Distantiam Centri gravitatis in Triangulis æquealtis, α X, α Z, &c. (à recta τ α;) ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{2}{3}$; seu, ut 3 ad 4, (per prop. 6. hujus:) Adeoque (propter magnitudines ut 2 ad 1;) Erunt momenta Parallelogrammorum (tum singulorum, tum simul omnium,) ad Triangulorum respectivorum momenta, (tum singulorum, tum simul omnium;) ut 3 ad 2, (propter $\frac{2}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$:) Adeoque Momentum Trilinei A τ α, ad momentum Semicirculi A D α; ejusque portionis, (ut A b β α, seu x ξ δ d, seu b β τ,) momentum, ad momentum sectoris correspondentis, (ut B α A, seu X α D, seu segmenti α B α,) respectu rectæ τ α; ut 3 ad 2.

Est autem Semicirculi A D α respectu τ α momentum (propter magnitudinem $\frac{1}{4}PR$, & Centri gravitatis distantiam, R,) $\frac{1}{4}R^2P$; ergo Trilinei A τ α, respectu τ α, momentum, (utpote ad illud Semicirculi, ut 3 ad 2,) $\frac{3}{8}R^2P$. (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}b^2$, seu $\frac{1}{2}v^2$ totius semicirculi, seu semisumma quadratorum sinuum versorum totius semicirculi, sumptis arcubus arithmetice proportionalibus.) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{2}PR$,) distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R$; ideoque à TA, $\frac{1}{4}R$; ejusque momentum respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$.

Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens τ α, $\frac{3}{8}R^2P$; & aciem habens TA, $\frac{1}{8}R^2P$: Solidumque ejusdem conversione circa τ α factum, $\frac{3}{8}RP^2$; & Semisolidum $\frac{3}{16}RP^2$: &, circa TA, Solidum $\frac{1}{8}RP^2$; & Semisolidum $\frac{1}{16}RP^2$.

Item;

Item; Sectoris B α A momentum respectu τα (per § M. prop. 15.) $\frac{1}{2}aR^2 + \frac{1}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}sbR$: Ergo, Portionis bβα A, momentum respectu τα, $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR$; (idemque est Ungula Semiquadrantalis, portioni bβα A insistens, aciem habens τα:) Adeoque (propter magnitudinem, $aR + sR = fR$,) distantia Centri gravitatis portionis bβα A, a τα, $\frac{1}{4}R + \frac{sb}{4f}$; & à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{sb}{4f}$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum (seu Semiquadrantalis Ungula,) $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}sbR$. Et consequenter, Solidum, portionis bβα A conversione circa τα factum, $\frac{1}{4}fRP + \frac{1}{4}bP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}fRP + \frac{1}{8}bP$: &, circa TA, Solidum $\frac{1}{4}fRP - \frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}fRP - \frac{1}{8}sbP$. D. Fig. 169, 170.

Item; Segmenti ABA, momentum respectu TA, (per § N. prop. 15.) est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}svR = \frac{1}{2}eR^2 - \frac{1}{6}svR$; ergo, Trilinei AbK momentum respectu TA (vel semiquadrantalis Ungula aciem habens TA,) est $\frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$: (Hoc est, omnia $\frac{1}{2}v^2$; seu semisumma quadratorum sinuum versorum arcuum arithmetice proportionalium, ab A, usque ad AB.) Adeoque (propter magnitudinem eR) distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{sv}{4e}$; ideoque à τα, $\frac{1}{4}R + \frac{sv}{4e}$; ejusque respectu τα momentum, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$: Et consequenter; Solidum ejusdem conversione factum circa TA, $\frac{1}{4}eRP - \frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}eRP - \frac{1}{8}svP$: &, circa τα, Solidum, $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{4}svP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{8}svP$. E.

Similiter; Segmenti α B α, momentum respectu τα, $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}bR = \frac{1}{4}R^2P - \frac{1}{2}aR^2 - \frac{5}{6}sR^2 + \frac{1}{6}svR$: Ergo, Trilinei bβτ, momentum respectu τα, $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR = \frac{1}{8}R^2P - \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem $aR - sR$) distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{4}R - \frac{sb}{4a - 4s}$: ideoque à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{sb}{4a - 4s}$; ejusque respectu TA momentum (vel correspondens Ungula) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$. Et, consequenter, Solidum ejusdem circa τα conversione factum, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP - \frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}aRP - \frac{1}{8}sRP - \frac{1}{8}sbP$: Et, circa TA, Solidum $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}sRP + \frac{1}{4}sbP$; & Semisolidum, $\frac{1}{8}aRP - \frac{1}{8}sRP + \frac{1}{8}sbP$.

Si vero ex momento Quadrilinei bβα A, respectu τα, vel TA; auferatur F.

Fig. 169, 170. auferatur momentum Parallelogrammi β b B α; habebitur (respectu earundem $\tau\alpha$, T A,) momentum Segmenti A b B.

Est autem Parallelogrammi β b B α (propter $\beta\alpha = a$, & $b\beta = b$) magnitudo ab; & (propter Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam $\frac{1}{2}b$ adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}b$,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - 2avR + \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR - \frac{1}{2}as^2$; & respectu T A, $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2 = 2aR^2 - avR + \frac{1}{2}as^2$.

Adeoque (subductione factâ) Segmenti b B A, momentum respectu $\tau\alpha$ (vel correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $-\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = -\frac{5}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{1}{2}ab^2$; respectu T A, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{5}{4}fR^2 - 2abR - \frac{1}{4}shR + \frac{1}{2}ab^2$. Et (propter magnitudinem, $-aR + sR + av$,) distantia Centri gravitatis Segmenti A b B, à $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}R - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$; à b V, $\frac{5}{4}R - b - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av} = -\frac{3}{4}R + v - \frac{fvR - 2as^2}{-4eR + 4av}$: Adeoque momentum respectu b V, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$. Et speciatim, Segmenti A d C momentum respectu D C (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{16}R^2P$: Ejusque Centri gravitatis à D C distantia, $\frac{1}{16}P$. (Vel etiam, ex Trilinei A b B momento respectu $\tau\alpha$, subducto quod fit ex magnitudine in $\alpha V = h$, nempe $-abR + sbR + abv = -2aR^2 + 2sR^2 + avR - svR + as^2$; habetur Trilinei A b B momentum respectu b V vel Semiquadrantalis Ungula, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{3}{4}sR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 = \frac{3}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; ut prius.)

Adeoque Solidum ejusdem A b B conversione circa $\tau\alpha$ factum, est, $-\frac{5}{4}eRP + avP - \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R}$; circa T A, $-\frac{3}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R}$; & circa b V, $\frac{3}{4}eRP + \frac{3}{4}svP - \frac{as^2P}{R}$: Et semisolida, semisses horum.

G. Habentur autem eorundem Planorum, Momenta respectu $A\,s$, vel Semiquadrantales Ungulæ aciem habentes $A\alpha$, per prop. 18. Cap. 3. vel prop. 22. Cap. 4. vel prop. 10 hujus.

Si enim rectæ omnes $x\xi$, $z\zeta$, &c. complentes A $\tau\alpha$ Trilineum, (vel minuta quæ his repræsentantur parallelogramma, Trilineum illud complentia,) ducantur in suas ab A α distantias $\alpha\xi$, $\alpha\zeta$, &c. vel in his

his æquales $\xi\Xi$, $\zeta\varsigma$, &c. (triangulum $\alpha\tau t$ complentes ;) Habetur Semiquadrantalis Ungula trilineo $A\tau\alpha$ insistens, aciem habens $A\alpha$. Quam utique complent, ipsa $x\xi\alpha$, $z\zeta\alpha$, &c. seu $x\xi\Xi$, $z\zeta\varsigma$, &c. Parallelogramma (seu minuta Prismata) ipsis $x\xi$, $z\zeta$, &c. (rectis, seu minutis parallelogrammis) insistentia. Hoc est, omnia ab, facta ex arcubus arithmetice proportionalibus in residuorum ad semiperipheriam sinus versos ductis. Fig. 169, 170.

Aut etiam ; si intelligatur $A\alpha$ in partes invicem æquales, in punctis Z, D, &c. dividi, (adeoque rectas Z z, D d, &c. hoc est $\alpha\zeta$, $\alpha\delta$, &c. repræsentare non quidem arcus arithmetice proportionales, sed qui respondent sinubus versis A V, A C, &c. arithmetice proportionalibus, puta A Z, A D, &c. fig. 169. adeoque Trilineum $A\tau\alpha$ consideretur non tam ut *Figura Sinuum Versorum* arcubus arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi $A\alpha$ parallelorum, quam ut *Figura Arcuum*, in rectas expansorum, sinubus versis arithmetice proportionalibus convenientium, ipsi $\alpha\tau$ parallelarum ;) eandem Ungulam complebunt Arcuum illorum Semiquadrata, seu Triangula eisdem Z z, D d, &c insistentia ; ipsis scilicet $\alpha\zeta\varsigma$, $\alpha\delta\Delta$, &c. similia & æqualia : Hoc est, Omnia $\frac{1}{2}a^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus.

Si verò eadem Ungula, tertiis adhuc planis (seu exiguis Prismatibus) componi intelligatur, Basi seu Trilineo $A\tau\alpha$ parallelis, Ungulam complentibus ; erunt ea (propter Ungulæ Obliquam Sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab $A\alpha$ deficientia,) Trilineis $A\tau\alpha$, $x\tau\xi$, $z\tau\zeta$, &c. (usque ad ultimum $t\tau\varrho$, ipsumve τ punctum ;) æqualia : Hoc est, totidem $A\tau\alpha$ planis, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. Hoc est ; Prismati altitudinem habenti $\alpha\tau$, demptâ contrariâ Ungulâ, super eadem $A\tau\alpha$ base, aciem habente $T\tau$. Et similiter, quæ Ungulam portioni $b\beta\alpha A$ insistentem complent plana ; sunt ipsis $b\beta\alpha A$, $b\beta\xi x$, $b\beta\zeta z$, &c. (usque ad ipsam $b\beta$) æqualia : Hoc est, totidem $b\beta\alpha A$, demptis omnibus $x\xi\alpha A$, $z\zeta\alpha A$, &c. seu Prismati ipsi $b\beta\alpha A$ insistenti altitudinem habenti æqualem ipsi $\beta\varsigma = \beta\alpha$, seu arcui $BA = a$; demptâ contrariâ Ungulâ, aciem habente $b\beta$.

Atque hanc tertiam Ungulæ compositionem, ut calculo magis opportunam, (cum perinde sit, Ungulæ magnitudinem quod spectat, planive momentum, sive hæc, sive illa, sive ista demum sumatur,) speciatim hic considerabimus.

Est autem (ut § A.) Trilineum $A\tau\alpha$, $\frac{1}{2}RP$; ergo, *omnia* $A\tau\alpha$; hoc est, $A\tau\alpha$, in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ducta ; $\frac{1}{4}RP^2$.

Item ;

Fig.169, 170. Item; portio b$\beta\alpha$A, (per § A.) $aR + sR$; Adeoque omnia x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. (usque ad $\tau\alpha$A,) sunt *omnia* $aR + sR$. Sumque, omnia a, (hoc est, summa arcuum arithmetice proportionalium, quorum maximus AD$\alpha = \frac{1}{2}P$,) Semissis quadrati $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$; seu $\frac{1}{8}P^2$; (per prop 1. hujus.) Adeoque, *Omn.* aR, $= \frac{1}{8}RP^2$. Et, *omnia* s, (hoc est, summa Sinuum rectorum totius Semicirculi,) $= 2R^2$ (per § M. prop. 13. hujus.) Adeoque *Omn.* sR, $= 2R^3$. Ergo omnia x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. quadrilinea; hoc est, *Omn.* $aR + sR$; (hoc est, Ungula Trilinei A$\tau\alpha$, aciem habens, τT; seu correspondens Momentum;) $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$.

Ergo; Momentum ejusdem A$\tau\alpha$, respectu Aα; (seu correspondens Ungula aciem habens Aα;) hoc est, Omnia A$\tau\alpha$, x$\tau\xi$, z$\tau\zeta$, &c. seu, Totidem A$\tau\alpha$, demptis omnibus x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. Hoc est, Prisma Trilinei A$\tau\alpha$, (altitudinem habens $\tau\alpha$,) dempta contraria Ungula aciem habente τT; Hoc est, Totidem $\frac{1}{2}RP$ demptis omnibus $aR + sR$: Est $\frac{1}{4}RP^2 - \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 = \frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Atque hoc momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}RP$ divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis Trilinei A$\tau\alpha$, ab Aα, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; adeoque à τT, $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$.

Vel etiam; momentum ejusdem respectu τT, ($\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$) modo inventum; per magnitudinem ($\frac{1}{2}RP$) divisum; exhibet Centri gravitatis à τT distantiam $\frac{1}{4}P + \frac{4R^2}{P}$; adeoque ab A$\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{4R^2}{P}$; estque (restituendo magnitudinem) ejusdem momentum (seu quadrantalis Ungula) respectu Aα, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$. Ut prius.

H. Similiter; Portionis b$\beta\alpha$A, momentum respectu Aα (eâdem ratione,) erit Aggregatum omnium b$\beta\alpha$A, b$\beta\xi$x, b$\beta\zeta$z, &c. usque ad ipsam bβ: Hoc est, Totidem b$\beta\alpha$A demptis omnibus x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. Hoc est, Prisma ejusdem b$\beta\alpha$A altitudinem habens $\beta\alpha$, demptâ contraria Ungula (ejusdem b$\beta\alpha$A Sectionis) aciem habente bβ.

Est autem ejusmodi portio quævis ut b$\beta\alpha$A, (per § B.) $aR + sR$. Adeoque Omnes x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. usque ad maximum b$\beta\alpha$A; sunt *Omn.* $aR - sR$; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus usque ad maximum $\alpha\beta$, qui dicatur A; ipsisque s sinubus rectis eorundem arcuum quorum maximus $\beta\upsilon$ dicatur s.

Sunt

Sunt autem *Omnes a*, usque ad *A*, (per prop. 1. hujus, utpote Fig. 169, 170. arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}A^2$ (seu $\alpha\beta\varsigma$ triangulum;) adeoque *Omn.* aR, $=\frac{1}{2}A^2R$. Et *Omnes s*, usque ad maximum $\beta\upsilon = S$, cui respondet Sinus versus AV $= v$; (hoc est, $\alpha\beta\upsilon$ trilineum;) sunt vR (per § M, V. prop. 13 hujus) adeoque *omn.* sR, $= vR^2$,

Ergo; *Omn.* $aR + sR$: $= \frac{1}{2}A^2R + vR^2$, est aggregatum omnium x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. usque ad b$\beta\alpha$A: Hoc est, momentum portionis b$\beta\alpha$A respectu ipsius bβ; vel huic correspondens Ungula.

Ejusdem itaque momentum respectu Aα, (aut correspondens Ungula;) hoc est, totidem b$\beta\alpha$A minus omnibus x$\xi\alpha$A, z$\zeta\alpha$A, &c. seu Prisma basis b$\beta\alpha$A altitudinem habens $\beta\alpha = A$, demptâ contrariâ Ungulâ b$\beta\alpha$A aciem habente bβ: Est, $A^2R + ASR$ minus, $\frac{1}{2}A^2R + vR^2$: Hoc est, $\frac{1}{2}A^2R + ASR - vR^2$; vel (restituto valore minuscularum a, s,) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$.

Adeoque (momentis per magnitudinem divisis) Portionis b$\beta\alpha$A, distantia centri gravitatis à bβ, $\frac{a^2+2vR}{2a+2s}$; & ab Aα, $\frac{a^2+2as-2vR}{2a+2s}$.

Vel à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{2vR-as}{2a+2s}$; & ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a - \frac{2vR-as}{2a+2s}$.

Eodem modo ostendetur (propter b$\tau\beta = aR - sR$,) momentum portionis b$\beta\tau$, respectu bβ, (ungulamve correspondentem cujus acies bβ,) esse $\frac{1}{2}a^2R - hR^2$; & respectu τT, $\frac{1}{2}a^2R - asR + hR^2$: Et Centri gravitatis distantiam à bβ, $\frac{a^2-2hR}{2a-2s}$; &, à τT, $\frac{a^2-2as+2hR}{2a-2s}$.

Aut etiam, (propter AbK $= aR - sR$,) momentum portionis AbK respectu bK (ungulamve correspondentem,) esse $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; & respectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$: Centrique gravitatis distantiam à bK, $\frac{a^2-2vR}{2a-2s}$; & ab Aα, $\frac{a^2-2as+2vR}{2a-2s}$.

Si vero, ex Portionis b$\beta\alpha$A, momentis respectu bβ, & Aα; auferatur Parallelogrammi Bb$\beta\alpha$ momentum respectu utriusvis (propter centrum gravitatis æqualiter ab utraque distans:) Hoc est, (propter bβ=Vα=h, & bB=a, hujusque semissem $\frac{1}{2}$bB$=\frac{1}{2}a$,) $\frac{1}{2}a^2h = a^2R - \frac{1}{2}a^2v$: Habetur Segmenti AbB, momentum respectu bβ, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; & respectu A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$: Hoc est, Semisumma quadratorum arcuum sinibus versis arithmetice I.

Fig. 169, 170. proportionalibus convenientium, portionum bBA complentium: Adeoque hujus duplum, eorundem quadratorum Summa. Et (momenta per magnitudinem dividendo, hoc est, per $-aR+sR+av$, ut § B.) Distantia centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a+\frac{2vR-as}{-2eK+2av}R$; & ab A$\alpha$, $\frac{1}{2}a-\frac{2vR-as}{-2eR+2av}R$.

Et, speciatim, Segmenti AdC momentum respectu dδ, (propter $v=R$) est R^3. Centrique gravitatis à dδ distantia est R.

K. Solidaque & Semisolida conversione facta; sunt ad respectivas Ungulas, (ut sæpius dictum est,) ut P, & $\frac{1}{2}P$, ad R. Puta,

Solidum Trilinei A$\tau\alpha$ conversione circa τT factum, est $\frac{1}{8}P^3+2R^2P$; &, circa Aα, $\frac{1}{8}P^3-2R^2P$.

Solidum Portionis b$\beta\alpha$A conversione circa bβ factum, est $\frac{1}{2}a^2P+vRP$; &, circa Aα, $\frac{1}{2}a^2P+asP-vRP$.

Solidum Portionis b$\beta\tau$ conversione circa bβ factum, est $\frac{1}{2}a^2P-hRP$; & circa τT, $\frac{1}{2}a^2P-asP+hRP$.

Solidum Portionis AbK conversione circa bK factum, est $\frac{1}{2}a^2P-vRP$; & circa Aα, $\frac{1}{2}a^2P-asP+vRP$.

Solidumq; Segmenti AbB conversione circa βbK factum, est $-\frac{1}{2}a^2P+vRP+\frac{a^2vP}{2R}$; & circa A$\alpha$, $-\frac{1}{2}a^2P+asP-vRP+\frac{a^2vP}{2R}$.

Et Semisolida, horum semisses.

L. Si verò libeat hæc Quadrilineorum, & Sectorum correspondentium, momenta respectu Aα, inter se comparare; (præterquam quod illud jam factum est, dum utrorumque momenta dantur;) Dicendum est, Momentum Quadrilinei b$\beta\alpha$A respectu sibi adjacentis Aα, ad momentum Sectoris BαA respectu Aα adjacentis sibi; esse ut, omnes bβ (illud complentes) in respectivas βC (complentes $\alpha\beta C$ Triangulum;) ad easdem bβ in respectivarum βv (complentium $\alpha\beta v$ Trilineum;) Trientem. Hoc est, ut Omnia rectangula bβC (eo spectantia) ad Trientem omnium bβv. Hoc est, ut Omnia ah, ad Omnia $\frac{1}{3}sh$.

Quippe Triangula singula ut αB (sectorem complentia) sunt (quoad magnitudinem) ad correspondentia Parallelogramma bβ (Quadrilineum complentia) ut 1 ad 2, (Intellige, in partibus infinite exiguis, dum Triangula Sectoribus, & Parallelogramma respectiva Quadr

Quadrilineis coincidere reputantur.) Eorumque Triangulorum centra gravitatis in αB posita, ab α distant $\frac{2}{3}\alpha B$; ideoque, ab $A\alpha$, $\frac{2}{3}BV$; hoc est $\frac{2}{3}\beta v$. Ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Momenta singulorum αB Triangulorum respectu adjacentis $A\alpha$; hoc est, Triangulum $\alpha B=\frac{1}{2}b\beta$, in $\frac{2}{3}BV=\frac{2}{3}\beta v$; est ad $b\beta$ in βv; ut 1 ad 3. Et, consequenter, omnium Triangulorum hoc est Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$; ad momentum omnium $b\beta$ Parallelogrammorum quadrilineum $b\beta\alpha A$ complentium in respectivis distantiis βv suspensorum; ut 1 ad 3. Est autem (per § S. prop. 15.) Sectoris $B\alpha A$, momentum respectu $A\alpha$, seu correspondens Ungula, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$: Ergo, omnia $b\beta v$ Rectangula; seu Omnia hs, aut omnia $2sR-vs$; eo spectantia; (hoc est, Solidum Quadrilineo $b\beta\alpha A$ incumbens, altitudinem habens super singulas rectas $x\xi$, $z\zeta$, &c. æqualem respectivis ξo, ζv, &c.) $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$. Et de aliis istiusmodi Solidi portionibus, mutatis mutandis, simile fiet judicium. Puta, (propter Segmentum $ABA=\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR$, ejusque respectu $A\alpha$, momentum $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R$, per § Q. prop. 15.) quæ portioni AbK incumbit ejusdem Solidi continuati portio (hoc est, omnia vs eo spectantia,) erit $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et, similiter, quæ trilineo $\tau b\beta$ incumbit ejusdem Solidi portio (hoc est, omnia hs huc spectantia,) $hR^2-\frac{1}{2}s^2R$. Et sic alibi. Fig. 169, 170.

Atque his ita in *Figura Sinuum Versorum* $A\tau\alpha$ absolutis; idem etiam in *Figura Sinuum Rectorum* (totius Semicirculi) $\alpha\tau\kappa$ absolvetur. Est utique hujus uterque Semissis $\alpha\delta\kappa$, $\tau\delta\kappa$, eadem planè figura atque dCA, (figuræ $A\tau\alpha$ segmentum,) vel $dc\tau$; alio situ posita. Cum enim $b\beta$ hoc est $V\alpha$ (& de reliquis similiter) sit arcus $B\alpha=\tau\beta$, sinus versus; erit propterea (ejusdem à Radio differentia) bk, hoc est VC, arcus BD sinus rectus. Et sic ubique. Est igitur, tum dCA, tum $dc\tau$, figura Sinuum rectorum totius Quadrantis, (puta quadrantis DA, vel $D\alpha$, fig. 169. utrinque à D inchoando;) adeoque eadem planè figurâ cum $\alpha\delta\kappa$, vel $\tau\delta\kappa$, quæ iidem (per constructionem) sunt figuræ Sinuum Rectorum unius quadrantis integri, atque ad eundem Radium. Cum igitur tum ipsius dCA trilinei, tum partium ipsius, magnitudines, momenta & centra gravitatis determinantur: Etiam figuræ $\alpha\tau\kappa$ utriusque Semissis, adeoque & totius, ejusque partium, magnitudines momenta & Centra gravitatis determinantur. M.

Exempli gratia; $\alpha\delta\kappa=\tau\delta\kappa=dCA=-aR+sR+av$ (per § B.) id est, hoc casu, (propter $v=AC=R$, & $s=DC=R$, & N.

 arcum

Fig. 169, 170. arcum $a = DA = \frac{1}{4}P$,) $-\frac{1}{4}RP + R^2 + \frac{1}{4}RP = R^2$. Ejusque momentum respectu basis $\alpha\delta$, vel d C, (hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum unius quadrantis,) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}s^3$ (per § F.) id est, in hoc casu, $\frac{1}{16}PR^2 - \frac{1}{4}R^3 + \frac{1}{4}R^3 - \frac{1}{8}PR^2 = \frac{1}{16}PR^2$; (Adeoque, Summa quadratorum Sinuum rectorum, seu *omnia* s^2, totius quadrantis, $\frac{1}{8}R^2P$; ut supra § V. prop. 13.) Centrique gravitatis à base $\alpha\delta$ seu d C distantia (momentum per magnitudinem dividendo) $\frac{1}{16}P$.

O. Similiter; portio $\kappa\delta\beta\upsilon$, hoc est (sumpta $Cl = \delta\beta$) A C l x, est (ut § B) sR, sumpto arcu x O hoc est X A, $= a$. Nempe factum ex Radio R, in s Sinum rectum arcus $XA = xO$; hoc est, in Sinum arcus $DB = \delta\beta$; hoc est, (posito $\alpha\beta = AB = a$; adeoque B D ejusdem complemento,) in $x = VC$. Hoc est, $\kappa\delta\beta\upsilon = xR$.

Et consequenter, $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\kappa \mp \delta\kappa\upsilon\beta$ (prout minor majorve quadrante fuerit arcus $\alpha\beta$ seu A B) erit $R^2 \mp xR$; hoc est (propter $x = R - v$ si A B sit quadrante minor, & $x = -R + v$ si quadrante major; adeoque, utcunque, $R \mp x = v$,) $\alpha\beta\upsilon = R^2 \mp xR = vR$.

Hinc item deducetur Momentorum ratio in Trilinei $\alpha\delta\kappa$ vel $\tau\delta\kappa$ portionibus; ex momentis portionum Trilinei d C A; sed perplexiori aliquantum calculo, ob contrarium Figurarum situm. Cum enim, in priori situ, arcus ab A inchoavimus, (ut, verbi gratia, arcum A B diximus a; cujus sinus rectus s, & versus v; adeoque B D esset ejusdem arcus complementum, cujus sinus rectus $VC = x$:) jam, mutato situ, arcus inchoantur ab α, hoc est à D; (adeoque arcus $\alpha\beta$, hoc est D B, dicetur a, cujus sinus rectus $s = VC$; & sinus complementi $BV = x$, &c.) Verbi gratia.

Ex Parallelogrammi q l C A momento respectu T A, hoc est, (posito x X, hoc est X A, $= a$,) ex $\frac{1}{2}aR^2$; si auferatur momentum Trilinei A x q, hoc est, (per § E.) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$; habetur quadrilinei x l C A momentum respectu T A, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque (propter magnitudinem sR, per § B.) distantia centri gravitatis à T A, $\dfrac{-aR + 3sR + sv}{4s}$; adeoque, à d C, $\dfrac{aR + sR - sv}{4s}$; ejusque respectu d C momentum, $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$. Idemque est momentum portionis $\upsilon\beta\delta\kappa$, respectu $\tau\alpha$, posito $\delta\beta$ ($= xX$) $= a$: Sed, posito $\alpha\beta = a$, adeoque (ejusdem complementum ad quadrantem, aut etiam excessus supra quadrantem,) $\delta\beta = DB = \frac{1}{4}P \sim a$, (arcûs a differentiam à quadrante

drante $\frac{1}{4}P$,) quem arcum q dicemus; eritque hujus sinus rectus, Fig. 169,
non s, sed $x = OC$ (sinus complementi arcus $a - XA$.) Adeoque 170.
mutato a in q; permutatis etiam si opus s & x (sed hic nihil opus, perinde enim est sx & xs;) pro $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sxR$, habebitur quadrilinei $\upsilon\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\tau\alpha$, (posito $\alpha\beta = a$,) $\frac{1}{4}qR^2 + \frac{1}{4}xsR$; (hoc est, omnia $\frac{1}{2}s^2$, seu Semisumma quadratorum Sinuum rectorum complentium portionem $\upsilon\beta\delta\kappa$, seu arcus DB particulis respondentium.) Ejusque à $\tau\alpha$ Distantia Centri gravitatis $\frac{qR + xs}{4x}$.

Adeoque; (propter Trilinei $\alpha\delta\kappa$, respectu ejusdem $\tau\alpha$, momentum $\frac{1}{16}R^2P$, ut supra;) portionis $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\kappa \mp \delta\kappa\upsilon\beta$ (prout $\alpha\beta$ minor majorve quadrante fuerit) momentum respectu $\tau\alpha$, erit $\frac{1}{16}R^2P \mp \frac{1}{4}qR^2 \mp \frac{1}{4}sxR$; Hoc est (propter $q = \frac{1}{4}P - a$, & $x = R - v$, si $\alpha\beta$ sit quadrante minor; vel $q = -\frac{1}{4}P + a$, & $x = -R + v$; si $\alpha\beta$ quadrante major;) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: (Quæ itaque est, Semisumma quadratorum Sinuum rectorum, complentium portionem $\alpha\beta\upsilon$; seu omnia $\frac{1}{2}s^2$ arcus AB particulis competentia, sumptis a arithmetice proportionalibus.) Factâque, per magnitudinem $\alpha\beta\upsilon = vR$, divisione; habetur distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{aR - sR + sv}{4v} = \frac{eR + sv}{4v}$.

Similiter; Trilinei $\alpha\delta\kappa$ momentum respectu $A\alpha$ (productæ,) Hoc est, Trilinei dCA momentum respectu δd (productæ;) est, (per § I.) $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Hoc est, in præsenti casu, (propter $v = R$,) R^3. (Hoc est, omnia as, totius quadrantis.) Atque hoc, per magnitudinem R^2 divisum; exhibet R, distantiam Centri gravitatis trilinei dCA, à δd; vel $\alpha\delta\kappa$, ab $A\alpha$. Adeoque Centri gravitatis illius ab $A\alpha$, hujus à $\delta\kappa$, distantia, est $\frac{1}{4}P - R$. Et propterea, momentum correspondens (seu Semiquadrantalis Ungulæ,) nempe Trilinei dCA respectu $A\alpha$, vel $\alpha\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$; $\frac{1}{4}R^2P - R^3$. P.

Et similiter in Portionibus, (licet perplexiori paulum calculo, ob mutandum, ut prius, symbolorum valorem pro mutato situ figuræ,) idem obtinebitur.

Est utique (per § H.) quadrilinei x$\xi\alpha$A momentum respectu $A\alpha$, (posito xX $= a$,) $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$: Adeoque (dempto Parallelogrammi ξlCα momento respectu ejusdem $A\alpha$, $\frac{1}{2}a^2R$;) momentum quadrilinei xlCA, respectu ejusdem $A\alpha$, $asR - vR^2$. Atque

Fig. 169, 170. que tantundem erit momentum Quadrilinei $\upsilon\beta\delta\kappa$ respectu $\delta\kappa$, posito $\delta\beta = xX = a$: Centrique gravitatis a $\delta\kappa$ (propter magnitudinem sR,) distantia, $\frac{as - vR}{s}$. Sed, posito $\alpha\beta = a$; adeoque $\beta\delta = \frac{1}{4}P \sim a = q$: Et propterea mutatis s in x (sinum complementi arcus q;) & v in $R - s$: Erit ejusdem $\upsilon\beta\delta\kappa$ momentum respectu $\delta\kappa$, $qxR - R^3 + sR^2$; & centri gravitatis à $\delta\kappa$ distantia, $\frac{qx - R^2 + sR}{x}$: Adeoque, ab A α, $\frac{1}{4}P \mp \frac{qx - R^2 + sR}{x}$; ejusque momentum respectu A α, $\frac{1}{4}xRP \mp qxR \pm R^3 \mp sR^2 = axR \pm R^3 \mp sR^2$.

Et, propterea, Momentum portionis $\alpha\beta\upsilon = \alpha\delta\kappa \mp \delta\kappa\beta\upsilon$, respectu A α, (propter ipsius $\alpha\delta\kappa$, respectu A α, momentum, R^3) erit $\mp axR + sR^2 = -aR^2 + sR^2 + avR$. Centrique gravitatis ab A α distantia (propter magnitudinem, vR,) erit $\frac{-aR + sR + av}{v} = \frac{-eR + av}{v}$: Adeoque, à $\beta\upsilon$, $\frac{eR}{v}$; ejusque respectu $\beta\upsilon$ momentum eR^2.

Q. Verum hæc omnia quæ Trilineum $\alpha\tau\kappa$, ejusque portiones spectant; simplicius, ex ante traditis, per se elicientur, sine ope Figuræ Sinuum versorum.

Est utique (per § T. prop. 13.) posito $\alpha\beta = a$ (ubicunque in $\alpha\tau$ sit β punctum) reliquisque symbolis proportionaliter; $\alpha\beta\upsilon = vR$, $\alpha\delta\kappa = R^2$, $\upsilon\beta\delta\kappa = xR$.

Item, Tilinei $\alpha\beta\upsilon$ momentum respectu $\tau\alpha$; hoc est, omnia Semiquadrata Sinuum rectorum sectionem illam complentium; hoc est, *omnia* $\frac{1}{2}s^2$, seu omnia $\frac{1}{2}vh$, eo spectantia, arcubus arithmeticè proportionalibus ab α usque ad $\alpha\beta$ convenientia; (per § V. prop. 13.) $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR = \frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$. (Nempe, quod fit ex Semi-Radio $\frac{1}{2}R$, ducto in correspondens Semisegmentum circulare ABV $= \frac{1}{2}aR \mp \frac{1}{2}sx = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$.) Adeoque (propter magnitudinem vR,) distantia Centri gravitatis portionis $\alpha\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$.

Et speciatim, Trilinei $\alpha\delta\kappa$ (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $v = R$,) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P$. Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\pm\frac{1}{4}P$.

Similiter

Similiter (per prop. 10 hujus) sumptis omnibus $\alpha\xi o$, $\alpha\zeta v$, &c. usque ad $\alpha\beta v$; hoc est, omnibus vR eo spectantibus; Hoc est, facto ex R in omnes v, hoc est, in omnes A O &c. sinus versos arcuum arithmeticè proportionalium ab A usque ad maximum A V quem jam dicamus V; hoc est, facto ex R in trilineum A b K $= aR - sR = eR$ (per § B:) Habetur momentum Trilinei $\alpha\beta v$ respectu βv, nempe $aR^2 - sR^2 = eR^2$. Factâque per magnitudinem vR divisione; distantia Centri gravitatis à βv; $\frac{aR - sR = eR}{v}$; adeoque ab Aα, $a - \frac{eR}{v}$. Et, propterea, ejusdem momentum respectu Aα, $-eR^2 + avR$. Fig. 169, 170.

(Eademque de portione $\tau\beta v$; substitutis α pro a, & b pro v, item Tτ pro Aα; & vice versa.)

Et, speciatim, Trilinei $\alpha\delta\kappa$ (propter $s = v = R$) momentum respectu Aα, R^3; respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}R^2P - R^3$: Centrique gravitatis distantia ab Aα, R; atque a $\delta\kappa$, $\frac{1}{4}P - R$.

Determinavimus itaque totius Figuræ, partiumque ejusdem expositarum, tum magnitudines, tum momenta respectu expositarum aliquot rectarum; earumque Centrorum gravitatis distantias ab illis rectis. Adeoque, propter exhibitas eorundem à duabus saltem rectis non parallelis distantias; etiam ipsa Centra gravitatis (per prop. 26. cap. præced.) exhibentur. R.

Atque hinc de Ungulis, Solidisque conversione factis aut Semisolidis, aliisque quæ hinc dependent, calculo rite adhibito, judicium fiet. Quæque de his dicta sunt, ad alia facile poterunt multis modis ampliari.

Atque hæc quidem omnia quæ de $\alpha\delta\kappa$ figura Sinuum rectorum unius quadrantis tradita sunt; eadem ejusdem complemento $\alpha\kappa\Gamma$ facile accommodantur. Quippe si ex $\alpha\delta\kappa\Gamma$ parallelogrammo, auferatur trilineum $\alpha\kappa\delta$; restat trilineum $\alpha\kappa\Gamma$: & similiter, si ex parallelogrammi illius Momentis, Ungulis, & Ungularum Momentis; auferantur respectiva Trilinei $\alpha\delta\kappa$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta; restabunt respectiva Trilinei $\alpha\kappa\Gamma$ Momenta, Ungulæ, & Ungularum Momenta: unde & Centrorum gravitatis Distantiæ ab expositis rectis colliguntur. Quodque de totâ $\alpha\kappa\Gamma$ dictum est; idem de partibus, ut $\alpha o\gamma$, mutatis mutandis, intelligendum est.

Si

S. Si autem, in his Sinuum Versorum, Rectorumque, Figuris: Manente, ut prius, $A\alpha = 2R$, & $\delta\kappa = R$, reliquisque hisce parallelis in eadem qua nunc ratione; Recta $\tau\alpha$, Protracta sit, vel Contracta, (puta, Major, vel Minor, quam $\frac{1}{2}P$;) reliquæque huic parallelæ, similiter vel Protractæ vel Contractæ; (quas Figuras Sinuum Versorum, Rectorumve, *Protractas*, dicamus; vel *Contractas*:) Eadem quæ jam tradita sunt, etiam his conveniunt; cum hoc solo discrimine; Quod quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$: Et similiter, mutatis mutandis, pro earundem b B quadratis, Cubis, reliquisque potestatibus; nempe, pro a^2, a^3, &c. quantitates quæ sint ad has in Duplicatâ, Triplicatâ, &c. ratione, illius quam habet $\tau\alpha$ ad $\frac{1}{2}P$.

Fig. 169, 170.

T. Quæque de figura Sinuum rectorum unius quadrantis, (ut $\alpha\delta\kappa$ fig. 170.) dicta sunt: eadem figuræ Sinuum Chordarum seu subtensarum in semicirculo (ut $A\delta\kappa$ fig 183.) facile accommodantur: Sunt enim Chordæ Arcuum in semicirculo, ubique Duplæ Sinuum Rectorum, Semiarcuum in Quadrante correspondentium. Adeoque figura Chordarum in Semicirculo $A\delta\kappa$ fig. 183. Ipsi $\alpha\delta\kappa$ fig. 170, Figuræ Sinuum Rectorum Quadrantis, omnino similis; & partes partibus respective sumptis. (Quod & de solidis inde oriundis pariter intelligendum est.) Qua de re videantur plura, ad prop. 22. §G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

SCHOLIUM.

Fig. 169, 170, 171.

HÆc autem sive Sinuum versorum sive Arcuum figura $A\tau\alpha$, alia non est quam, Dimidia Semicylindri (plano oblique secti) Superficies curva in planum expansa: Seu Semiquadrantalis Ungulæ Semicylindricæ Superficies curva in planum expansa. Eaque quâ terminatur sinuosa curva $A d\tau$, est Semiellipseos linea curva, in planitiem item expansa.

Intelligatur enim super Semicirculo $\alpha\tau\beta$ fig. 171. (qui sit ipsi $A\alpha B$ fig. 169 æqualis; adeoq; illius curva $\tau\beta\alpha$, fig. 171. curvæ hujus $AB\alpha$, fig. 169.) Semicylindrus rectus, altitudinem $A\alpha$, ipsi $A\alpha$ fig. 169, 170. æqualem habens. Quem secet planum ellipseos τ b A, (quod ipsi per axem Cylindri plano $\tau\alpha$ A rectum sit,) abscindens Semiquadrantalem Ungulam τ b $A\alpha$; cujus superficiem curvam compleant (juxta def. 1. cap. 4.) parallelæ

parallelæ rectæ β b &c. singulis curvæ τ β α punctis insistentes: (ut & paralleli arcus b B, &c. singulis rectæ A α punctis occurrentes.)

Sumpto jam, in Trilinei base τ β α, fig. 170. puncto quovis β, cui respondeat punctum β in curva τ β α fig. 171. quæ huic in curva Ungulæ superficie insistit recta, sit β b. Dico rectam hanc β b in curva Ungulæ superficie, æqualem esse correspondenti rectæ β b in Trilinei plano. Est enim (per constructionem) arcus τ β, æqualis τ β rectæ, hoc est arcui α B: Sed & huic similis (propter æquales circulorum Diametros:) Adeoque hujus sinui verso α V, fig. 169, 170. æqualis est illius sinus versus τ a; hoc est, (propter angulum semiquadrantalem,) perpendicularis a v; & (propter parallelas) ipsa β b in Ungulæ superficie curva. Sed & eidem α V fig. 170. æqualis est (ipsi parallela) β b in Trilineo. Æquales itaque sunt, quæ in Ungulæ superficie curva, & quæ in Trilineo plano, rectæ β b respective sumptæ. (Similiter ostendetur, arcus b B, d D, &c. fig. 171. æquales esse rectis b B, d D, fig. 170. hoc est, arcubus A B, A D, &c. fig. 169.) Cumque hoc ubique obtineat: Expansa in planum superficies illa curva, Trilineo super imposita congruet: adeoque tum tota toti, tum partes partibus respective sumptis æquales. (Puta, superficies curvæ A b β α, A b B, ipsis A b β α, A b B, planis: & sic ubique.) Ipsaque quæ, in superficie Cylindrica, erat semiellipseos curva τ b A; eadem, in superficie expansâ, est sinuosa curva τ b A terminans Trilineum A τ α, *quam Figuram Sinuum Versorum, Arcuumve,* diximus.

Eodem modo; si intelligatur idem τ A semicylindrus, plano A κ T secari, Semiquadrantalem Ungulam A T κ abscindente, (cujus itaque altitudo δ κ sit basis semidiametro æqualis:) Ostendetur, superficiem Ungulæ curvam T δ A κ, in planum expansam, congruere Bilineo τ δ α κ fig. 170. quam *Figuram Sinuum Rectorum* diximus. Quippe utrobique ostendetur β υ, ipsi B V sinui recto correspondentis arcus A B, hoc est τ β, æqualis: & sic ubique. Adeoque & τ κ α semiellipsis curvam in superficie Cylindri; expansâ in planitiem superficie curvâ, curvæ τ κ α figuram Sinuum rectorum terminanti congruere; & partes partibus respective sumptis, Quæ pridem monuimus ad prop. 13. Fig. 170, 172.

PROP. XVIII.

PARS PRIMA.

A. Fig. 170. Si ſuper $A\tau\alpha$ Figura Sinuum verſorum, Arcuúmve, Solidum inſiſtat altitudinem habens in ſingulis $b\beta$ Sinibus verſis, æqualem reſpectivis $\beta\upsilon$ ſinibus rectis eorundem arcuum: Solidum ſic conſtructum, Triplum erit Semiquadrantalis Ungulæ Semicirculi, aciem habentis Semicirculi Diametrum. Et partes partium reſpective.

Unde; Solidi ſic conſtructi, partiumque ejuſdem, tum Magnitudines, tum Momenta, & Centra gravitatis, innoteſcent.

Nempe, (retentis Symbolis, ut in propoſitionibus aliquot præcedentibus;)

A, C. Solidi $A\tau\alpha$, ſic conſtructi; Magnitudo, $2R^3$: Diſtantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$; Momentum correſpondens reſpectu $\tau\alpha$ in plano $A\tau\alpha$ erecto, $\frac{1}{8}R^3P$:

E. Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R$; Momen-

H. tum reſpectu $\tau\alpha$ in plano $\tau\alpha\kappa$ erecto, $\frac{4}{3}R^4$: Diſtantia Centri gravitatis à plano ſuper $A\alpha$ erecto, $\frac{1}{16}P$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}R^3P$.

A, C. Portionis, ejuſdem Solidi, $Ab\beta\alpha$; Magnitudo, $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $A\tau\alpha$, $\frac{1}{4}cR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab

E. illo plano, $\frac{3cR^2+3svR+2s^3}{12vR+6s^2}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4vR^2+4s^2R-s^2v}{6vR+3s^2}$;

Momentum

Momentum reſpectu $A\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + svR^2 - \frac{1}{4}svR^2$ H.
$+\frac{1}{2}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{-5eR^2 + 4avR - svR + 2as^2}{4vR + 2s^2}$.

Portionis, ejuſdem Solidi, $b\beta\tau$; Magnitudo, $2R^3 - vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = bR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}b^2R$; Momentum reſpectu plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{8}R^3P - \frac{1}{4}eR^3 - \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; reſpectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{4}{3}R^4 - \frac{2}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{3}{8}R^3P + \frac{5}{4}eR^3 - avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3R^2P - 6eR^2 - 6svR - 4s^3}{48R^2 - 24vR - 12s^2}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 - 4s^2R + s^2v}{12R^2 - 6vR - 3s^2}$; ab $A\alpha$, $\frac{3R^2P + 10eR^2 - 8avR + 2svR - 4as^2}{16R^2 - 8vR - 4s^2}$. A. I.

Portionis AbK; Magnitudo, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; Momentum reſpectu plani $A\tau\alpha$ erecti, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; reſpectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{4}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; reſpectu $A\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR^2 - 2s^3R}{12vR^2 - 6s^2R = 6v^2R}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{4}{3}R + \frac{1}{3}b$; à TA, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; ab $A\alpha$, $\frac{-3eR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$. A. I.

Portionis $AK\beta\alpha$; magnitudo, $2vR^2$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$; Momentum reſpectu ejuſdem $A\tau\alpha$ plani (erecti) $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2$; Diſtantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, (hoc eſt, à planis ſuper rectas illas erectis,) R; momentum reſpectu TA, vel $\tau\alpha$, $2vR^3$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $a - \frac{eR}{v}$; momentum reſpectu $A\alpha$, $2avR^2 - 2eR^3$. I.

Portionis $AKbB$; magnitudo, v^2R; Diſtantia Centri gravitatis à TA vel bB, $\frac{1}{2}v$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{1}{2}v$; ab $A\alpha$, I.

 $a-$

$a - \frac{eR}{v}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; Momentum reſpectu T A, vel b B, $\frac{1}{2}v^3R$; reſpectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$; reſpectu plani (erecti) A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$.

B. D. Portionis b β α B; Magnitudo, $vbR = s^2R$: Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{eR+sv}{4v}$; momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ebR^2 + \frac{1}{4}s^3R$: Diſtan-
F. tia Centri grav. ab erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{1}{2}b$; momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR = \frac{1}{2}s^2bR$:
H. Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{-eR+av}{v}$; Momentum reſpectu A α, $-2eR^3 + evR + as^2R$.

B. D. Segmenti Solidi A b B; Magnitudo, $\frac{1}{2}v^2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano A $\tau\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$,
F. $\frac{-3eR^2+3avR-s^3}{6v^2}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$ in erecto plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}b$; & à b B, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; à T A, $\frac{2}{3}v$; Momentum reſpectu bB, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$; reſpectu T A, $\frac{1}{3}v^3R$:
G. Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2 = 2v^2}$.

Pars Secunda.

K. Fig. 169, 170. Porro; Si ſuper A $\tau\alpha$, (Figura Sinuum verſorum, Arcuumve,) Solidum inſiſtat; altitudinem habens, in ſingulis b B rectis (ſeu arcubus in rectas expanſis,) æqualem reſpectivis B V in Semicirculo, (eorum reſpective arcuum ſinibus rectis:) Solidi ſic constructi, partiumque ejuſdem, tum magnitudines, tum momenta, & Centra gravitatis innoteſcunt.

Nempe

Nempe; (retentis Symbolis, ut in propositionibus præcedentibus;) Fig. 169, 170.

Solidi totius $A\tau\alpha$ sic constructi; Magnitudo, $\frac{1}{16}RP^2$: Momentum respectu TA, $\frac{1}{16}R^2P^2+\frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2-\frac{4}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis à TA, K. M.

$R+\frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R-\frac{64R^3}{9P^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, N.

$\frac{1}{96}RP^3-\frac{1}{16}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

$\frac{1}{6}P-\frac{R^2}{P}$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$ (erecti)

$\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{8R^2}{3P}$.

Portionis, ejusdem Solidi, $Ab\beta\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{4}efR$: Momentum respectu K. M.

TA, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{5}{36}s^2R^2+\frac{2}{9}vR^3+\frac{1}{9}s^2vR$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P-\frac{1}{4}a^2R^2+\frac{13}{36}s^2R^2-\frac{2}{9}vR^3-\frac{1}{9}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à TA, $R+\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$; à $\tau\alpha$,

$R-\frac{4v^2R+4s^2v}{9aP-9ef}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}as^2R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3a^2P-3eR^2-3svR-4a^3+6as^2}{6aP-6ef}$: Momentum respectu plani $A\tau\alpha$, $\frac{1}{3}fR^3+\frac{1}{18}s^3R$; Distantia Centri gravitatis ab $A\tau\alpha$ plano, $\frac{12fR^2+2s^3}{9aP-9ef}$. N. O.

Portionis $AK\beta\alpha$; Mag. $\frac{1}{4}aRP$; Distantia Centri gravitatis à TA, vel $\tau\alpha$, R; Momentum resp. TA, vel $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P$: Dist. Cen. grav. ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a$; Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2RP$: Distantia Centri gravitatis à plano $A\tau\alpha$, $\frac{8R^2}{3P}$: Momentum respectu istius plani $A\tau\alpha$ (erecti) $\frac{1}{3}aR^3$. M. N. O.

Portionis, $b\beta\alpha B$; magnitudo, $\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{2}a^2R+\frac{1}{2}asR-\frac{1}{2}asv=\frac{1}{4}aRP-\frac{1}{2}eaR-\frac{1}{2}asv$: Momentum respectu TA, L. P.

$\frac{1}{4}aR^2P$

$\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}eaR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu A α, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; respectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis, à T A, $R + \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4s^3}{3RP - 6eR - 6sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3RP - 6eR - 6sv}$.

L.M. Portionis, A K b B; Magnitudo $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$: Momentum respectu T A, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à

N. T A, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{4}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia

O. Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a$: Momentum respectu plani (erecti) A $\tau\alpha$, $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis ab illo plano, $\frac{v^2R + s^2v}{3eR + 3sv}$.

L. Portionis, A b B; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R +$

M. $\frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Momentum respectu T A, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{9}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{13}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{9}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$; Distantia Centri gravitatis à T A, $R + \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$:

N. Momentum respectu A α, $-\frac{1}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}a^3R - \frac{1}{4}a^2sR + \frac{1}{4}as^2R + \frac{1}{4}a^2sv$; Distantia Centri gravitatis ab

O. A α, $\frac{-3eR^3 - 3svR^2 + 2a^3R - 6a^2sR + 6as^2R + 6a^2sv}{6e^2R + 12asv}$: momentum respectu plani A $\tau\alpha$, $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$: Distantia Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ Plano, $\frac{-12eR^3 + 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9e^2R + 18asv}$.

K. M. Portionis A b K; Magnitudo, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}fR$: Momentum respectu T A, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$;

Re-

Reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{11}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$: Momentum reſpectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}eR^3 - \frac{1}{18}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano, $\frac{12eR^2 - 2s^3}{9ef}$. N. O.

Portionis b $\beta\tau$; Magnitudo $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{11}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}hR^3 - \frac{1}{9}s^2hR$; Reſpectu T A, $\frac{1}{4}\alpha^2R^2 - \frac{11}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}hR^3 + \frac{1}{9}s^2hR$; Reſpectu T τ, $\frac{1}{8}\alpha R^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{1}{8}shR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3R - \frac{1}{4}\alpha s^2R$; reſpectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{1}{3}sR^3 - \frac{1}{18}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $R - \frac{4h^2R + 4s^2h}{9\alpha^2 - 9s^2}$; à T A, $R + \frac{4h^2R + 4s^2h}{9\alpha^2 - 9s^2}$; ab A α, $\frac{3\alpha R^2 - 3sR^2 + 3shR + 4\alpha^3 - 6\alpha s^2}{6\alpha^2 - 6s^2}$; à plano A $\tau\alpha$, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 2s^3}{9\alpha^2 - 9s^2}$. K. Q.

Adeoque exhibentur, in utroque ſolido; tum eo quod fit ex A $\tau\alpha$ figuræ Sinuum verſorum rectis b β, in β υ figuræ Sinuum rectorum reſpectivis rectis; tum eo quod fit ex A $\tau\alpha$ Figuræ Arcuum rectis b B, in B V, reſpectivas Semicirculi rectas; eorumque partibus expoſitis; Tum Magnitudines; tum Momenta reſpectu planorum aliquot expoſitorum; & Centrorum gravitatis ab illis planis diſtantiæ. Et propterea, propter exhibitas Centrorum gravitatis diſtantias à tribus ſaltem planis non parallelis; exhibentur (per prop. 26, cap. præced.) ipſa Centra gravitatis. R.

Quæque de expoſitis dicta ſunt; ad alia facile poterunt accommodari.

Et

Et quidem quæ de his ſolidis traduntur; ad Protracta, & Contracta, facile transferentur.

Quæque de ſolidis Figuram Sinuum Rectorum unius Quadrantis reſpicientibus, traduntur; eadem ad Solida Figuram Chordarum Semicirculi ſimiliter reſpicientia, transferentur.

A. Fig. 169, 170. SUper $\alpha\tau\varkappa$ Figura ſinuum rectorum, erigi intelligatur Cylindri (Priſmatiſve) recti portio; ea ratione, ut ſuper ſingulis $\beta\upsilon$, figuram complentibus (arcuum arithmetice proportionalium ſinibus rectis,) altitudinem habeat reſpectivis β b (eorundem arcuum, eorumve complementorum ad ſemicirculum ſinibus verſis) æqualem. Aut etiam (quod eodem recidit) ſuper A τ α figura Sinuum verſorum (Arcuúmve) inſiſtens ad angulos rectos, in $\tau\alpha$ rectâ, Figura Sinuum rectorum $\alpha\tau\varkappa$, promoveri intelligatur ad T A, ſolidum deſcribens columnare (Cylindraceum dicas, Priſmaticúmve, perinde eſt,) Parallelogrammo T A α τ incumbens; quod ſinuoſâ ſuperficie ſinuoſæ curvæ A d τ ad angulos rectos inſiſtente, ſecari porro intelligatur, Solidum A d τ α abſcindente.

Manifeſtum eſt, ex conſtructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b β inſiſtentia, Parallelogramma eſſe rectangula; ipſis b$\beta\upsilon$ rectangulis ubique æqualia; hoc eſt rectangulis $h\,s$; factis nempe ex arcuum $\tau\beta$ (hoc eſt αB fig. 169.) ſeu complementorum arcuum $\alpha\beta$ (ſeu A B) ſinibus verſis; in $\beta\upsilon$ (hoc eſt B V fig. 169.) eorundem arcuum ſinibus rectis. Adeoque Solidum hoc ſive totum, ſive ipſius portio ut A b β α, eſt aggregatum omnium $h\,s$, ſeu $s\,h$, figuram ſive totam, ſive ipſius aſſumptam portionem, ſpectantium; diviſâ $\alpha\tau$ in partes æquales; hoc eſt, ſumptis a arcubus arithmetice proportionalibus.

Manifeſtum item eſt, Plana rectis b B inſiſtentia, ſolidum hoc complentia, æqualia eſſe reſpectivis $\alpha\,\beta\,\upsilon$ Figuræ ſinuum rectorum portionibus; diviſâ A α in partes æquales, hoc eſt, ſumptis v arithmetice proportionalibus. Adeoque (propter $\alpha\beta\upsilon = v\,R$, per § Q. prop. 17.) Solidum hoc, ſive totum, ſive ipſius portio ut A b B, eſt aggretum omnium $v\,R$, eo ſpectantium, ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Eſtque ſolidum hoc, Semiquadrantalis Ungulæ a Semicirculi A D α aciem habentis A α, (ſeu Momenti ſemicirculi A D α reſpectu A α rectæ,) Tiplum: Et partes partium reſpective ſumptarum: Puta

Solidi

V.
, &

ua-
ida
tia,

ndri
gu-
bus
eo-
em.
um
um
ens
Pa-
fæ
So-

ia,
g
ex
m
n-
ve
n
à
-

n-
o-
te
p.
e-
a-

a
a
ta
di

PROB

Solidi
bentis
habent
angula
figuran
trum g
$\frac{2}{3}$BV ;
$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=$
drantal
illam di
in $\beta\upsilon$;
illæ con
conflatu
Ungulæ
spective
habentis

Est au
$\frac{2}{3}R^3$; &
(per § Q
& portio
$-\upsilon R^2-$

Et sim
tudo ; seu

Si vero
nempe h
A$\beta\upsilon$ (=
(propter
AV & V
$-b\upsilon R=$
gregatum
arithmetic
insistit pla
$s\upsilon$, sum
Hoc est
superficies
tum A b
tudum ;
& AV=

Idemque
singula pl

Solidi portio Ab$\beta\alpha$, tripla correſpondentis Ungulæ BαA (aciem habentis Aα,)& Portio b$\beta\tau$,tripla Ungulæ correſpondentis α B α, (aciem habentis Aα ;)& ſic ubique.Sunt enim (per prop. 17.)ſingula α B triangula Semicirculum complentia, ad bβ Parallelogramma, complentia figuram Sinuum verſorum,ut 1 ad 2 : Item Trianguli αB cujuſque Centrum gravitatis ab α diſtat $\frac{2}{3}\alpha$B, (per prop.6.hujus ;) adeoque ab A α, $\frac{2}{3}$BV ; cujus itaque ad BV$=\beta v$ ratio, eſt ut 2 ad 3. Eſt ergo (propter $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,) Trianguli cujuſque momentum reſpectu Aα, ſeu ſemiquadrantalis Ungula Pyramiſve (æqualis utique facto ex magnitudine, in illam diſtantiam ;) ad reſpectivum Parallelepipedum (factum ex bβ in βv ;) ut 1 ad 3 : Et ſic ubique. Hoc eſt, Bα A Ungula, quam illæ complent Pyramides ; ad ſolidum b$\beta\alpha$A, ex Parallelepipedis conflatum ; ut 1 ad 3. Totumque Ad$\tau\alpha$ Solidum, Triplum iſtius Ungulæ Semicirculi (aciem habentis Aα :) Et partes partium reſpective ; Nempe A b β α Solidum , triplum Ungulæ B α A aciem habentis A α. Fig. 169, 170.

Eſt autem illa Semicirculi Ungula (ſeu momentum reſpectu Aα,) $\frac{2}{3}R^3$; & Sectoris BαA, $\frac{1}{3}vR^2+\frac{1}{6}s^2R$; & Segmenti αBσ, $\frac{1}{6}h^2R$; (per § Q, S, prop. 15.) Ergo totius A$\tau\alpha$ ſolidi, magnitudo $2R^3$; & portionis Ab$\beta\alpha$, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & portionis b$\beta\tau$, $\frac{1}{2}h^2R=2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R=hR^2-\frac{1}{2}s^2R$.

Et ſimiliter oſtendetur portionis AbK (extra trilineum) magnitudo ; ſeu *Omn. sv* ; (ſumptis s arithm. propor.) $\frac{1}{2}v^2R=vR^2-\frac{1}{2}s^2R$.

Si vero ex hac portione Solidi A b β α ; auferatur pars b β α B (quæ nempe huic parallelogrammo incumbit ;) hoc eſt, factum ex plano Aβv ($=vR$, per § Q. prop. 17,) in βb$=h$; hoc eſt $hvR=s^2R$; (propter s mediam proportionalem inter v & h ; hoc eſt, B V inter AV & Vα :) Relinquitur Solidi ſegmentum A b B, $=vR^2+\frac{1}{2}s^2R-hvR=vR^2+\frac{1}{2}s^2R-s^2R=vR^2-\frac{1}{2}s^2R=\frac{1}{2}v^2R$. Quod eſt aggregatum Omnium v R eò ſpectantium , ſumptis v ſinibus verſis arithmetice proportionalibus : (Singulis enim bV rectis reſpective inſiſtit planum $\alpha\beta v=vR$.) Seu, quod tantundem valet, Omnium sv, ſumptis s arithmetice proportionalibus : (Ut ad § I. videbitur.) Hoc eſt factum ex omnibus βv in reſpectivas bK. Adeoque Sinuoſa ſuperficies, curvæ A d τ inſiſtens, biſecat KbB ſolidum, facitque ſolidum AbB & ſolidum AbK , invicem æqualia ; (quod merito obſervandum ;) utrumvis utique $\frac{1}{2}v^2R$: Eſt enim (propter $\alpha\beta v=vR$, & AV$=v$,) Solidum KbBA $=v^2R$. B.

Idemque per ſe, (ſine ope portionis A b β α,) ſic colligitur. Cum ſingula plana (æqualibus intervallis ſumpta, Solidum complentia,)

 quæ

Fig. 169, 170. quæ rectis b B insistunt, sint respectivis $\alpha\beta\upsilon$ æqualia, (quod ex constructione manifestum est;) sintque plana illa $\alpha\beta\upsilon = vR$ respective, (per § P, Q, prop. 17.) Solidi segmentum A b B, aut etiam so lidum integrum A $\tau\alpha$, est aggregatum Omnium vR, eo spectantium; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad eorum maximum V. Sunt autem *Omnes* v, (arithmetice proportionales, usque ad maximum V,) $= \frac{1}{2}V^2$, (per prop. 1. hujus.) Ergo *Omn.* $vR: = \frac{1}{2}V^2R$; seu (restituto minusculæ v valore) $\frac{1}{2}v^2R$; ut prius. (Adeoque solidum integrum, (propter $v = 2R$,) $= 2R^3$, ut prius.) Cui si addatur portio b $\beta\alpha$ B, habebitur portio A b $\beta\alpha$, eadem quam prius exhibuimus. Cumque Solidum A b B sit (ut dictum est) $\frac{1}{2}v^2R$; sitque solidum A K b B, v^2R (propter basin $\alpha\beta\upsilon = vR$, & altitudinem A V $= v$,) erit etiam pars residua A b K, $\frac{1}{2}v^2R$, (ipsi A b B æqualis;) adeoque Superficies curva, curvæ A b insistens, bisecat ipsum A K b B solidum.

C. Porro; Si intelligatur Solidum integrum ita positum, ut $\tau\alpha\kappa$ planum sit in situ horizontali, adeoque A $\tau\alpha$ (super illo erectum) in plano ad Horizontem recto: Momentum solidi totius, respectu $\tau\alpha$ rectæ; erit Duplum momenti Ungulæ semicirculi aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Et similiter in partibus respective sumptis.) Sunt utique singula b $\beta\upsilon$ parallelepipeda Solidum hoc complentia (ut ostensum est § A,) ad respectivas Pyramides α B Ungulam illam complentes, ut 3 ad 1. Eorumque Parallelepipedorum à perpendiculari plano $\tau\alpha$ A distantiæ Centri gravitatis, hoc est $\frac{1}{2}\beta\upsilon$ respective, (per prop. 2. hujus;) ad Pyramidum illarum distantias Centri gravitatis à perpendiculari plano A α, $\frac{1}{4}$ B V, (distant utique ab α, $\frac{1}{4}\alpha$B, per prop. 6 hujus; adeoque, $\frac{3}{4}$ B V, ab A α;) seu $\frac{3}{4}\beta\upsilon$; ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3. Ergo, (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3} = \frac{2}{1}$,) momentum cujusque Parallelepipedi, (adeoque & simul omnium,) ad respectivæ Pyramidis (adeoque & simul omnium) momentum; est ut 2 ad 1.. Quod quidem momentum, est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}s^2h$, sive totum Solidum, sive ipsius portionem, spectantium. (Sunt utique magnitudines, aggregatum Omnium sh; distantiæque Centrorum gravitatis respective, $\frac{1}{2}s$.) Est autem Ungulæ Semicirculi A D α aciem habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{16}R^3P$; Ungulæque Sectoris B α A, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; (per § P, R, prop. 16.) Ergo Totius Solidi A $\tau\alpha$ (situ illo positi) momentum respectu $\alpha\tau$, est $\frac{1}{8}R^3P$; & portionis A b $\beta\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Atque hæc momenta, per respectivas magnitudines divisa,

divisa, (hoc est, per $2Rs$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, ut ad § A.) exhibent Fig. 169, 170.
Centrorum gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano distantias; nempe totius Solidi, $\frac{3}{16}P$; & portionis Solidi A b $\beta\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR + 2s^3}{12vR + 6s^2}$.

Si verò ex eo Solidi A b $\beta\alpha$ momento; auferatur momentum ipsius b$\beta\alpha$B: restat momentum Solidi A b B. D.

Est autem Solidi b$\beta\alpha$B magnitudo (per § B.) $s^2R = vhR$; ejusque Centri gravitatis ab A $\tau\alpha$ plano distantia, (quanta plani A$\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$, per § C. prop. 5.) est $\frac{eR + sv}{4v}$, per § Q. prop. 17. adeoque momentum (in eo situ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}svhR = \frac{1}{4}ehR^2 + \frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}s^3R = \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{4}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{4}s^3R$: Hoc itaque, ex totius A b $\beta\alpha$ momento, $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$, (§ C.) subductum; relinquit $-\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B (super plano $\alpha\beta\upsilon$ erecti) respectu $\tau\alpha$. (Quæ est summa omnium vR solidum complentium in suas respective distantias $\frac{eR + sv}{4v}$ ductarum; seu, omnium $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; sumptis v arithmetice proportionalibus.) Illudque momentum, per magnitudinem divisum (§ B. traditam) $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; exhibet ejusdem A b B, Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$ distantiam $\frac{-3eR^2 + 3avR - s^3}{12vR - 6s^2 = 6v^2}$.

Idem etiam per se (absque ope portionis A b $\beta\alpha$) sic colligitur. Cum singula plana rectis b B insistentia, Solidum complentia, æqualia sint ipsis respective $\alpha\beta\upsilon = vR$, (ut dictum est;) sintque eorum Centra gravitatis in eadem ab A $\tau\alpha$ plano distantia, quâ ipsorum $\alpha\beta\upsilon$ à $\tau\alpha$; hoc est $\frac{eR + sv}{4v}$ respective: Erunt singulorum momenta, respectu ipsius A $\tau\alpha$ perpendicularis plani, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, seu $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$. Adeoque Solidi A b B momentum, erit Omnium Summa; hoc est, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: sumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omnes* a, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) ipsum A b B planum; hoc est, $-eR + av$, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 = -\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2$.

Et similiter, *Omnes* s, (sumptis v arithmetice proportionalibus) sunt ipsum in semicirculo A B V planum; hoc est, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2 := \frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2$.

 Item,

Fig. 169. 170. Item, *Omnia* $s\,v$, (hoc sensu,) sunt ipsius, in semicirculo, plani A B V, momentum respectu T A, (est enim singulorum s, à TA distantia v, respective ;) hoc est, $\frac{1}{2}e\Lambda^2 + \frac{1}{2}vR - \frac{1}{3}s^3$ per § F. prop. 15.) Adeoque, *Omn.* $\frac{1}{4}svR := \frac{1}{8}e\Lambda^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR := -\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}avR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, momentum Solidi A b B, respectu perpendicularis plani A $\tau\alpha$. Ut prius. Unde Centri gravitatis inde distantia habebitur. Atque huic momento, si addatur momentum Solidi b $\beta\alpha$ B, habebitur momentum Solidi A b $\beta\alpha$, idem quod aliâ methodo jam invenimus.

F. Deinde ; Si intelligatur Solidum illud integrum A $\tau\alpha$, ita positum, ut sit A $\tau\alpha$ planum in situ horizontali, adeoque $\alpha\tau\kappa$ planum, situ ad horizontem recto : Momentum Solidi totius, Duplum erit momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$. Et similiter in partibus respective sumptis. Sunt enim (ut prius dictum § A, C.) Singula Parallelepipeda Solidum hoc complentia, ad respectivas Pyramides complentes illam Ungulam, ut 3 ad 1 : Eorumque parallelepipedorum rectis β b insistentium distantiæ Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$ b $= \frac{1}{2}h$, respective ; Pyramidum verò à $\tau\alpha$ plano, Distantiæ Centrorum gravitatis, respective, $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}h$. Cum igitur magnitudines sint ut 3 ad 1 ; & distantiæ, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{3}{4}$, seu 2 ad 3 ; erit (propter $\frac{3}{1}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{1}$) Momentorum ratio, ut 2 ad 1. Hoc est, Momentum Solidi A $\tau\alpha$ (hoc situ positi) respectu $\tau\alpha$ rectæ, duplum momenti Ungulæ Semicirculi A D α, aciem habentis A α, respectu rectæ $\tau\alpha$: Et portionis Solidi A b $\beta\alpha$ momentum, duplum momenti Ungulæ correspondentis B α A, (aciem habentis A α,) respectu $\tau\alpha$. Est autem (per § C, F. prop. 16.) Ungulæ Semicirculi, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}\Lambda^4$; Ungulæque Sectoris B α A, $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2vR$. Ergo Solidi A $\tau\alpha$ sic positi, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}\Lambda^4$; & portionis A b $\beta\alpha$, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$. (Quæ est summa, omnium $\frac{1}{2}sh^2$, eo spectantium ; sumptis a arithmetice proportionalibus : Sunt enim magnitudines, summa omnium sh ; & distantia $\frac{1}{2}h$ respective.) Eaque momenta per respectivas magnitudines, $2R^3$, & $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$, (per § A.) divisa ; exhibent Centrorum gravitatis ab erecto plano $\tau\alpha\kappa$, distantias : Nempe, totius Solidi, $\frac{2}{3}R$; & portionis A b $\beta\alpha$ $\dfrac{4vR^2 + 4s^2R - s^2v}{6vR + 3s^2}$.

F. Ex illo autem portionis A b $\beta\alpha$ momento ; si eximatur momentum portionis b $\beta\alpha$ B : habetur momentum Segmenti A b B. Est,

Est autem $b\beta\alpha B$, (per § B.) vhR seu s^2R; distantia Centri gravitatis (per prop. 2 hujus,) $\frac{1}{2}b\beta = \frac{1}{2}h$: Ergo momentum (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}vh^2R = \frac{1}{2}s^2hR$, seu (propter $vh = s^2$, & $h = 2R - v$,) $s^2R^2 - \frac{1}{2}s^2vR$. Hoc itaque subductum ex Portionis Solidi $AB\beta\alpha$ momento, $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$ (§ præced.) Relinquit $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, momentum Solidi AbB (in hoc situ) respectu rectæ $\tau\alpha$. Quod per magnitudinem, $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$, (§ B.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha\kappa$ plano, $\frac{4vR^2 - 2s^2R + 2s^2v}{6vR - 3s^2}$: seu $\frac{4vR^2 - 2vhR + 2v^2h}{6vR - 3vh} = \frac{4R^2 - 2hR + 2vh}{6R - 3h = 3v} = \frac{2vR + 2vh}{3v} = \frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$: Adeoque, à bB, $\frac{2}{3}R - \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}v$: Et propterea momentum ejusdem AbB solidi (sic positi) respectu bB, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{1}{6}v^3R$. Fig. 169, 170.

Quod quidem momentum, est summa omnium planorum $\alpha\beta v$ eo spectantium, (hoc est, omnium vR, per § O, Q. prop. 17. sumptis v arithmeticè proportionalibus usque ad V eorum maximum,) in suas respectivè à bB distantias ductorum, hoc est, in $V - v$ respectivè: Hoc est, *Omnium* vVR, minus *Omn.* v^2R. Adeoque, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}V^3R - \frac{1}{3}V^3R = \frac{1}{6}V^3R$, seu $\frac{1}{6}v^3R$: ut prius.

Idem per se habebitur, (sine ope portionis $Ab\beta\alpha$.) Cum enim singula rectis bB insistentia plana Solidum complentia, æqualibus intervallis ab invicem dissita, sint æqualia ipsis $\alpha\beta v = vR$ respectivè, (ut dictum est:) Sintque in distantiis à vertice TA, ipsis v respectivè æqualibus; erit cujusque momentum respectu TA, v^2R; adeoque summa omnium (propter v arithmeticè proportionales, usque ad V maximum,) $\frac{1}{3}V^3R$, (per prop. 1 hujus.) Seu, restitutâ v minusculâ, $\frac{1}{3}v^3R$. Adeoque propter magnitudinem, $\frac{1}{2}v^2R$, (per § B.) Centri gravitatis à TA distantia $\frac{2}{3}v$: Ergo, à $\tau\alpha$, $2R - \frac{2}{3}v$, seu $\frac{2}{3}R + \frac{2}{3}h$; ut prius: Et propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $v^2R^2 - \frac{2}{3}v^3R$; seu $\frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}v^2hR$, hoc est $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$, ut prius. Atque huic momento, si addatur momentum portionis $b\beta\alpha B$, habebitur momentum portionis $Ab\beta\alpha$; eadem quæ prius.

Idemque Solidum AbB, eodem situ positum, si respectu rectæ $A\alpha$ consideretur; Momentum ejus est aggregatum omnium $\alpha\beta v$ planorum solidum complentium (hoc est, omnium vR, eo spectantium,) in suas respectivè centrorum gravitatis distantias ab $A\alpha$; (hoc est, in- G.

Fig. 169, 170. $\frac{-eR+av}{v}$ respective, per § P, Q. prop. 17.) Hoc est, Omnium $= -eR^2+avR$, seu Omnium $- aR^2+sR^2+avR$; sumptis v arithmetice proportionalibus, usque ad V eorum maximum.

Sunt autem *Omn.* a, (sumptis v arithmetice proportionalibus;) ipsum planum A b B; hoc est, $-eR+av$, per § B. prop. 17. Adeoque *Omn.* $aR^2: = -eR^3+avR^2$.

Et, *Omn.* s. (hoc sensu,) ipsum Semicirculi segmentum ABV $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; per § F. prop. 15. Adeoque *Omn.* $sR^2: = \frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$.

Item, *Omn.* av, sunt ipsæ b B rectæ, planum A b B complentes, in suas respective à T A distantias v; Hoc est, Plani A b B momentum respectu T A; Hoc est, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$: per § F. prop. 17. Adeoque *Omn.* $avR: = -\frac{3}{4}eR^3+avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$.

Ergo, *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR: = \frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Quod itaque est momentum Solidi A b B respectu A α.

Idemque momentum, per magnitudinem $vR^2-\frac{1}{2}s^2R$ (§ B) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{3eR^2+3svR-2as^2}{4vR-2s^2=2v^2}$.

H. Huic autem Solidi A b B momento sic reperto, si addatur momentum Solidi b β α B; habetur momentum Solidi A b β α, respectu A α.

Est autem b β α B Solidi magnitudo $s^2R=vbR$. per § B: Ejusque ab A α distantia Centri gravitatis, (idem quod ipsius $\alpha\beta v$ plani, per prop. 1, 5. hujus) est $\frac{-eR+av}{v}$, per § Q. prop. 17. Ergo ejusdem, respectu A α, momentum est, $-ebR^2+avbR=-2eR^3+evR^2+as^2R=-2eR^3+avR^2-svR^2+as^2R$.

Hoc itaque, Solidi A b B momento (modo reperto) $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$, additum; exhibet Solidi A b β α momentum respectu A α, $-\frac{7}{4}eR^3+avR^2-\frac{3}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$. (Adeoque totius A τ α Solidi, cum sit in hoc casu, $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, $s=0$, & $e=a-s=a=\frac{1}{2}P$, momentum respectu A α, $-\frac{7}{8}R^3P+R^3P=\frac{1}{8}R^3P$.) Et momento per magnitudinem $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$ (§ A) diviso; habetur ipsius A b β α solidi, distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{-5eR^2+4avR-svR+2as^2}{4vR+2s^2}$. (Adeoque in integro A τ α Solido, $\frac{1}{16}P$.)

Atque hoc (sive totius A τ α Solidi, sive ipsius portionis A b β α) momen-

momentum respectu Aα, est aggregatum omnium ash eo spectantium; sumptis a arcubus arithmetice proportionalibus, usque ad maximum A. Sunt enim, rectangula seu parallelepipeda bβυ, summa omnium sb (ut § A dictum est,) eorumque ab A α distantiæ, bα = a, respective.

Quæque de his Solidi portionibus dicta sunt, facile ad alias ubi opus fuerit transferentur: Quarum tum magnitudines, tum momenta & Centra gravitatis, ab his quæ jam traduntur facile derivari poterunt: Puta, Portionis bβτ, aut A b K, &c. I.

Si enim ex totius Solidi Aτα, magnitudine $2R^3$; Momento respectu τα, in erecto plano Aτα, $\frac{1}{8}R^3P$; respectu τα in erecto plano ταx, $\frac{4}{3}R^4$; & respectu plani super Aα erecti, $\frac{1}{8}R^3P$; supra traditis: Auferantur Magnitudo, & respectiva momenta Solidi Abβα, $vR^2+\frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3+\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{1}{4}eR^3+avR^2-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi bβτ, magnitudo, $2R^3-vR^2-\frac{1}{2}s^2R$; Momentum respectu τα, in erecto plano Aτα, $\frac{1}{8}R^3P-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{6}s^3R$; respectu τα in plano ταx erecto, $\frac{4}{3}R^4-\frac{2}{3}vR^3-\frac{2}{3}s^2R^2+\frac{1}{6}s^2vR$; respectu plani Aα erecti, $\frac{1}{8}R^3P+\frac{1}{4}eR^3-avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc Momenta per Magnitudinem divisa; exhibent Solidi bβτ distantiam Centri gravitais à plano Aτα, $\frac{3R^2P\,6e-R^2-6svR-4s^3}{48R^2-24vR-12s^2}$; à plano ταx, $\frac{8R^3-4vR^2-4s^2R+s^2v}{12R^2-6vR-3s^2}$; ab Aα plano; $\frac{3R^2P+10eR^2-8avR+2svR-4as^2}{16R^2-8vR\ \ 4s^2}$. Fig. 170.

Similiter: cum solidi portio AKβα parallelogrammo incumbens, Magnitudinem habeat (ex ductu Aα = 2R, in αβυ = vR, factam,) $2vR^2$; & Momentum respectu plani Aτα erecti, (ex ductu Magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani αβυ, à τα, $\frac{eR+sv}{4v}$; per § O, Q. prop. 17.) $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2$; & respectu ταx erecti plani, (ex ductu αC = R, dimidii longitudinis prismatis, in magnitudinem $2vR^2$,) $2vR^3$; & respectu Aα erecti plani, (ex ductu magnitudinis $2vR^2$, in distantiam Centri gravitatis plani αβυ ab Aα, hoc est, in $\frac{-eR+av}{v}$, per § P, Q. prop. 17.) $-2eR^3+2avR^2$ (est enim Prismatis centrum gravitatis in medio rectæ Centra gravitatis basium oppositarum jungente, per prop. 1, & 5 hujus:) Si ex his Solidi

Fig. 169, 170. Solidi A K $\beta\alpha$ magnitudine & momentis; auferantur Magnitudo & Momenta respectiva Solidi A b $\beta\alpha$; $vR^2 + \frac{1}{2}s^2R$; & $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$; & $\frac{2}{3}vR^3 + \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$; & $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$; supra tradita: Relinquentur, Solidi A b K, magnitudo, (hoc est, aggregatum *Omnium s v*, eo spectantium, sumptis *a* arithmetice proportionalibus,) $vR^2 - \frac{1}{2}s^2R = \frac{1}{2}v^2R$; Momentum respectu plani A $\tau\alpha$ erecti, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$, eo spectantia,) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R$; Momentum respectu plani $\tau\alpha\kappa$ erecti, $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR$; Momentum respectu plani A α, (hoc est, *Omnia a s v*, eo spectantia,) $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$. Atque hæc momenta, per magnitudinem divisa; exhibent, Solidi AbK, distantiam Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{6vR - 6s^2 = 6v^2}$; à plano $\tau\alpha\kappa$, $\frac{16vR^2 - 8s^2R + 2s^2v}{12vR - 6s^2 = 6v^2} = \frac{4}{3}R + \frac{s^2 - bv}{3v}$; (adeoque, à T A, $\frac{2}{3}R - \frac{s^2}{3v} = \frac{2}{3}R - \frac{1}{3}b = \frac{1}{3}v$; & propterea ejusdem respectu TA, momentum, hoc est aggregatum Omnium $\frac{1}{2}sv^2$, eo spectantium, sumptis *a* arithmetice proportionalibus, $\frac{1}{6}v^3R = \frac{2}{3}v^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{2}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$;) distantiamque ab A α plano, $\frac{-3eR^2 + 4avR + svR - 2as^2}{4vR - 2s^2 = 2v^2}$.

Item; Portionis A K b B, magnitudo & momenta, habentur ex Portionum A b K, & A b B, magnitudinibus & momentis (respective) additis: Vel subductis Portionis b $\beta\alpha$ B magnitudine & momentis, ex magnitudine & momentis (respectivis) portionis A K $\beta\alpha$: Vel etiam eodem modo quo habentur ipsius b $\beta\alpha$ B magnitudo & momenta. Nempe ex ductu plani $\alpha\beta v = vR$, in AV $= v$, habetur ipsius A K b B (prismatis) magnitudo v^2R. Atque ex hac magnitudine in $\frac{1}{2}v$ (ejusdem Centri gravitatis à T A vel b B distantiam,) habetur ejusdem, respectu T A vel b B, momentum, $\frac{1}{2}v^3R$. Ductâque in $b + \frac{1}{2}v = 2R - \frac{1}{2}v$ (distantiam à $\tau\alpha$,) ejusdem momentum respectu $\tau\alpha$, $2v^2R^2 - \frac{1}{2}v^3R$. Eâdémque magnitudine ductâ in Centri gravitatis distantiam ab A α, $\frac{-eR + av}{v}$; & à plano A $\tau\alpha$, $\frac{eR + sv}{4v}$, (easdem utique quæ sunt, in $\alpha\beta v$ plano, distantiæ ab A α, & $\tau\alpha$;) habentur ejusdem momenta, respectu A α, $av^2R - evR^2$; & respectu plani A $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}evR^2 + \frac{1}{4}sv^2R$.

Et

Et similiter de portionibus aliis, mutatis mutandis, judicandum erit. Fig. 169. 170.

Super A D α Semicirculo, erigi intelligatur Cylindri recti portio; ea ratione, ut super singulas B V ordinatim applicatas, altitudinem habeat respectivis b B æqualem, hoc est arcubus B A. Aut etiam (quod eodem recidit) super *Trilinei Restituti* A τ α, (quam *Figuram Sinuum versorum, Arcuumve*, dicimus,) rectâ A α, positus ad angulos rectos A D α Semicirculus, promoveri intelligatur usque ad T τ, Semicylindrum describens; qui Semicylindrus sinuosâ superficie, sinuosæ rectæ A d τ ad angulos rectos ubique insistente, secari intelligatur, Solidum A d τ α terminante. K.

Manifestum est, ex constructione, Plana Solidum hoc complentia, rectis b B directè insistentia, Parallelogramma esse rectangula; ex rectis b B fig. 170. hoc est arcubus B A fig. 169. in B V eorundem sinus rectos, seu ad diametrum circuli ordinatim-applicatas, ductis: Hoc est, rectangula b B V, fig. 166, 168. Hoc est, *a s* rectangula, sumptis arcubus *a* non quidem arithmetice proportionalibus, sed qui sinibus versis A V, &c. arithmetice proportionalibus conveniunt: quo plana Solidum hoc complentia sint æqualibus intervallis dissita. Adeoque A b V, Solidi frustum, est aggregatum omnium *a s*, eo spectantium, sumptis *v* sinibus versis arithmetice proportionalibus.

Manifestum item est, ex constructione, Plana rectis b β directè insistentia, Solidum idem complentia, (cum semicylindri portio sit,) semicirculo rectæ A α insistenti parallela, Segmenta esse Semicirculi, π B V α fig. 169. ipsis b β rectis fig. 170. (arcuum arithmetice proportionalium sinibus versis) æquealta. Puta rectæ x ξ, Segmentum O X D α; rectæ z ζ, Segmentum S Z D α, & sic deinceps; usque ad ultimum Φ F α seu ipsum α punctum, si totum Solidum spectemus; vel usque ad V B α segmentum, si solidi portionem A b β α, spectemus. Et sic alibi. Adeoque A b β α, Solidi portio, est aggregatum omnium V B α Segmentorum Semicirculi, eo spectantium sumptis *a* arcubus, (puta A X, A Z, &c.) arithmetice proportionalibus. Sunt autem Omnia Segmenta O X D α, S Z D α, &c. totidem Semicirculi demptis contrariis Segmentis O X A, S Z A, &c. Hoc est, Semicirculus A D α in rectam α τ ductus seu A α τ T Semicylindrus, si totum Solidum spectemus; vel, si portionem A b β α Spectemus, idem Semicirculus in α β ductus, (seu A α β K Semicylindrus:) Demptis utrobique omnibus O X A, S Z A, &c. hoc est omnibus A B V eo spectantibus; Hoc est, dempto Solido quod ipsi A τ T, vel A b K, trilineo insistere deberet ad respectivum Semicylindrum complendum;

Fig. 169, 170. (cui æquale est, quod simili portioni puncto τ adjacenti incumbit: Puta, quod AzK trilineo incumberet, incumbenti trilineo τ e ;; & sic ubique.)

Est autem Segmentum B V A quodvis, (per § F. prop. 15.) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$. Adeoque summa omnium eo spectantium, sunt *Omnia*, $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$, usque ad (eo spectantium) ultimum, quod dicamus impræsentiarum $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$.

Sunt autem *Omnes a*, (arcus arithmetice proportionales, usque ad *A* maximum,) $= \frac{1}{2}A^2$, (per prop. 1. hujus:) adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}aR = \frac{1}{4}A^2R$.

Item, *Omnes s*, (sinus recti arcubus illis convenientes, usque ad *S* maximum,) sunt $= VR$, (per § Q. prop. 17.) adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}sR := -\frac{1}{2}VR^2$.

Item, *Omnia s v*, usque ad *S V* maximum; sunt facta ex sinibus rectis arcuum arithmetice proportionalium, puta XO, ZS, &c. fig. 169. hoc est ξ o, ζ υ, &c. fig. 170. ductis in respectivos sinus versos, ut A O, A S, &c. Fig. 169, 170. hoc est, x q, z K, &c. sinuum versorum ξ x, ζ z, &c. residuos ad diametrum $A\alpha = 2R$. (Nempe, Solidi prius constructi, portio A b K, § A, I, exhibita.) Hoc est, Omnes ξ o, ζ υ, &c. in 2 *R* ductæ; demptis eisdem in ξ x, ζ z, &c. respective ductis. Sunt autem, Omn. ξ o, ζ υ, &c. hoc est Omn. *s* usque ad *S* maximum, hoc est α β υ trilineum, $= VR$; (ut modo dictum:) adeoque eædem Omnes in $A\alpha = 2R$, sunt $2VR^2$; Item eædem Omnes in respectivas ξ x, ζ z, &c. hoc est, *Omnes s h* usque ad *S H* maximum, (seu Solidi, prius constructi, portio A b β α, § A exhibita ;) sunt Triplum momenti Sectoris correspondentis B α A fig. 169. respectu rectæ A α, (ut § L prop. 17. & § A hujus ostensum est,) hoc est, $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; per § S. prop. 15. vel § A hujus. Ergo, eædem omnes ξ o, ζ υ, &c. in respectivas A O, A S, &c. seu x q, z K, &c. hoc est, *Omn. s v*, usque ad maximum *S V*; sunt, $2VR^2$ minus $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$; hoc est $VR^2 - \frac{1}{2}S^2R$ $(= \frac{1}{2}V^2R$, ut § A, I.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}sv := \frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$.

Omnia igitur, A X O, A Z S, &c. Semicirculi Segmenta, usque ad maximum (eo spectantium) A B V, (Solidum A b K complentia ;) hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sv$: usque ad $\frac{1}{2}AR - \frac{1}{2}SR + \frac{1}{2}SV$: sunt ; $\frac{1}{4}A^2R$, minus $\frac{1}{2}VR^2$, plus $\frac{1}{2}VR^2 - \frac{1}{4}S^2R$: Hoc est, $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R = \frac{1}{4}efR$. (Nempe Solidi hujus portio A b K.)

Ergo, Omnia O X α, S Z α, &c. Segmenta ; hoc est totidem Semicirculi, demptis ipsis A X O, A Z S, &c. sunt (propter Semicirculum $= \frac{1}{4}RP$;) $\frac{1}{4}ARP$, minus $\frac{1}{4}A^2R - \frac{1}{4}S^2R$; Hoc est, $\frac{1}{4}ARP - \frac{1}{4}A^2R + \frac{1}{4}S^2R$: seu (restitutis minuscularum valoribus,) $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R$

+

$+\frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$: Quæ eſt, Portionis Solidi quadrilineo Fig. 169, 170.
A b β α incumbentis magnitudo.

Adeoque, totum A d τ α ſolidum, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $s = 0$;) eſt $\frac{1}{8}RP^2 - \frac{1}{16}RP^2 = \frac{1}{16}RP^2$.

Sed & eadem totius Solidi magnitudo, ſic facilius colligitur. Sumptis in A α diametro, duobus punctis quibuſvis æqualiter à C Centro utrinque remotis, ut S, Σ: manifeſtum eſt, tum ſinus rectos S Z, Σ E, fig. 169. invicem æquales eſſe; tum rectas S z, Σ e, ſeu Z z, E e, fig. 170. hoc eſt, arcus B A, E A, ſeu B A, B α, fig. 169. ſimul æquales Semiperipheriæ A B α, ſeu τ α rectæ. Adeoque duo ſimul rectangula, z Z × Z S, e E × E Σ, æqualia uni $\tau\alpha$ × S Z. Hoc eſt, Omnes B V totius Semicirculi, in reſpectivas b B; tantundem eſſe atque Omnes B V unius quadrantis (hoc eſt ipſe quadrans A D C $= \frac{1}{8}RP$,) in $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, ductæ. Hoc eſt, $\frac{1}{16}RP^2$; totius Solidi magnitudo; ut prius.

Hinc etiam; Portionis Solidi b β τ magnitudo colligitur. Nam totum Solidum $= \frac{1}{16}RP^2$; dempto ſegmento A b β α $= \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: Relinquit Segmentum $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{1}{4}aRP + \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; Vel (ſumpto $\alpha = \frac{1}{2}P - a$,) $\frac{1}{4}\alpha^2R - \frac{1}{4}s^2R$. Quod ipſum in inquiſitione prius repertum erat. Quippe, Sumpto A K $= \tau\beta$, (adeoque reſtituto a pro α,) erit $\tau\beta$ b $=$ A K b, cujus magnitudo ſupra inventa eſt $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$; ſeu $\frac{1}{4}efR$. Eſt enim, ef, hoc eſt $a - s$ in $a + s$, $= a^2 - s^2$.

Porro; Si ex Solido A b β α $= \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$: auferatur Solidum b β α B; Hoc eſt, b B $= a$, in Segmentum Semicirculi V B α $= \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ (per § F. prop. 15. quippe quod in B V A eſt a, v, idem in B V α eſt α, h; & s utrobique idem;) hoc eſt (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) in $\frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sv$; Nempe $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, ſeu $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}eaR - \frac{1}{2}asv$; Relinquitur Solidi portio A b B $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$: Seu ſumma rectangulorum omnium as ſolidum illud complentium; ſumptis v arithmetice proportionalibus. I.

Aut etiam; Si, ex Semicylindri portione A K b B; hoc eſt, ex Semicirculi Segmento A B V $= \frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) in b B $= a$ ducto; hoc eſt, ex $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$; auferatur Semicylindri portio A b K $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K,) reſtabit Semicylindri portio A b B, $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$; ut prius.

Similiter de Momentis judicandum erit. M.

Fig. 169, 170. Nempe, Momentum Solidi A b K, respectu T A; idem est atque Momenta Omnium A B V Semicirculi Segmentorum illud complentium respectu ipsius (plani tangentis) T A: Hoc est, (per § L. prop. 15.) *Omn.* $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: seu *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a, (arithmetice proportionales usque ad, a maximum,) $\frac{1}{2}a^2$ (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2$: $= \frac{1}{4}a^2R^2$.

Item, Omnes s (eo spectantes,) sunt ipsum $\alpha\beta v = vR$, (per § Q prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}sR^2$: $= -\frac{1}{2}vR^3$.

Item, *Omnes* sv, sunt ipsum A b K Solidum ex ductu rectarum, βv in b K; hoc est (per § I.) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}svR$: $= \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}s^2R^2$.

Item, *Omn.* s^3: (per § V. prop. 13.) $=$ *Omn.* o^2R. Sunt autem *Omn.* o^2, hoc est, quadrata Ordinatim-applicatarum, Segmentum A B V complentium, seu *Omn.* s^2, sumptis v arithmetice proportionalibus: *Duplum* Momenti Segmenti A B V (fig. 169.) respectu A α: Hoc est (per § V prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^2 - \frac{1}{3}s^2R + \frac{1}{3}s^2v$: Adeoque *Omn.* o^2R: ($=$ *Omn.* s^3:) $= \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$: Et propterea *Omn.* $-\frac{1}{3}s^3$: $= -\frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2R^2 - \frac{1}{9}s^2vR$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$: Hoc est, Momentum Solidi A b K, respectu T A; est, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$.

Adeoque, propter ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$, (per § K.) Distantia Centri gravitatis à T A, $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2}$ $= R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & à $\tau\alpha$, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9a^2 - 9s^2} = R$ $+ \frac{4v^2R + 4s^2v}{9ef}$; & propterea ejusdem, respectu $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$.

Si autem Solidi hujus A b K momenta, ex respectivis Semicylindri AK$\beta\alpha$ momentis auferantur: Relinquuntur respectiva Solidi AB$\beta\alpha$ momenta. Est autem Semicylindri hujus magnitudo (ex ductu Semicirculi AD$\alpha = \frac{1}{4}RP$, in $\alpha\beta = a$,) $\frac{1}{4}aRP$; Centrique gravitatis distantia à T A, vel $\tau\alpha$, A C vel C$\alpha = R$. Adeoque ipsius respectu T A, vel $\tau\alpha$, momentum, $\frac{1}{4}aR^2P$. Unde subductis, Solidi A b K momentis, modo traditis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$; & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{13}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi A b$\beta\alpha$ momentum

tum respectu T A, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$; & Fig. 169, respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{11}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$: Hujusque 170. propterea Distantia Centri gravitatis (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) à T A, $R + \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$ $= R + \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$; à $\tau\alpha$ $R - \frac{8vR^2 - 4s^2R + 4s^2v}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$ $= R - \frac{4v^2R + 4s^2v}{9aP - 9ef}$.

Si verò eadem Solidi A b K momenta, ex respectivis Segmenti Semicylindri A K b B, auferantur: habentur respectiva Momenta Solidi A b B. Est autem segmenti semicirculi A B V magnitudo $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) quæ ducta in b B $= a$, exhibet magnitudinem segmenti Cylindri A K b B, $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$: Centrique gravitatis distantia (utpote eadem quæ Segmenti Semicirculi A B V, per § C. prop. 5.) à T A, $R - \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $R + \frac{2s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque momentum respectu T A, $\frac{1}{2}eaR^2$ $(= \frac{1}{2}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2)$ $+ \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}eaR^2 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; (eadem quæ plani A B V momenta, in a ducta.) Unde subductis respectivis solidi A b K momentis, modo exhibitis, $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2vR$, & $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{11}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{9}s^2vR$: Relinquitur Solidi A b B, momentum respectu T A, (hoc est, *Omnia a s v*, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{5}{36}s^2R^2 + \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{9}s^2vR - \frac{1}{3}as^3$; & respectu $\tau\alpha$, (hoc est, *Omnia a s b*, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{11}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{9}s^2vR + \frac{1}{3}as^3$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L) Solidi A b B, distantia Centri gravitatis à TA, $R + \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{8vR^3 - 4s^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9a^2R - 18asR + 9s^2R + 18asv} = R - \frac{4v^2R^2 + 4s^2vR - 12as^3}{9e^2R + 18asv}$.

Totumque A $\tau\alpha$ Solidum, (sive spectetur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B, perinde est;) momentum habet (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$,) respectu T A, $\frac{1}{16}R^2P^2 + \frac{4}{9}R^4$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - \frac{4}{9}R^4$.

Centrique

Fig. 170. Centrique gravitatis distantia à T A, est $R + \frac{64R^3}{9P^2}$; à $\tau\alpha$, $R - \frac{64R^3}{9P^2}$.

N. Porro; eadem A B V Segmenta plana, Solidum A b K complentia; seu, *Omnia*, $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, (per § F. prop. 15.) ab Aα, distant ipsis b B $= a$ arcubus arithmetice proportionalibus: Adeoque eorundem omnium, hoc est ipsius A b K Solidi, Momentum respectu Aα, sunt *Omn.* $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$; seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $a^2 := \frac{1}{3}a^3$ (per prop. 1.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R := \frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omn.* as: hoc est, Omnes s, trilineum $\alpha\beta\upsilon$ complentes, in a, eorundem ab Aα distantias ductæ; sunt ejusdem $\alpha\beta\upsilon$ momentum respectu Aα; hoc est (per § P, Q. prop. 17.) $-eR^2 + avR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{2}asR := \frac{1}{2}eR^3 - \frac{1}{2}avR^2$.

Item, *Omn.* asv: Sunt ipsum A b K præcedentis Solidi (ex ductu rectarum $\beta\upsilon$ in b K respective) momentum respectu Aα; hoc est, $-\frac{1}{4}eR^3 + avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R$; per § I. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asv := -\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}as^2R$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$: Hoc est ipsius A b K Solidi Momentum respectu Aα; est, $\frac{3}{8}eR^3$ $(= \frac{3}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3)$ $+ \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{6}a^3R - \frac{1}{4}as^2R$.

Hoc itaque per ipsius magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$ (per § K.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3eR^2 + 3svR + 4a^3 - 6as^2}{6a^2 - 6s^2 = 6ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum, ex momento Semicylindri A K $\beta\alpha$, Subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{4}aRP$ (§ M. ostensâ) in $\frac{1}{2}a$ distantiam Centri gravitatis ab Aα (per prop. 2.) ductâ; hoc est, ex $\frac{1}{8}a^2RP$ subductum: Relinquit Solidi A b $\beta\alpha$ momentum respectu ejusdem Aα, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{3}{8}eR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{4}as^2R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R$, per § K.) Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{3a^2P - 3eR^2 - 3svR - 4a^3 + 6as^2}{6aP - 6a^2 + 6s^2 = 6aP - 6ef}$.

Idemque Solidi A b K momentum, ex momento Solidi A K b B, subductum; hoc est, ex magnitudine $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$ (§ M. ostensâ) in $\frac{1}{2}a$ (Distantiam Centri gravitatis ab Aα) ductâ; hoc est, ex

$\frac{1}{4}ea^2R$

$\frac{1}{4}ea^2R+\frac{1}{4}a^2sv$: Relinquit Momentum Solidi A b B, respectu ejusdem A α, (seu *Omn.* $\frac{1}{2}a^2s$: eo spectantia, sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{8}eR^3-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{4}ea^2R+\frac{1}{4}as^2R+\frac{1}{4}a^2sv$, seu (propter $e=a-s$,) $-\frac{1}{8}aR^3+\frac{1}{8}sR^3-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{12}a^3R-\frac{1}{4}a^2sR+\frac{1}{4}as^2R+\frac{1}{4}a^2sv$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{2}asR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis ab A α, est $\frac{-3eR^3-3svR^2+2a^3R-6a^2sR+6as^2R+6a^2sv}{6a^2R-12asR+6s^2R(=6e^2R)+12asv}$. Fig. 170.

Totumque A $\tau\alpha$ solidum quod spectat; (sive consideretur ut A b $\beta\alpha$, sive ut A b B, perinde est,) Momentum ejus resp. A α (propter $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, & $s=0$,) est $\frac{1}{96}RP^3-\frac{1}{16}R^3P$: Distan. Cen. grav. ab Aα, $\frac{1}{6}P-\frac{R^2}{P}$.

Denique; Eadem A B V segmenta plana, Solidum A b K fig. 170. complentia Centra gravitatis habent tantundem à plano A $\tau\alpha$ distantia, quantum ab A α distant eorundem Centra in fig. 169. Eorumque omnium respectu A α fig. 169. momenta; Hoc est, *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$: (per § R. V. prop. 15.) sunt ipsum solidi A b K momentum respectu plani A $\tau\alpha$ erecti. O.

Sunt autem *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) Hoc est, arcuum arithmetice proportionalium Sinus versi, eo spectantes; idem atque A b K planum; hoc est, eR, (per § B. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2:=\frac{1}{3}eR^3$.

Et, *Omnia* s^2, eo spectantia; *Duplum* Momenti ipsius $\alpha\beta v$ respectu $\tau\alpha$; hoc est, $\frac{1}{2}eR^2+\frac{1}{2}svR$, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{6}s^2R:=-\frac{1}{12}eR^3-\frac{1}{12}svR^2$.

Item, *Omn.* s^2v; sunt *Duplum* Momenti Solidi A b K praecedentis, (ex ductu rectarum βv, in b K respective,) respectu Plani (erecti) A $\tau\alpha$; seu $\frac{1}{2}eR^3+\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{3}s^3R$; (per § I. prop. hujus) Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v:=\frac{1}{12}eR^3+\frac{1}{12}svR^2-\frac{1}{18}s^3R$.

Ergo *Omn.* $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v:=\frac{1}{3}eR^3-\frac{1}{18}s^3R=\frac{1}{3}aR^3-\frac{1}{3}sR^3-\frac{1}{18}s^3R$. Quod itaque est Solidi A b K momentum respectu erecti plani A $\tau\alpha$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{4}a^2R-\frac{1}{4}s^2R=\frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis à plano A $\tau\alpha$, est $\frac{12aR^2-12sR^2-2s^3}{9a^2-9s^2}=\frac{12eR^2-2s^3}{9ef}$.

Illudque Solidi A b K momentum; ex Semicylindri A K $\beta\alpha$ momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{4}aRP$,

atque

Fig. 169, 170. atque Distantiam Centri gravitatis a plano A τ α, eandem quæ Semicirculi à sua diametro, $\frac{8R^2}{3P}$, per § Q. prop. 15.) ex $\frac{2}{3}aR^3$: Relinquit Momentum Solidi A b β α respectu plani A τ α (erecti,) $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{18}s^3R = \frac{1}{3}fR^3 + \frac{1}{18}s^3R$. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R = \frac{1}{4}aRP - \frac{1}{4}efR$, per § K.) Distantia Centri gravitatis a plano A τ α, $\frac{12fR^2 + 2s^3}{9aP - 9ef} = \frac{12aR^2 + 12sR^2 + 2s^3}{9aP - 9a^2 + 9s^2}$.

Idemque Solidi A b K momentum; ex Segmenti Semicylindri A K b B momento respectivo subductum; hoc est (propter magnitudinem $\frac{1}{2}eaR + \frac{1}{2}asv$, & distantiam Centri gravitatis a plano A τ α, eandem quæ Segmenti Semicirculi ABV a diametro A α, $\frac{v^2R + s^2v}{eR + 3sv}$, per § R. prop. 15.) ex $\frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{6}as^2v = \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{6}as^2v$: Relinquitur Solidi A b B momentum respectu ejusdem plani A τ α, (hoc est, *Omn.* $\frac{1}{2}as^2$: sumptis v arithmetice proportionalibus,) $-\frac{1}{3}eR^3 + \frac{1}{6}av^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v = -\frac{1}{3}aR^3 + \frac{1}{3}sR^3 + \frac{1}{3}avR^2 - \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{18}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = \frac{1}{4}e^2R + \frac{1}{2}asv$, per § L.) Distantia Centri gravitatis à plano A τ α, $\frac{-12eR^3 + 12avR^2 - 6as^2R + 2s^3R + 6as^2v}{9e^2R + 18asv}$.

Totiusque A τ α Solidi, (sive consideretur ut A b β α, sive ut AbB,) Momentum respectu A τ α plani (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $v = 2R$, & $s = 0$,) $\frac{1}{6}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab A τ α plano, $\frac{8R^2}{3P}$. Nempe tantundem atque Semicylindri A K δ α: Tantundem utique ponderat respectu A τ α plani, atque tantundem inde distat; sive sit in situ A τ α, sive intelligatur pars d δ τ in situm d K A replicata Semicylindrum complere.

Sed & eadem quæ jam Traduntur Solidi A b B momenta, similiter haberi poterunt, si, ex Solidi A B β α momentis, auferantur Solidi b β α B momenta respectiva.

Est autem Solidi b β α B magnitudo, $\frac{1}{4}aRP - \frac{1}{2}a^2R + \frac{1}{2}asR - \frac{1}{2}asv$, (ut § L. ostensum est;) ejusque Centri gravitatis ab A α distantia, $\frac{1}{2}a$; Atque à τ α, & T A, quantum inde distat Centrum gravitatis Segmenti Semicirculi B V α; atque ab A τ α plano, quantum ab A α distat ipsius B V α plani Centrum gravitatis; (est enim, per prop. 1. &

& 1 hujus, in medio rectæ centra gravitatis oppoſitarum baſium conjungente: Hoc eſt, à $\tau\alpha$, $R - \frac{2s^3}{3\alpha R - 3sR + 3sb} = R - \frac{4s^3}{3RP - 6aR + 6sR - 6sv}$; à TA, $R + \frac{4s^3}{3RP - 6aR + 6sR - 6sv}$; à plano A$\tau\alpha$, $\frac{h^2R + s^2h}{3\alpha R - 3sR + 3sh} = \frac{8R^3 - 4vR^2 + 2s^2R - 2s^2v}{3R \cdot P - 6aR + 6sR - 6sv}$: Adeoque momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{8}a^2RP - \frac{1}{4}a^3R + \frac{1}{4}a^2sR - \frac{1}{4}a^2sv$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR - \frac{1}{3}as^3$; reſpectu TA, $\frac{1}{4}aR^2P - \frac{1}{2}a^2R^2 + \frac{1}{2}asR^2 - \frac{1}{2}asvR + \frac{1}{3}as^3$; reſpectu plani A$\tau\alpha$, $\frac{1}{3}aR^3 - \frac{1}{3}avR^2 + \frac{1}{6}as^2R - \frac{1}{6}as^2v$.

Hæc itaque momenta, momentis reſpectivis Solidi A b$\beta\alpha$ ſubducta, Relinquent Solidi AbB momenta reſpectiva: eadem quæ prius exhibentur.

Eademque Solidi b$\beta\alpha$B momenta, momentis reſpectivis AbB addita; exhibebunt eadem quæ prius momenta Solidi Ab$\beta\alpha$ reſpectiva.

Solidóque b$\beta\tau$, eadem applicantur omnia quæ de bKA traduntur: Subſtitutis ubique α pro a, h pro v, $\tau\alpha$ pro TA, & τT pro Aα. Similiter enim ipſis $\tau\alpha$, τT, adjacet b$\beta\tau$; atque bKA, ipſis AT, Aα. Q.

Exhibuimus itaque, in utroque Solido; tum eo ſcilicet quod ex Figuræ Sinuum verſorum A$\tau\alpha$ rectis bβ, in βv, reſpectivas Figuræ Sinuum Rectorum rectas, ductis; tum eo quod ex Figuræ Arcuum A$\tau\alpha$ rectis bB, in BV, reſpectivas Semicirculi rectas, ductis componitur; Eorumque partibus; Tum Magnitudines, tum Momenta reſpectu planorum aliquot expoſitorum, & Centrorum gravitatis ab illis planis diſtantias. Et propterea, (per prop. 26. cap. præced.) propter exhibitas Centrorum gravitatis à tribus ſaltem planis, quorum ne duo quidem ſunt invicem parallela, (puta à plano A$\tau\alpha$, & duobus aliis quæ huic in rectis Aα, $\tau\alpha$, ad rectos angulos inſiſtunt) exhibentur ipſa gravitatis Centra. Quæque de his dicta ſunt; facile erit ad alia ampliare. R.

Et quidem, quæ de Solidis his tradidimus; eadem ad Protracta & Contracta facile transferuntur. Manentibus utique, (ut in propoſitione præcedente) A$\alpha = 2R$. adeoque AV $= v$, & V$\alpha = h$: Si ſit $\tau\alpha$, major (ut in Solido Protracto) vel minor (ut in Contracto) quam $\frac{1}{2}P$, (reliquæque his parallelæ ſimiliter vel protractæ vel contractæ;) Quoties rectæ bB in calculum veniunt; pro a ſubſtituenda

 erit

Fig. 169, 170.

Fig. 169, 170. erit alia quantitas, quæ ad illam sit in eadem ratione qua est τα, ad $\frac{1}{2}P$.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum unius quadrantis α δ κ fig. 170. respicientibus, dicta sunt; eadem omnia, ad solida figuram chordarum seu subtensarum totius Semicirculi, ut A δ κ fig. 183. accommodanda erunt: Propter chordas subtensarum in semicirculo, ubique duplas sinuum rectorum arcuum dimidiatorum; adeoque figuras α δ κ fig. 170. & A δ κ fig. 183. omnino similes. Qua de re plura videantur ad prop. 22. § G, H, I, ubi hac operatione opus erit.

PROP. XIX.

Pars Prima.

A. *Ungula* Figuræ Sinuum versorum Arcuumve Aτα insistens, Aciem habens τα, est ad correspondentem Ungulam Semicirculi, ut 3 ad 2; seu *Sesquialtera.*

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ; est *Sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo ADα insistentis, aciem habentis τα, respectu aciei suæ; seu ut 4 ad 3.

Idemque in respectivis Portionibus obtinet: puta, *Ungula* Quadrilineo bβαA insistens, (aciem habens τα) est *Sesquialtera* Ungulæ respectivæ, sectori BαA insistentis; seu ut 3 ad 2. Ejusque *Momentum*, respectu aciei suæ τα, est *Sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori BαA, respectu aciei τα; seu ut 4, ad 3.

Atque hinc, eadem respective determinantur, tum quoad Magnitudines, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Figuræ Sinuum versorum, ejusve por-

portionibus, insistentibus; atque in illis quæ Semi- Fig. 169.
circulo, ejusve portionibus respectivis insistunt. 170.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,) Semiquadrantalis Ungulæ, Trilinei $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{12}R^3P$; respectu T A, $\frac{1}{3}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R$; à T A, $\frac{8}{9}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$. B. G.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$; respectu T A, $\frac{11}{12}R^3P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R$; à T A, $\frac{11}{15}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$. B. G.

Aciemque habentis $A\alpha$; Mag. $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; Momentum resp. $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; resp. TA, $\frac{1}{32}R^2P^2 - 2R^4$; Distan. Cent. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à TA, $\frac{1}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{24}RP^3 - R^3P$; respectu $T\tau$, $\frac{1}{48}RP^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{3}P - \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$; à $T\tau$, $\frac{1}{6}P + \frac{8R^2P}{3P^2 - 48R^2}$. G. K.

Aciemque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu T A, $\frac{1}{32}R^2P^2 + 2R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{48}RP^3$, respectu $T\tau$, $\frac{1}{24}RP^3 + R^3P$; G. K.

 Distantia

Fig. 169, 170. Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{6}P - \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}P + \frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$.

C. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Quadrilinei A b β α, aciem habentis τ α; magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$; Momentum respectu τ α, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{10}{9}R$

F. $+ \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; à T A, $\frac{8}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$: Momentum respectu b β, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$.

C. Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$; Momentum respectu τ α, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à τ α,

F. $\frac{8}{15}R + \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$; à T A, $\frac{22}{15}R - \frac{24shR + 20s^3}{225fR - 45sh}$: Momentum respectu b β, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu A α, $\frac{5}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$.

F. Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{5}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$; à T A, $\frac{3}{4}R +$

K. $\frac{2vR^2 - 4asR + s^2R + 2asv}{4a^2 + 8as - 8vR}$: Momentum respectu A α, $2aR^3$

$- 2avR^3$

$-2svR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$; respectu b β, $-2eR^3 + avR^2$ Fig. 169, 170.
$+ \frac{1}{6}a^3R$; Dist.Cen.grav.ab Aα, $\frac{12eR^2 - 12avR + 2a^3 + 6a^2s}{3a^2 + 5as - 6vR}$;
à b β, $\frac{-12eR^2 + 6avR + a^3}{3a^2 + 6as - 6vR}$.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$; respectu T A, $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR + s^2}{4a^2 + 8vR}R$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR + s^2}{4a^2 + 8vR}R$: F.
Momentum respectu A α, $-2eR^3 + avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; respectu b β, $2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $a - \frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 6vR}$; à b β, $\frac{12eR^2 + 2a^3}{3a^2 + 5vR}$. K.

Ungulæ Trilinei A b K, aciem habentis τ α, Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$; Momentum respectu τ α, $\frac{11}{6}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{2}{3}R^3 - \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{22}{15}R + \frac{24svR + 30s^3}{225eR + 45sv}$; à T A, $\frac{8}{15}R - \frac{24svR + 20s^3}{225eR + 45sv}$: D.
Momentum respectu βbK, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{5}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu A α, $\frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{5}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$: Distantia Centri gravitatis à β b K, $\frac{1}{2}a - \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR + 2sv}$; ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{10vR^2 - v^2R - 5asR + asv}{10eR + 2sv}$. H.

Aciemque habentis T A; Magnitudo $\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{4}svR$; Momentum respectu τ α, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{1}{6}R^3 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{8}{9}R + \frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$; à T A, $\frac{10}{9}R - \frac{4sv^2}{27eR - 9sv}$: D.
Momentum respectu β b K, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu A α, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Distan- H.

tia

Fig. 170. tia Centri gravitatis à βbK, $\frac{1}{2}a + \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{3asR + asv - 6vR^2 - v^2R}{6eR - 2sv}$.

H. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$; Momentum respectu TA, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu τα, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à TA,

L. $\frac{3}{4}R + \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$; à τα, $\frac{1}{4}R - \frac{v^2R - 2asv}{4a^2 - 8as + 8vR}$: Momentum respectu bK, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; respectu Aα, $-2eR^3 + 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R - a^2sR$; Distantia Centri gravitatis à bK, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6as + 6vR}$; ab Aα, $\frac{-12eR^2 + 12avR + 2a^3 - 6a^2s}{3a^2 - 6as + 6vR}$.

H. Aciemque habentis βbK; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2R - vR^2$; Momentum respectu TA, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}v^2R^2$; respectu τα, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}vR^3 + \frac{1}{8}v^2R^2$; Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{4}R - \frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$; à τα, $\frac{3}{4}R +$

L. $\frac{v^2R}{4a^2 - 8vR}$: Momentum respectu Aα, $2eR^3 - avR^2 + \frac{1}{6}a^3R$; respectu bK, $-2eR^3 + \frac{1}{3}a^3R$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2 - 6avR + a^3}{3a^2 - 6vR}$; à bK, $\frac{-12eR^2 + 2a^3}{3a^2 - 6vR}$.

D. Ungulæ Trilinei bβτ, aciem habentis TA; Magnitudo, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}sbR$; Momentum respectu TA, $\frac{11}{6}\alpha R^3 - \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3R$, respectu τα, $\frac{1}{3}\alpha R^3 - \frac{4}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{11}{15}R + \frac{24sbR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sb}$; à τα, $\frac{4}{15}R -$

24sbR

$\frac{24sbR + 20s^3}{225\alpha R - 225sR + 45sb}$: Momentum respectu b β, $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2 R^2$; respectu T τ, $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}\alpha s R^2 + \frac{1}{4}\alpha s b R + \frac{1}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2 R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10bR^2 - b^2 R - 5\alpha s R + \alpha s b}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$; à T τ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10bR^2 - b^2 R - 5\alpha s R\alpha + sb}{10\alpha R - 10sR + 2sb}$. H. Fig. 170.

Aciemque habentis τ α; Magnitudo, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}sbR$; Momentum respectu T A, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3 R$; respectu τ α, $\frac{5}{6}\alpha R^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3 R$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{8}{9}R + \frac{4sb^2}{27\alpha R - 27sR - 9sb}$; à τ α, $\frac{10}{9}R - \frac{4sb^2}{27\alpha R - 27sR - 9sb}$: Momentum respectu b β, $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2 R^2$; respectu T τ, $\frac{3}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}\alpha s R^2 - \frac{1}{4}\alpha s b R + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2 R^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{3\alpha s R + \alpha s b - 6bR^2 - b^2 R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$; à T τ, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{3\alpha s R + \alpha s b - 6bR^2 - b^2 R}{6\alpha R - 6sR - 2sb}$. D. H.

Aciemque habentis T τ; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2 R - \alpha s R + bR^2$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}\alpha s R^2 - \frac{1}{4}\alpha s b R + \frac{3}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2 R^2$; respectu T A, $\frac{5}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{3}{4}\alpha s R^2 + \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{4}\alpha s b R - \frac{1}{8}b^2 R^2$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{b^2 R - 2\alpha s b}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{b^2 R - 2\alpha s b}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8bR}$: Momentum respectu b β, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha b R^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 R$, respectu T τ, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + 2\alpha b R^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 R - \alpha^2 s R$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha b R + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$; à T τ, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 12\alpha b R + 2\alpha^3 - 6\alpha^2 s}{3\alpha^2 - 6\alpha s + 6bR}$. H. L.

Aciemque habentis b β; Magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2 R - bR^2$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}bR^3 - \frac{1}{8}b^2 R^2$; respectu H.

T A

Fig. 169, 170. T A $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}bR^3 + \frac{1}{8}b^2R^2$; Diſtantia Centri gravitatis
L. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{b^2R}{4\alpha^2 - 8bR}$: Momentum reſpectu T τ, $2\alpha R^3 - 2sR^3 - \alpha bR^2 + \frac{1}{6}\alpha^3 R$; reſpectu b β, $-2\alpha R^3 + 2sR^3 + \frac{1}{3}\alpha^3 R$; Diſtantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{12\alpha R^2 - 12sR^2 - 6\alpha bR + \alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$; à b β, $\frac{-12\alpha R^2 + 12sR^2 + 2\alpha^3}{3\alpha^2 - 6bR}$.

E. Ungulæ Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}ab^2$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}b$; à T A, $2R - \frac{2}{3}b$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ab^3$;
I. reſpectu T A, $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$: Diſtantia Centri gravitatis ab A α, ſeu b β, $\frac{1}{2}a$; momentum reſpectu A α, vel b β, $\frac{1}{4}a^2b^2$.

E. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$; Momentum reſpectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; reſpectu $\tau\alpha$, $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$; Diſtantia Centri gravitatis à
I. T A, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; à $\tau\alpha$, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$: Momentum reſpectu A α, ſeu b β, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$: Diſtantia Centri gravitatis, ab A α, ſeu b β, $\frac{1}{2}a$.

I. Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{2}a^2b$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à T A, $2R - \frac{1}{2}b$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2$; reſpectu T A, ab^2R
M. $- \frac{1}{4}a^2b^2$: Diſtantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{3}a$; ab A α, $\frac{2}{3}a$; Momentum reſpectu b β, $\frac{1}{6}a^3b$; reſpectu A α, $\frac{1}{3}a^3b$.

I. Aciemque habentis b β; magnitudo, $\frac{1}{2}a^2b$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b$; à T A, $2R - \frac{1}{2}b$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2$; reſpectu T A, $ab^2R - \frac{1}{4}a^2b^2$:
M. Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{3}a$; à b β, $\frac{2}{3}a$; Momentum reſpectu A α, $\frac{1}{6}a^3b$; reſpectu b β, $\frac{1}{3}a^3b$.

Eadem-

Eademque ab Ungulis b β α B, ad Ungulas b K A B, transferentur, substitutis ubique v pro h, & T A pro τ α, & vice versa. I. Fig. 169. 170.

Ungulæ Segmenti b B A, aciem habentis τ α; Magnitudo, $\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}shR-\frac{1}{2}ah^2$; Momentum respectu τ α, $\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ah^3$; respectu T A, $\frac{2}{3}fR^3-ah^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}ah^3$; respectu b B, $\frac{5}{6}fR^3-\frac{1}{4}ahR^2-\frac{1}{4}shR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sh^2R+\frac{1}{6}ah^3$; Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{30fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$; E.

à T A, $\frac{24fR^3-36ah^2R+4as^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$;

à b B, $\frac{30fR^3+18shR^2-4s^3R-12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}-h=v-\frac{24fR^3-36ah^2R+4s^3R+12ah^3}{27fR^2+9shR-18ah^2}$. Momentum respectu b β, $-\frac{1}{8}a^2R^2+vR^3+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; respectu A α, $-\frac{1}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2-\frac{1}{4}asvR+\frac{1}{2}a^2vR+\frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a+\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$; ab A α, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^3-5asR^2+s^2R^2+asvR}{-10eR^2+8avR-2svR+4as^2}$. I.

Aciemque habentis T A; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$; Momentum respectu T A, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{1}{2}svR^2-\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$; respectu τ α, $-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; respectu b B, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{11}{12}avR^2+\frac{1}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{1}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{-30eR^3+48avR^2+18svR^2-24as^2R-4s^3R-12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$; E.

à τ α, $\frac{-24eR^3+24avR^2-12as^2R+4s^3R+12as^2v}{-27eR^2+36avR+9svR-18as^2}$;

 à b B,

Fig. 169, 170. à bB, $\frac{3ceR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-\ eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$:

I. Momentum respectu bβ, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu Aα, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$.

E. Aciemque habentis bB; Magnitudo, $\frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; Momentum respectu τα, $\frac{2}{3}R^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$; respectu TA, $\frac{5}{6}R^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$; respectu bB, $-\frac{5}{6}R^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; Dist. Cen. grav. à τα $\frac{24eR^3 + 3avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R + 5s^3R + 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$;

à TA, $\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$;

I. à bB $\frac{-30eR^3 + 30avR^2 + 12as^2R - 22s^3R - 12as^2v}{27eR^2 + 27svR - 18as^2}$: Momentum respectu bβ, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu Aα, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$.

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; Momentum respectu τα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu TA, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{4}R - \frac{2asvR + s^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à TA, $\frac{1}{4}R +$

2asvR

$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à b B, $\frac{5}{4}R - b -$ Fig. 169, 170.
$\frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; Momentum respectu
b B, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$:
Momentum respectu b β, $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R$ M.
$+ \frac{1}{6}a^3v$; respectu A α, $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R$
$+ a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$; Distantia Centri gravitatis à b β,
$\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab A α,
$\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$.

Aciemque habentis b β ; Magnitudo, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 +$ I.
$\frac{1}{2}a^2v$; Momentum respectu τ α, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 +$
$\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$; respectu T A, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3$
$-\frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$; Distantia Centri gravi-
tatis à τ α, $\frac{5}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$;
à T A, $\frac{3}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à b B, $\frac{5}{4}R -$
$b - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; Momentum respectu
b B, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$: Momentum re- M.
spectu A α, $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$; respectu
b β, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$; Distantia Centri gra-
vitatis ab A α, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à b β,
$\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$.

PARS SECUNDA.

Eademque in Ungulis Figuram Sinuum Rectorum, ejus- N.
que partes spectantibus ; determinantur.

 Nempe

Nempe (retentis ſymbolis ut prius ;)

N. Ungulæ $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, Mag. $\frac{1}{8}R^2P$; Momentum

Fig. 169. 170. reſp. $\tau\alpha$, $\frac{4}{9}R^4$; diſt. à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9P}$; à $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{4}P$; Momentum reſpectu $T\tau$, vel $A\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$.

N. Aciemque habentis $T\tau$, vel $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}R^2P^2$; Diſtantia Centri

O. gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$: Momentum reſpectu Aciei ſuæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; reſpectu extremi oppoſiti, $4R^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab acie ſua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab oppoſito extremo, $\frac{8R^2}{P}$.

N. Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{16}R^2P$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{9}R^4$; Diſtantia Centri gra-

P. vitatis à $\tau\alpha$, $\frac{32R^2}{9P}$: Momentum reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

O. Aciemque habentis $\delta\kappa$; magnitudo, $\frac{1}{4}PR^2 - R^3$; Momentum reſpectu $A\alpha$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; reſpectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$; Diſtantia Centri gravitatis ab $A\alpha$,

P. $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R = \frac{P^2 - 16R^2}{32P - 128R}$.

O. Aciemque habentis $A\alpha$; magnitudo, R^3; momentum reſpectu $\delta\kappa$, $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$; reſpectu $A\alpha$, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$; Diſtantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab $A\alpha$,

P. $\frac{1}{2}P - 2R$: Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{128}R^2P^2$

+

$+\frac{1}{8}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R+\frac{p^2}{128R}$. Fig. 169, 170.

Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}sv R$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{9}v^2R^2+\frac{1}{9}s^2vR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4v^2R+4s^2v}{9eR+9sv}$: Momentum respectu $\beta\upsilon$, $\frac{1}{8}efR^2$; respectu $A\alpha$, $\frac{1}{8}a^2R^2-\frac{1}{4}asR^2+\frac{1}{8}s^2R^2+\frac{1}{4}asvR=\frac{1}{8}e^2R^2+\frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{efR}{2eR+2sv}$; ab $A\alpha$, $\frac{e^2R+2asv}{2eR+2sv}$. N. P.

Aciemque habentis $\beta\upsilon$; Magnitudo, eR^2; Momentum respectu $A\alpha$, $2vR^3-asR^2$; respectu $\beta\upsilon$, $a^2R^2-2vR^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{2vR-as}{e}$; à $\beta\upsilon$, $\frac{a^2-2vR}{e}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}efR^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}f$. O. P.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $-eR^2+avR$; Momentum respectu $\beta\upsilon$, $2vR^3-asR^2$; respectu $A\alpha$, $-a^2R^2+2asR^2+a^2vR-2vR^3$; Distantia Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2-asR}{-eR+av}$; ab $A\alpha$, $a-\frac{2vR^2-asR}{-eR+av}$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}e^2R^2+\frac{1}{4}asvR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{e^2R+2asv}{-8eR+8av}$. O. P.

Adeoque in expositis Ungulis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, earumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa gravitatis Centra. Q.

Quæque de Ungulis dicta sunt, ad solida conversione (perfectâ vel imperfectâ) descripta, facile transferentur.

Quod-

Fig. 169 170. Quodque in expositis factum est, ad alias portiones facile ampliabitur.

R. Quæque de Ungulis, Solidisque conversione factis, ex his figuris oriundis traduntur; ad ea quæ ex Protractis Contractisve figuris similiter oriuntur facile accommodantur.

Et quæ de Solidis figuram Sinuum rectorum unius quadrantis traduntur; eadem ad Solida figuram Chordarum semicirculi similiter respicientia, transferentur.

A. DIstributis, (ut ad propositiones præcedentes,) tum Semicirculo A D α, in Sectores seu Triangula; tum Figurâ Sinuum Versorum A τ α, in Quadrilinea seu Parallelogramma, Sectoribus illis seu Triangulis correspondentia: Intelligatur, utrique insistere, Semiquadrantalis Ungula, aciem habens τ α.

Quarum quidem Ungularum, ea quæ vel toti semicirculo, vel ipsius sectori ut B α A, insistit; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P, &c.) incumbentibus: quarum communis vertex sit α punctum; Basesque super Triangulorum illorum basibus (ut Y B, &c.) erectæ altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Trilineo sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α A, (quæ Sectori B α A respondet) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Parallelogrammis, β b, seu y δ ξ p, &c. incumbunt; acies habentibus in τ α rectâ continuè jacentes, altitudines vero super ipsis y b p parallelogrammorum basibus (pro semiquadrantalis ungulæ ratione) ipsis V α (respective) earundem à τ α distantiis æquales. Quæ quidem Ungulæ, sunt Cunei, seu Prismata basibus triangularibus (ipsis δ y, ξ p insistentibus) interjecta.

Sunt autem hæc Minuta Prismata, (utpote Semiquadrantales Ungulæ, parallelogrammorum quibus incumbunt, momentis respectu τ α, æquales, seu Parallelepipedorum dimidia;) Pyramidularum illarum (respectivis Triangulis incumbentium, horumque momentis respectivis æqualium,) tum singula singulorum, tum omnia omnium, Sesquialtera, (per 9 C. prop. 17.) seu ut 3 ad 2. (& quidem Pyramis illa, est ad Parallelepipedum super eadem base æque altum, ut 1 ad 3; Cuneus vero, ut 1 ad 2: Estque $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, ut 3 ad 2.)

Cunei

Cunei vero seu Prismatis cujusque Distantia Centri gravitatis Fig. 169, à τα (intellige, perpendiculare planum super τα erectum,) utpote 170. eadem quæ est basium Triangularium quibus interjacet (per prop 5. hujus;) est ad distantiam inde Centri gravitatis Pyramidis correspondentis (æque altæ) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, (per prop. 6. hujus) Hoc est, ut 8 ad 9.

Ergo; (propter $\frac{3}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{3}$) Momentum Ungulæ seu Prismatis Parallelogrammo, ut βb, incumbentis; ad momentum correspondentis Ungulæ seu Pyramidis incumbentis Triangulo, ut αB; (respectu ejusdem τα;) est ut 4 ad 3, seu Sesquitertium. Et sic ubique.

Est itaque, illius quæ ex Prismatis componitur, Ungulæ, sive toti Aτα Trilineo, sive ipsius Portioni, ut bβαA vel bαδd, vel bβτ, &c. insistentis momentum; ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ, sive toti Semicirculo, sive ipsius correspondenti sectori, BαA, vel BαD, vel segmento αBα, insistentis momentum; ut 4 ad 3, seu Sesquitertium.

Est autem toti Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis τα, momentum respectu τα; $\frac{1}{16}R^3P$; (per § T. prop. 16.) adeoque Trilineo Aτα insistentis Ungulæ, (aciem habentis τα,) momentum respectu τα, (utpote istius Sesquitertium) $\frac{1}{12}R^3P$. Et (propter magnitudinem $\frac{3}{8}R^2P$, per § C. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{1}{9}R$: Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R$; ejusque momentum respectu TA, $\frac{1}{3}R^3P$. B.

Eademque momenta ex Ungulæ toti Parallelogrammo ATτα insistentis momentis subducta, exhibent (mutatis mutandis) momenta Ungulæ aciem habentis TA; Nempe momentum Ungulæ totius Parallelogrammi ATτα (propter Aα = 2R, & τα vel TA = $\frac{1}{2}P$) aciem habentis τα; respectu aciei suæ, est $\frac{1}{2}$Aαq × $\frac{2}{3}$Aα × τα = $\frac{4}{3}R^3P$: Unde subductum momentum Ungulæ Trilinei Aτα, respectu τα; relinquit momentum Ungulæ Trilinei AτT, ungulam habentis τα, respectu τα; hoc est Ungulæ Trilinei Aτα (ipsi AτT similis & æqualis, inverso situ) aciem habentis TA, respectu ipsius TA, $\frac{11}{12}R^3P$; adeoque (propter magnitudine $\frac{3}{8}R^3P$, per § C prop. 17.) Distantia Centri gravitatis ab acie sua $\frac{22}{15}R$; atque ab extremo opposito $\frac{8}{15}$R; &, respectu hujus, momentum, $\frac{1}{3}R^3P$.

Item; Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis τα, momentum respectu τα (per § W. prop. 16.) est $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{8}sR^3 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R = \frac{1}{8}fR^3 + \frac{1}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$, Ergo Ungulæ quadrilinei correspondentis bβαA, respectu τα, momentum (utpote istius Sesquitertium) $\frac{1}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{1}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}shvR$ C.

=

Fig. 169, 170. $= \frac{5}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis distantia a $\tau\alpha$ (propter magnitudinem $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR = \frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) $\frac{30fR^2+18shR-4s^3}{27fR+9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{8shR-4s^3}{27fR+9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{8shR-4shv}{27fR+9sh} = \frac{10}{9}R + \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; Adeoque, à TA, $\frac{8}{9}R - \frac{4sh^2}{27fR+9sh}$; ejusque, respectu TA, momentum, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{2}{9}shR^2 - \frac{1}{9}sh^2R = \frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem b$\beta\alpha$A insistentis; aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas;) & (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{1}{4}shR$, per § D. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{24fR^2+4s^3}{45fR-9sh} = \frac{8}{15}R + \frac{24shR+20s^3}{225fR-45sh}$; & à TA, $\frac{66fR^2-18shR-4s^3}{45fR-9sh} = \frac{22}{15}R - \frac{24shR+20s^3}{225fR-45sh}$: Ejusque respectu TA, momentum, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$.

D. Est autem, Semiquadrantalis Ungulæ toti A$\alpha\beta$K quadrilineo insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, (propter A$\alpha = 2R$, & AK$= \alpha\beta = a$,) momentum respectu $\tau\alpha$, (aut etiam, aciem habentis TA, momentum respectu TA,) $\frac{8}{3}aR^3$. Unde, si dematur momentum Ungulæ quadrilinei b$\beta\alpha$A, modo inventum, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{5}{6}aR^3 + \frac{11}{6}sR^3 - \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; relinquitur momentum, respectu $\tau\alpha$, Ungulæ insistentis Trilineo reliquo AbK, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{11}{6}aR^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R = \frac{11}{6}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{5}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{66eR^2+18svR+4s^3}{45eR+9sv} = \frac{22}{15}R + \frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$; atque à TA, $\frac{8}{15}R - \frac{24svR+20s^3}{225eR+45sv}$. Ideoque, ejusdem AbK Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$, momentum resp. TA, $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$.

Idemque $\frac{2}{3}eR^3 - \frac{1}{9}s^3R$, est momentum Ungulæ eidem AbK insistentis, aciem habentis TA, respectu $\tau\alpha$; (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem $\frac{3}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svR$, per § E. prop. 17.) Centri gravitatis à $\tau\alpha$ distantia, $\frac{24eR^2-4s^3}{27eR-9sv} = \frac{8}{9}R + \frac{8svR-4s^3}{27eR-9sv} = \frac{8}{9}R + \frac{8svR-4svh}{27eR-9sv} = \frac{8}{9}R +$

$4sv^2$

$\frac{4sv^2}{27eR-9sv}$; Atque, à T A, $\frac{10}{9}R - \frac{4sv^2}{27eR-9sv} = \frac{30eR^2-18svR+4s^3}{27eR-9sv}$; Ideoque ejusdem, respectu T A, momentum $\frac{1}{6}eR^3 - \frac{1}{2}svR^2 + \frac{1}{9}s^3R$. Fig. 169, 170.

Similiter ostendetur; Semiquadrantalis Ungulæ Trilineo $b\beta\tau$, aciem habentis T A, momentum respectu aciei suæ T A, $\frac{11}{6}\alpha R^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$: Centriq; gravitatis distantiam à TA esse $\frac{22}{15}R + \frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$; atque à $\tau\alpha$, $\frac{8}{15}R - \frac{24shR+20s^3}{225\alpha R-225sR+45sh}$.

Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A, $\frac{2}{3}\alpha R^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$, aciei suæ, $\frac{5}{6}\alpha R^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$: Centrique gravitatis distantiam à T A, $\frac{8}{9}R + \frac{4sh^2}{27\alpha R-27sR-9sh}$: &, à $\tau\alpha$, $\frac{10}{9}R - \frac{4sh^2}{27\alpha R-27sR-9sh}$. Nam, eodem plano modo rectæ $\tau\alpha$ adjacet Trilineum $b\beta\tau$, atque (huic simile & æquale) Trilineum b K A rectæ A T: adeoque idem valet α, h, in illo, atque e, v, in hoc.

Deinde (per prop. 11. hujus § F.) si ex Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha$A, aciem habentis $\tau\alpha$, momento respectu $\tau\alpha$, auferatur Ungulæ Parallelogrammi $b\beta\alpha$ B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; relinquitur Ungula segmento b E A insistentis aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$. E.

Illa autem Parallelogrammi $b\beta\alpha$ B Ungula, aciem habentis $\tau\alpha$, est Prisma, oppositarum basium triangularium, rectis β b, α B insistentium: Cujus itaque Centri gravitatis distantia à $\tau\alpha$ (quippe eadem quæ basium triangularium, per prop. 5. hujus,) est $\frac{2}{3}\alpha V = \frac{2}{3}b$; adeoque à T A, $2R - \frac{2}{3}h$: Quæ, ductæ in magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2$ (per § F. prop. 17.) exhibent ejusdem momentum respectu aciei suæ $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 4avR^2 + 2av^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - 2as^2R - \frac{1}{3}av^3 = \frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{4}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$: Et respectu T A, $ah^2R - \frac{1}{3}ah^3$. (Quod etiam erit momentum, respectu $\tau\alpha$, aciem habentis T A.)

Illud itaque (Ungulæ $b\beta\alpha$ B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$,) ex Momento Ungulæ quadrilinei $b\beta\alpha$ A, aciem item habentis $\tau\alpha$, respectu $\tau\alpha$, (nempe $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{5}{6}aR^3$

Fig. 169, 170. $+\frac{11}{6}sR^3-\frac{1}{2}svR^2-\frac{1}{9}s^3R$, per § C.) ſubductum: relinquit $-\frac{11}{6}aR^3+\frac{11}{6}sR^3+\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{2}svR^2+\frac{4}{3}as^2R-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}as^2v=\frac{5}{6}fR^3+\frac{1}{2}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{3}ab^3$, momentum Ungulæ Trilinei b B A, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu $\tau\alpha$; ejuſque (propter magnitudinem, $-\frac{5}{4}aR^2+\frac{5}{4}sR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2=\frac{3}{4}fR^2+\frac{1}{4}sbR-\frac{1}{2}ab^2$ per § F. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, erit

$$\frac{-66eR^3+48avR^2-18svR^2+48as^2R-4s^3R-12as^2v}{-45eR^2+36avR-9svR+18as^2}=$$

$$\frac{20fR^3+18sbR^2-4s^3R-12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$$; à TA, $\frac{24fR^3-36ab^2R+4s^3R+12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$;

à b B, $$\frac{30fR^3+18sbR^2-4s^3R-12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}$$

$$-b=v-\frac{24fR^3-36ab^2R+4s^3R+12ab^3}{27fR^2+9sbR-18ab^2}=$$

$$\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{-45aR^2+45sR^2+36avR-9svR+18as^2}$$: Adeoque ejuſdem reſpectu T A momentum, $\frac{2}{3}fR^3-ab^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}ab^3=-\frac{2}{3}eR^3+\frac{2}{3}avR^2-\frac{4}{3}as^2R+\frac{1}{9}s^3R+\frac{1}{3}as^2v$; & reſpectu b B, $\frac{5}{6}fR^3-\frac{3}{4}abR^2-\frac{1}{4}sbR^2-\frac{1}{9}s^3R-\frac{1}{4}sb^2R+\frac{1}{6}ab^3=\frac{2}{3}eR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$.

Atque ex illo porro momento Ungulæ ipſi b B A inſiſtentis, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu ipſius $\tau\alpha$; ſi ſubducatur Priſmatis eidem bBA inſiſtentis, altitudinem habentis V$\alpha=b$, momentum reſpectu ipſius $\tau\alpha$; hoc eſt, ipſius b B A, reſpectu ejuſdem $\tau\alpha$, momentum in $b=R-v$, ductum; hoc eſt (per § F. prop. 17.) $-\frac{5}{4}eR^2+avR-\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2$ in $b=2R-v$; hoc eſt, $-\frac{5}{4}ebR^2+avbR-\frac{1}{4}svbR+\frac{1}{2}as^2b=-\frac{5}{2}eR^3+\frac{5}{4}evR^2+2as^2R-\frac{1}{4}s^3R-\frac{1}{2}as^2v$: Relinquitur Ungulæ eidem b B A inſiſtentis, aciem habentis b B momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}aR^3-\frac{2}{3}sR^3+\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{2}{3}as^2R+\frac{5}{36}s^3R+\frac{1}{6}as^2v$. Adeoque (propter mag. $\frac{3}{4}eR^2+\frac{3}{4}svR-\frac{1}{2}as^2$, per § F. pr. 17) Diſt. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{24eR^3+3avR^2+27svR^2-24as^2R+5s^3R+6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$

& à T A, $$\frac{30eR^3-3avR^2+27svR^2-12as^2R-5s^3R-6as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2};$$

atque à b B, $$\frac{-30eR^3+30avR^2+12as^2R-22s^3R-12as^2v}{27eR^2+27svR-18as^2}$$: Ejuſque momentum reſpectu T A, $\frac{5}{6}eR^3-\frac{1}{12}avR^2+\frac{3}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{5}{36}s^3R-\frac{1}{6}as^2v$: Et reſpectu b B, $-\frac{5}{6}eR^3+\frac{5}{6}avR^2+\frac{1}{3}as^2R-\frac{11}{18}s^3R-\frac{1}{3}as^2v$.

Idemque

Idemque $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{3}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}as^2v$, est momentum respectu b B, Ungulæ eidem b B A insistentis aciem habentis T A, (propter altitudines & distantias ubique reciprocatas:) Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à b B, Fig. 169, 170.

$$\frac{30eR^3 - 3avR^2 + 27svR^2 - 12as^2R - 5s^3R - 6as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$$: Adeoque à T A, $$\frac{-30eR^3 + 48avR^2 + 18svR^2 - 24as^2R - 4s^3R - 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2};$$ à τα, $$\frac{-24eR^3 + 24avR^2 - 12as^2R + 4s^3R + 12as^2v}{-27eR^2 + 36avR + 9svR - 18as^2}$$: Ejusque respectu T A momentum, $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu τα, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$.

Illud autem, ejusdem Ungulæ, trilineo b B A insistentis aciem habentis T A, momentum, respectu ipsius T A, ex momento Ungulæ quadrilineo b β α A insistentis aciem item habentis T A, respectu ejusdem T A, subductum; hoc est, ex $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R = \frac{11}{6}aR^3 + \frac{1}{6}sR^3 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, (per § C.) relinquit Ungulæ parallelogrammo b β α B insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 + \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v = \frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$.

Idem habetur, si ex Ungulæ parallelogrammi K β α A, aciem habentis T A, momento respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3$; subducatur parallelogrammi K b B A, (aciem item habentis T A,) momentum respectu T A, $\frac{1}{3}av^3$: Quippe quod restat, est Ungulæ Parallelogrammi b β α B, aciem habentis T A, momentum respectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3$; ut prius.

Adeoque, (propter magnitudinem, $2abR - \frac{1}{2}ab^2 = 2aR^2 - \frac{1}{2}av^2$, per § F. prop. 17.) Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; atq; à τα, $2R - \frac{16R^3 - 2v^3}{12R^2 - 3v^2} = \frac{8R^3 - 6v^2R + 2v^3}{12R^2 - 3v^2}$; ejusque respectu τα momentum, $\frac{4}{3}aR^3 - av^2R + \frac{1}{3}av^3 = \frac{4}{3}aR^3 - \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v = ab^2R - \frac{1}{3}ab^3$; ut etiam prius ostensum est.

Aut etiam ejusdem Ungulæ Parallelogrammo b β α B insistentis, aciem habentis T A, magnitudo, momenta, & Centrum gravitatis, per se facile determinantur; est utique solidum ex Prismate, eique super imposito Cuneo constante; eidem b β α B super eminentibus: Quorum utriusque separatim magnitudines, & Centra gravitatis, adeoque & momenta, facile determinantur; adeoque & aggregati ex utroque conflati.

F. Fig. 169, 170. Accedimus ad Ungularum Trilinei A τ α, ejusque partium, aciem habentium τ α aut huic parallelam, momenta respectu A α: Aciemque habentium A α, momenta respectu τ α aut parallelarum huic; quæque hinc dependent.

Si *Trilineo restituto*, seu *Figuræ Sinuum versorum*, A τ α, insistat Semiquadrantalis Ungula aciem habens τ α: Quæ rectis b β, planum complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, sunt (propter angulum Semiquadrantalem) Triangula Rectangula Isoscelia; ipsarum b β, seu b, semiquadrata: Adeoque ipsa Ungula, (sive quæ toti A τ α, sive quæ ipsius portioni A b β α insistit,) aggregatum omnium $\frac{1}{2}b^2$, eo spectantium. Eorumque ab A α distantia est b B ($=a$) respective: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ momentum, respectu A α, est Aggregatum omnium $\frac{1}{2}ab^2$, eo spectantium, sumptis a arithmetice proportionalibus: Hoc est, Arcuum arithmetice proportionalium in Semiquadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum.

Quæ autem rectis b B, æqualiter ab invicem distantibus, planum similiter complentibus, insistunt plana Ungulam complentia, totidem erunt parallelogramma, quorum bases b B $= a$, & altitudines (propter angulum Semiquadrantalem) æquales eorum a τ α distantiis respectivis, hoc est ipsis V α $= b$ respective: Adeoque Ungula, sive quæ toti A τ α Trilineo insistit, sive quæ ipsius Portioni A b B; est Aggregatum omnium ab, eo spectantium; sumptis A B, seu A V, hoc est v, arithmetice proportionalibus. Eorumque ab A α distantia, $\frac{1}{2}$ b B $= \frac{1}{2}a$ respective, (per prop. 2. hujus.) Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu A α; Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2b$: Hoc est, Semiquadratorum arcuum sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentium, in sinus versus arcuum ad semicirculum residuorum.

Hujusque Ungulæ aciem habentis τ α momentum respectu A α, idem est atque Ungulæ aciem habentis A α momentum respectu τ α; propter magnitudines & distantias reciprocatas. Ut ad § H. prop. 16. ostensum est.

Nempe, si eidem Trilineo Restituto A τ α, Ungula insistat semiquadrantalis, aciem habens A α: Quæ rectis b B insistunt plana, Ungulam complentia, erunt (propter angulum ad A α semiquadrantalem) ipsarum b B Semiquadrata, seu $\frac{1}{2}a^2$; adeoque ipsa Ungula, sive quæ toti A τ α, sive quæ illius Segmento A b B, insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2$; sumptis A B, seu A V, hoc est v, arithmetice pro-

proportionalibus. Eorumque à $\tau\alpha$ distantia est $V\alpha = h$: Adeoque simul omnium, hoc est ipsius Ungulæ, momentum respectu $\tau\alpha$; est aggregatum omnium $\frac{1}{2}v^2h$; sumptis v arithmetice proportionalibus. Atque eadem ratione, ejusdem respectu T A, erit Aggregatum omnium $\frac{1}{2}a^2v$; propter singulorum planorum à T A distantiam, v respective. Fig. 169. 170.

Planaque ipsis b β insistentia, eandem Ungulam complentia, erunt rectangula b β α, hoc est ah respective; eorumque a $\tau\alpha$ distantia, $\frac{1}{2}h$: Adeoque Ungulæ aciem habentis A α, sive quæ toti A $\tau\alpha$, sive quæ ipsius portioni A b $\beta\alpha$ insistit, est aggregatum omnium $\frac{1}{2}ah^2$, eo spectantium; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sed & eadem Ungula, si tertiis adhuc planis secetur, basi parallelis, æqualiter ab invicem distantibus: Erunt ea plana, (propter obliquam Ungulæ sectionem, adeoque plana superiora continue magis magisque ab A α deficientia,) æqualia ipsis A $\alpha\tau$, x $\xi\tau$, & sic deinceps, usque ad ultimum f φ τ, seu ipsum τ punctum; si Ungulam totius A $\tau\alpha$ trilinei spectemus: Vel, si portionem A b $\beta\alpha$ spectemus; ipsis A α β b, x ξ β b, & sic deinceps usque ad ipsam β b. Hoc est, in totius Trilinei Ungula; æqualia totidem A $\alpha\tau$ planis (hoc est, prismati ipsi A $\tau\alpha$ insistenti altitudinem habenti $\tau\alpha$,) demptis omnibus A x $\xi\alpha$, A z $\zeta\alpha$, &c. (hoc est, demptâ contrariâ Ungulâ super eodem plano aciem habente T τ.) Et similiter, in portione A b $\beta\alpha$; æqualia totidem A b $\beta\alpha$ planis (seu prismati A b $\beta\alpha$ altitudinem habenti ipsi $\alpha\beta$ æqualem) demptis omnibus A x $\xi\alpha$, A z $\zeta\alpha$, &c. eo spectantibus; hoc est, demptâ Ungulâ contraria A b $\beta\alpha$ aciem habente b β. (Ut supra dictum est, § G. prop. 17.) Ergo, Ungulæ momentum, (sive totius Trilinei, sive portionis A b $\beta\alpha$,) respectu $\tau\alpha$; est Aggregatum Momenti planorum horum omnium. Quæ calculo facile exquirentur.

Est utique ejusmodi plani A b $\beta\alpha$ cujusvis momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR - \frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; per § D. prop. 17. Adeoque prismatis huic insistentis, altitudinem habentis $\beta\alpha = a$; $\frac{3}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR$.

Item, *Omnia* $\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$, usque ad maximum $\frac{3}{4}AR^2 + \frac{1}{4}SR^2 + \frac{1}{4}SHR$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β, momentum respectu $\tau\alpha$; (adeoque & aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b β; propter altitudines & distantias reciprocatas, ut sæpius ante dictum est.)

Sunt autem *omnes a*, (arcus arithmetice proportionales,) usque ad A maximum, $\frac{1}{2}A^2$; per prop. 1. hujus. Ergo *Omn.* $\frac{3}{4}aR^2 := \frac{3}{8}A^2R^2$.

Item,

Fig. 169, 170. Item, *Omnes S*, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum $\alpha\beta$, Trilineum, hoc est VR, per § O, Q, prop. 17.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2 := \frac{1}{4}VR^3$.

Et *Omnia sh*, sunt $VR^2 + \frac{1}{2}S^2R$, (ut ostensum est ad § A. prop. 18.) Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}shR := \frac{1}{4}VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$: (hoc est, Ungulæ A b β α aciem habentis b β, momentum respectu τ α; vel aciem habentis τ α, momentum respectu b β;) sunt $\frac{1}{8}A^2R^2 + VR^3 + \frac{1}{8}S^2R^2$; seu (restitutis minuscularum valoribus) $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$.

(Quod quidem, ex Prismatis respectu τ α momento, modò reperto, $\frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}ashR = \frac{1}{4}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR$, subductum; relinquit Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, momentum respectu τ α, (vel etiam aciem habentis τ α, momentum respectu A α;) Nempe, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Sed & idem (sine ope Prismatis) mox alio modo obtinebitur.)

Illud autem $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ Momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R + \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; adeoque à T A, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR + s^2}{8vR + 4a^2}R$; ejusque respectu T A momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$. Quod ipsum est aciem habentis T A, momentum respectu b β.

Idemque $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis τ α, magnitudinem, $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 5asR + s^2R + asv}{6aR + 10sR - 2sv}$; ejusque respectu A α, momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$: Idemque est momentum Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, respectu τ α; prius exhibitum.

Quod quidem $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum, exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; adeoque à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{2vR^2 + s^2R + 2asv - 4asR}{4a^2 + 8as - 8vR}$; ejusque, respectu T A,

TA, Momentum $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: aciemve habentis T A, momentum respectu A α. Fig. 169, 170.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$ momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 - \frac{1}{4}sbR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$ (§ D. prop. 17. inventam,) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$; adeoque à b β, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^2 - s^2R - 3asR - asv}{10aR + 6sR + 2sv}$: Ejusque, respectu b β, momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$; idem quod prius repertum est momentum aciem habentis b β, respectu T A.

Adeoque; Si totius A τ α Ungulas spectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, $s = 0$;) Erit Ungulæ A τ α, aciem habentis T τ, magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 + 2R^3$: Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu TA, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$; à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 + 16R^2}$. G.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$; Momentum respectu τ α, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$; respectu T A, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{3}{4}R - \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$; à TA, $\frac{5}{4}R + \frac{4R^3}{P^2 - 16R^2}$.

Aciemque habentis τ α; Magnitudo, $\frac{3}{8}R^2P$; momentum respectu T τ; $\frac{3}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu A α, $\frac{3}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

Aciemque habentis T A; Mgnitudo $\frac{5}{8}R^2P$: Momentum respectu T τ, $\frac{5}{32}R^2P^2 + 2R^4$; respectu A α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - 2R^4$: Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{5P}$; ab A α, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{5P}$.

Eademque per se poterant, eodem modo, calculo exquiri; quo Ungularum portionis A b β α momenta prius exquirebantur; quæque inde dependent.

Ex

H. Fig. 169. 170. Ex his item sic traditis, Ungularum portionis $b\beta\tau$ momenta (quæque hinc dependent) haberi poterunt. Nempe; ex Momentis Ungularum totius Trilinei $A\tau\alpha$, subductis respectivis Ungularum portionis $Ab\beta\alpha$, restant Momenta respectiva Ungularum $b\beta\tau$; sive respectu ipsarum $\tau\alpha$, TA, sive respectu ipsarum $A\alpha$, $T\tau$, &c. Atque ex cognitis aliquibus reliqua facile derivantur.

Sed & eadem possunt per se eodem modo exquiri, quo in ipsis $Ab\beta\alpha$ factum est.

Est utique (per § E. prop. 17.) plani cujusque $b\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; Adeoque *Omnia*, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; (hoc est, momenta planorum omnium Ungulam $b\beta\tau$, aciem habentem $b\beta$, complentium;) sunt istius Ungulæ momentum.

Sed *Omnes* α, (arcus arithmetice proportionales, ab ipso α, usque ad maximum αb seu $\tau\beta = \alpha$,) sunt, (per prop. 1. hujus,) $\frac{1}{2}\alpha^2$. Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}\alpha R^2 := \frac{1}{8}\alpha^2 R^2$.

Item *Omnes* s, (eorundem arcuum Sinus recti,) sunt ipsum Trilineum $\tau\beta\upsilon = hR$ per § Q. prop. 17.) Ergo *Omn.* $\frac{1}{4}sR^2 := -\frac{1}{4}hR^3$.

Item *Omnia* sh (ad $b\beta\tau$ spectantia) $\frac{1}{2}h^2 R$, (per § A. prop. 18.) Ergo *Omn.* $-\frac{1}{4}shR := -\frac{1}{8}h^2 R^2$.

Ergo; *Omn.* $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR^2$: (hoc est, Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, momentum respectu $\tau\alpha$; seu aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $b\beta$;) $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2 R^2 = \frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - hR^3 + \frac{1}{8}s^2 R^2$; seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{1}{32}R^2 P^2 - \frac{1}{8}aR^2 P + \frac{1}{8}a^2 R^2 - 2R^4 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2 R^2$.

Quod quidem, $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2 R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $b\beta$, magnitudinem $\frac{1}{2}\alpha^2 R - hR^2$ (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem centri gravitatis distantiam à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \dfrac{h^2 R}{4\alpha^2 - 8hR}$; adeoque à TA, $\frac{3}{4}R + \dfrac{h^2 R}{4\alpha^2 - 8hR}$; ejusque respectu TA momentum, $\frac{3}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{3}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2 R^2$.

Idemque $\frac{1}{8}\alpha^2 R^2 - \frac{1}{4}hR^3 - \frac{1}{8}h^2 R^2$ momentum, per Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à $b\beta$, $\frac{1}{2}\alpha + \dfrac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2 R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$; à $T\tau$, $\frac{1}{2}\alpha - \dfrac{3\alpha sR + \alpha sh - 6hR^2 - h^2 R}{6\alpha R - 6sR - 2sh}$.

Adeoque

Adeoque ejuſdem Ungulæ b $\beta\tau$ (aciem habentis $\tau\alpha$) momentum reſpectu T τ, $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{1}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque eſt, aciem habentis T τ, momentum reſpectu $\tau\alpha$. Fig. 169, 170.

Quod quidem $\frac{1}{8}\alpha^2R^2 - \frac{1}{4}\alpha sR^2 - \frac{1}{4}\alpha shR + \frac{1}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ b $\beta\tau$, aciem habentis T τ, magnitudinem, $\frac{1}{2}\alpha^2R - \alpha sR + hR^2$ (per § H. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R + \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; adeoque à T A, $\frac{5}{4}R - \frac{h^2R - 2\alpha sh}{4\alpha^2 - 8\alpha s + 8hR}$; ejuſque, reſpectu T A, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$. Idemque eſt, aciem habentis T A, momentum reſpectu T τ.

Atque hoc demum $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}\alpha sR^2 + \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{4}\alpha shR - \frac{1}{8}h^2R^2$ momentum, per Ungulæ b $\beta\tau$ aciem habentis T A, magnitudinem, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$ (per § E. prop. 17.) diviſum; exhibet ejuſdem diſtantiam Centri gravitatis à T τ, $\frac{1}{2}\alpha + \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; adeoque, à b β, $\frac{1}{2}\alpha - \frac{10hR^2 - h^2R - 5\alpha sR + \alpha sh}{10\alpha R - 10sR + 2sh}$; ejuſque, reſpectu b β, momentum, $\frac{5}{8}\alpha^2R^2 - \frac{5}{4}hR^3 + \frac{1}{8}h^2R^2$; idem quod momentum, aciem habentis b β, momentum reſpectu T A, modo [illegible]rtum.

Quæque de Ungulis b $\beta\tau$ hic dicta ſunt; eadem omnino Ungulis A b K conveniunt; ſubſtitutis a pro α, v pro h, T A pro $\tau\alpha$, A α pro T τ, & vice versâ. Quippe A b K portio, ſimiliter adjacet rectis T A, A α, atque τ b β rectis $\alpha\tau$, τ T.

Solidorum autem, ſive ſemiſolidorum, reſpondentium magnitudo, ad magnitudinem Ungulæ correſpondentis; eorúmque momentum ad momentum hujus, (reſp. ejuſdem plani ad converſionis axem, aciémque Ungulæ, recti;) eſt ut P vel $\frac{1}{2}P$, ad R. Diſtantiaque à planis ad converſionis axem, aciemve Ungulæ, rectis, utrobique eadem reſpective.

Deinde: Si ex Ungularum B b $\beta\alpha$ momentis, § F traditis; auferantur reſpectiva Ungularum B b $\beta\alpha$ momenta: habentur reſpectiva Momenta Ungularum A b B: & quæ hinc dependent. I.

Eſt autem Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis b β vel A α, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}a^2h$, per § I. prop. 17. Centrique gravitatis, in media longitudine poſiti, per prop. 2. diſtantiam à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}h$; adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$:) Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2h^2$; reſpectu T A, $a^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2$: Illudque $\frac{1}{4}a^2h^2$, (ob diſtantias & altitudines reciprocatas,) momentum etiam, aciem habentis $\tau\alpha$, reſpectu b β vel

Fig. 169, 170. Aα: Et $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2$, momentum etiam aciem habentis TA, respectu bβ vel Aα. Estque utriusque horum, Distantia Centri gravitatis à bβ vel Aα, $\frac{1}{2}a$, per prop. 2. Magnitudo autem, aciem habentis τα, $\frac{1}{2}ab^2$; aciemque habentis TA, $2abR - \frac{1}{2}ab^2$; (per § F. prop. 17.) Adeoq; Distantia Centri gravitatis à τα, $\frac{2}{3}b$; à TA, $R - \frac{2}{3}b$.

Si, itaque ex Ungulæ Abβα, aciem habentis TA, momento respectu bβ; aciemve habentis bβ, momento respectu TA; $\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur respectivum Ungulæ Bbβα momentum, modo exhibitum, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ AbB, aciem habentis TA, momentum respectu bβ; aciemve habentis bβ, momentum respectu TA; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod per Ungulæ AbB, aciem habentis TA, magnitudinem, $-\frac{3}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri grav. à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - s^2R^2 - 3asR^2 - asvR}{-6eR^2 + 8avR + 2svR - 4as^2}$.

Item; si ex Ungulæ Abβα, aciem habentis TA, momento respectu Aα; aciemve habentis Aα, momento respectu TA; $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}a$ [illegible] $- vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ Bbβα, modò exhibitum, $a^2bR - \frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ AbB, aciem habentis TA, momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum respectu TA; $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item; Si ex Ungulæ Abβα, aciem habentis τα, momento respectu bβ; aciemve habentis bβ, momento respectu τα; $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2$, (per § F.) Auferatur correspondens momentum Ungulæ Bbβα, modò exhibitum, $\frac{1}{4}a^2b^2 = a^2R^2 - a^2vR + \frac{1}{4}a^2v^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquitur, Ungulæ AbB, aciem habentis τα, momentum respectu bβ; aciemve habentis bβ, momentum respectu τα, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ AbB, aciem habentis τα, magnitudinem $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}sbR - \frac{1}{2}ab^2 = -\frac{5}{4}aR^2 + \frac{5}{4}sR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$, (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis à bβ, $\frac{1}{2}a + \frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$; ab Aα, $\frac{1}{2}a -$

$\frac{8vR^3 - 5asR^2 + s^2R^2 + asvR}{-10eR^2 + 8avR - 2svR + 4as^2}$. Idemque, per Ungulæ A b B, Fig. 169, 170. aciem habentis b β, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Ungulæ distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$: Adeoque, à b B, $\frac{1}{4}R - h$ $(= v - \frac{1}{4}R) - \frac{2vR^3 + a^2vR - s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8vR^2 + 4a^2v}$. Et propterea ejusdem, respectu b B, momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 + vR^3 - \frac{3}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}a^2s^2$. Idemque est Ungulæ A b B, aciem habentis b B, momentum respectu b β. Quod itaque per hujus magnitudinem, $\frac{3}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$ (per § F. prop. 17.) divisum; exhibet hujus Ungulæ A b B, aciem habentis b B, distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{1}{4}a + \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^3 - 7s^2R^2 + 3asR^2 - 3asvR}{6eR^2 + 6svR - 4as^2}$; ejusque respectu A α momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3 + \frac{7}{8}s^2R^2 - \frac{3}{4}asR^2 + \frac{3}{4}asvR - \frac{1}{4}a^2s^2$: quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est Ungulæ A b B, aciem habentis A α, momentum respectu b B.

Item; si ex Ungulæ A b $\beta\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, momento resp. A α, aciemve habentis A α, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - \frac{1}{4}asvR - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$ (per § F.) Auferatur correspondens Ungulæ B b $\beta\alpha$ momentum, modo exhibitum, $\frac{1}{4}a^2h^2 = a^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$: Relinquetur, Ungulæ A b B, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2$. Quod, per Ungulæ A b B, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, (per § I. prop. 17.) divisum; exhibet hujus dist. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}R - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$; à T A, $\frac{1}{4}R + \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$: Adeoque à b B, $\frac{1}{4}R - h\ (= v - \frac{1}{4}R) - \frac{2asvR + a^2vR - 2vR^3 + s^2R^2 - 2a^2s^2}{-4a^2R + 8asR - 8vR^2 + 4a^2v}$. Et propterea, ejusdem respectu b B momentum, $\frac{3}{8}a^2R^2 - vR^3$

Fig.169, 170. $+\frac{3}{8}s^2K^2-\frac{1}{4}asK^2+\frac{3}{4}asvR-\frac{1}{4}a^2s^2$; ut prius. Atque hinc etiam, regrediendo, reliqua quæ Ungulam A b B aciem habentem b B spectantia modò tradebantur, similiter derivari poterunt.

Sed & hæc omnia Momenta Ungularum A b B, (quæque hinc dependent,) similiter haberi possent, ex Ungulis A K b B, subductis respectivis Ungulis A b K. Habentur autem Ungularum A K b B momenta, reliquaque inde dependentia, eodem plano modo quo Ungularum B b β α: substitutis ubique v pro b, & T A pro $\tau\alpha$, & vice versa. Quæ monuisse sufficiat.

K. Restat, ut Ungularum acies habentium A α, (aut huic parallelas,) momenta respectu acierum suarum (rectarumque his parallelarum) ostendam; & Centrorum gravitatis inde distantias.

Si intelligatur portioni A b β α semiquadrantalis Ungula insistere aciem habens b β; quæ hanc complent plana ipsi A τ α parallela, sunt ipsa A x ξ α, A z ζ α, &c. usque ad A b β α; seu Omnia A b β α, eo spectantia, ut ad § F. ostensum est: Adeoque, & eorum omnium, respectu A α, momenta; hoc est, (per § H. prop. 17.) *Omnia*, $\frac{1}{2}a^2R+asR-vK^2$, eo spectantia, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) est ipsum Ungulæ A b β α aciem habentis b β, momentum respectu A α; aut etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) aciem habentis A α, momentum respectu b β.

Sunt autem *Omnia* a^2, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{3}a^3$; per prop. 1. hujus. Adeoque *Omn* $\frac{1}{2}a^2R$: $=\frac{1}{6}a^3R$.

Et *Omnia* as, (hoc est, momentum respectu A α omnium βv, trilineum $\alpha\beta v$ complentium;) sunt, $-eK^2+avR$, per § Q. prop. 17. Adeoque, *Omn.* asR: $=-eR^3+avK^2$.

Item, *Omnes* v, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) hoc est, ipsum A b K trilineum, est eR; per § B. prop. 17. Adeoque *Omn* $-vK^2$: $=-eK^3$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2R+asR-vK^2$; hoc est, momentum Ungulæ A b β α aciem habentis b β respectu A α; aciemve habentis A α momentum respectu b β; est, $-:eK^3+avK^2+\frac{1}{6}a^3R$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ A b β α, aciem habentis b β, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+vK^2$, (per § H. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab A α, $a-\frac{1:eK^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Adeoque, à b β, $\frac{1:eK^2+2a^3}{3a^2+6vR}$: Et propterea; ejusdem, respectu b β, momentum, $:eK^3+\frac{1}{3}a^3R$.

Idemque,

Idemque $-2eR^3+avR^2+\frac{1}{6}a^3R$ momentum, divisum per Ungulæ A b β α aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2$ (per § H. prop. 17.) exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à b β, $\frac{-12eR^2+6avR+a^3}{3a^2+6as-6vR}$; Adeoq; ab A α, $\frac{12eR^2-12avR+2a^3+6a^2s}{3a^2+6as-6vR}$; & propterea, ejusdem, respectu A α, momentum (seu *Omnia* a^2h eò spectantia,) $2eR^3-2avR^2+\frac{1}{3}a^3R+a^2sR$. Fig. 169. 170.

Et quidem si totius A τ α Ungulam spectemus; erit (propter $a=\frac{1}{2}P$, $v=2R$, & $s=0$;) aciem habentis T τ, momentum respectu A α; aciemve habentis A α momentum respectu T τ, $\frac{1}{48}RP^3$. Adeoque (propter illius magnitudinem $\frac{1}{8}RP^2+2R^3$; hujusque $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$, per § G. prop. 17.) erit, Aciem habentis T τ Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{P^3}{6P^2+96R^2}=\frac{1}{6}P-\frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; à T τ, $\frac{1}{3}P+\frac{8R^2P}{3P^2+48R^2}$; ejusque, respectu T τ, momentum, $\frac{1}{24}RP^3+R^3P$.

Aciemque habentis A α, Distantia Centri gravitatis à T τ, $\frac{P^3}{6P^2-96R^2}=\frac{1}{6}P+\frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; ab A α, $\frac{1}{3}P-\frac{8R^2P}{3P^2-48R^2}$; hujusque, respectu A α, momentum, $\frac{1}{24}RP^3-R^3P$.

Si autem ex Ungularum parallelogrammi A K β α momentis, auferantur respectiva momenta Ungularum A b β α; habentur Ungularum A b K momenta respectiva, L.

Est autem Ungulæ A K β α aciem habentis K β, vel A α, (utpote Prismatis, oppositarum basium triangularium,) magnitudo, $\frac{1}{2}a^2\times 2R=a^2R$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}a$; à termino opposito, $\frac{1}{3}a$. Adeoque Aciem habentis b β momentum respectu A α, vel aciem habentis A α momentum respectu b β, est $\frac{1}{3}a^3R$: Aciemque habentis b β momentum respectu ipsius b β; aciemve habentis A α, respectu ipsius A α, momentum $\frac{2}{3}a^3R$.

Ex his itaque; si subducantur respectiva Ungularum A b β α momenta, § K tradita: Relinquitur Ungularum A b K momenta respectiva.

Nempe; Ungulæ A b K aciem habentis β b K; momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu β b K; $2eR^3-avR^2+\frac{1}{6}a^3R$. Adeoque (propter illius magnitudinem, $\frac{1}{2}a^2R-vR^2$; hujus $\frac{1}{2}a^2R-asR+vR^2$; per § H. prop. 17.) Aciem habentis

Fig. 169, 170. habentis βbK, Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6vR}$; adeoque à βbK, $\frac{-12eR^2+2a^3}{3a^2-6vR}$: Aciemque habentis Aα, Distantia Centri gravitatis à βbK, $\frac{12eR^2-6avR+a^3}{3a^2-6as+6vR}$; adeoque ab Aα, $\frac{-12eR^2+12avR+2a^3-6a^2s}{3a^2-6as+6vR}$.

Aciemque habentis βbK, momentum respectu βbK, $-2eR^3+\frac{1}{3}a^3R$; Aciemque habentis Aα momentum respectu Aα, $-2eR^3+2avR^2+\frac{1}{3}a^3R-a^2sR$.

Quæque de Ungulis AbK dicta sunt; eadem Ungulis τbβ, accommodantur, substitutis α pro a, b pro v; & Tτ, pro Aα. Quippe similiter adjacet rectis τT, τα, ipsum τbβ; atque ipsum AbK, rectis Aα, AT.

Nempe, Ungulæ τbβ, aciem habentis βbK, momentum respectu Tτ, aciemve habentis Tτ, momentum respectu βbK; $2\alpha R^3-2sR^3-\alpha bR^2+\frac{1}{6}\alpha^3R$: Aciem habentis βbK momentum respectu βbK, $-2\alpha R^3+2sR^3+\frac{1}{3}\alpha^3R$: Aciemque habentis Tτ, respectu ipsius Tτ, $-2\alpha R^3+2sR^3+2\alpha bR^2+\frac{1}{3}\alpha^3R-\alpha^2sR$: Et Aciem habentis βbK, Distantia Centri gravitatis à Tτ, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+\alpha^3}{3\alpha^2-6bR}$; à βbK $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+2\alpha^3}{3\alpha^2-6bR}$; Aciemq; habentis Tτ, dist. Cen. grav. à βbK, $\frac{12\alpha R^2-12sR^2-6\alpha bR+\alpha^3}{3\alpha^2-6\alpha s+6bR}$; à Tτ, $\frac{-12\alpha R^2+12sR^2+12\alpha bR+2\alpha^3-6\alpha^2s}{3\alpha^2-6\alpha s+6bR}$.

Sed & earundem Ungularum τbβ momenta, haberi poterunt; ex Ungularum totius Aτα momentis, subductis momentis respectivis Ungularum Abβα: Restabunt utique momenta respectiva Ungularum τbβ; quæ & ad alias, ut opus fuerit, rectas facile transferentur.

M. Ex momentis autem Ungularum Abβα; si subducantur respectiva Ungularum bβαB momenta; habentur momenta respectiva Ungularum AbB.

Est autem Ungulæ bβαB, aciem habentis bβ, vel Bα, (utpote Prismatis,) magnitudo, $\frac{1}{2}\alpha^2\times b=\frac{1}{2}\alpha^2b$; ejusque ab acie sua Distantia Centri gravitatis, $\frac{2}{3}\alpha$; à termino opposito, $\frac{1}{3}\alpha$. Adeoque aciem ha-

habentis bβ momentum respectu Aα; aciemve habentis Aα, momentum respectu bβ; $\frac{1}{6}a^3b = \frac{1}{3}a^3R - \frac{1}{6}a^3v$. Aciemque habentis b$\beta$, momentum respectu b$\beta$; aciemve habentis A$\alpha$, respectu A$\alpha$, momentum, $\frac{1}{3}a^3b = \frac{2}{3}a^3R - \frac{1}{3}a^3v$. Fig. 169, 170.

Hæc itaque, ex respectivis momentis Ungularum A b β α (§ K. inventis,) subducta; relinquunt respectiva Ungularum A b B momenta.

Nempe; Ungulæ A b B, aciem habentis b K, momentum respectu Aα, aciemve habentis Aα, momentum resp bK; $-2eR^3 + avR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{6}a^3v$: Aciemque habentis b K momentum respectu b K, $2eR^3 - \frac{1}{3}a^3R + \frac{1}{3}a^3v$: Aciemque habentis A$\alpha$, momentum respectu A$\alpha$, (hoc est, *Omn* $\frac{1}{3}a^3$, eo spectantia,) $2eR^3 - 2avR^2 - \frac{1}{3}a^3R + a^2sR + \frac{1}{3}a^3v$.

Adeoque, (propter illius magnitudinem, $-\frac{1}{2}a^2R + vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; hujusque $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$; per § I. prop. 17.) Ungulæ AbB, aciem habentis bβ, Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$; à b$\beta$, $\frac{12eR^3 - 2a^3R + 2a^3v}{-3a^2R + 6vR^2 + 3a^2v}$: Aciemq; habentis A$\alpha$. Dist. Cen. grav. à b K, $\frac{-12eR^3 + 6avR^2 - a^3R + a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$; ab A$\alpha$, $\frac{12eR^3 - 12avR^2 - 2a^3R + 6a^2sR + 2a^3v}{-3a^2R + 6asR - 6vR^2 + 3a^2v}$.

N. Atque his in Figuræ Sinuum versorum A τ α, ejusve partium, Ungulis, si, expeditis: Eâdem operâ, eadem in Figuræ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ expediuntur. Est enim (ut § M. prop. 17. ostensum est,) Figura Sinuum Rectorum Unius quadrantis $\alpha\delta\kappa$, eadem plane figura atque d D A, figuræ Sinuum versorum portio. Adeoque ex magnitudine, Momentis, Ungulisque, figuræ d D A (quæ figuræ A τ α pars est,) & partium ejusdem; facile erit figuræ $\alpha\delta\kappa$, adeoque & $\alpha\tau\kappa$, partiúmque illius, Magnitudines, Momenta, Ungulasque, quæque hinc dependent, derivare.

Vel etiam, sine ope figuræ A τ α, ejusve portionis d D A; possunt ipsius $\alpha\tau\kappa$, partiúmque hujus, Ungulæ. (ut § Q. prop. 17. ostensum est,) earumque momenta, facile obtineri.

Cum enim rectæ $\beta\upsilon$, trilineum $\alpha\beta\upsilon$ complentes, sint arcuum arithmeticè proportionalium (ipsis $\sigma\beta$ respective æqualium) sinus Recti: Quæ Ungulam $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentem $\alpha\beta$ seu $\alpha\tau$, plana complent; sunt eorundem sinuum rectorum Semiquadrata; hoc est,

Omnia,

Fig. 169. 170. *Omnia*, $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia: Quorum Semiquadratorum ſumma, ſeu ipſa $\alpha\beta\upsilon$ ungula aciem habens $\alpha\tau$, ſeu plani momentum reſpectu rectæ $\alpha\tau$, eſt $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17. Atque eorundem ſemiquadratorum $\frac{1}{2}s^2$, ſeu planorum Triangulorum momentum reſpectu ipſius $\alpha\tau$, (propter $\frac{2}{3}s$, Diſtantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, per prop. 6. hujus) ſunt, *Omnia*, $\frac{1}{3}s^3$; (propter $\frac{1}{2}s^2 \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{3}s^3$.) Aut etiam (propter $s^2 = vh$,) *Omn.* $\frac{1}{3}svh$. Hoc eſt, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: ſumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* s^3; (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) idem atque *Omn.* v^2R: (per § V. prop. 13.) ſeu *Omn.* s^2R, ſumptis v arithmetice proportionalibus: Hoc eſt, Duplum momenti (reſpectu A α) ſegmenti ſemicirculi ABV fig. 169. in R ductum; (ſunt enim *Omn.* $\frac{1}{2}s^2$: ſumptis v arithmetice proportionalibus, momentum illud:) Hoc eſt, (per § R. prop. 15.) $\frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR = \frac{1}{3}v^2R^2 + \frac{1}{3}s^2vR$. Ergo; *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 := \frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, ſeu $\frac{1}{9}v^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$, eſt Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\alpha\tau$, momentum reſpectu $\alpha\tau$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$, per § Q. prop. 17.) Diſtantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, eſt $\frac{4v^2R + 4s^2v}{9eR + 9sv}$.

Vel ſic etiam; Sunt *Omn.* $\frac{1}{3}s^3 :=$ *Omn.* $\frac{1}{3}svh$; (propter BV, mediam proportionalem inter A V & V α; hoc eſt, s, inter v & h;) ſeu (propter $h = 2R - v$,) *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$.

Sunt autem *Omn.* sv: (ſumptis a arithmetice proportionalibus,) $\frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$ (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $\frac{2}{3}svR := \frac{1}{3}v^2R^2 = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2$.

Item; *Omn.* $\frac{1}{2}sv^2 := \frac{1}{6}v^3R = \frac{2}{3}vR^3 - \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{6}s^2vR$, (per § I. prop. 18.) Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{3}sv^2 := -\frac{1}{9}v^3R = -\frac{4}{9}vR^3 + \frac{2}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$.

Ergo, *Omn.* $\frac{2}{3}svR - \frac{1}{3}sv^2$: (= *Omn.* $\frac{1}{3}svh$: = *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$:) Hoc eſt, momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\alpha\tau$, reſpectu ipſius $\alpha\tau$ rectæ, eſt, $\frac{1}{3}v^2R^2 - \frac{1}{9}v^3R$, hoc eſt, $\frac{2}{9}vR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2 + \frac{1}{9}s^2vR$. ut prius. Atque hinc Diſtantia Centri gravitatis ab $\alpha\tau$ colligitur, ut prius.

Et, ſpeciatim; Ungulæ $\alpha\delta\varkappa$ aciem habentis $\alpha\tau$ momentum reſpectu ipſius $\alpha\tau$, (propter $v = s = R$, & $a = \frac{1}{4}P$,) eſt $\frac{2}{9}R^4$; ejuſque magnitudo $\frac{1}{16}R^2P$; Centrique gravitatis ab $\alpha\tau$ diſtantia, $\frac{32R^2}{9P}$.

Un-

Ungulæque totius $\alpha\tau\kappa$, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{2}{9}R^4$; (ipsius $\alpha\delta\kappa$ duplum, propter duplam magnitudinem: Fig. 169. 170.

Distantiaque Centri gravitatis à $\tau\alpha$ eadem, nempe $\frac{32R^2}{9P}$: Et quidem (per prop. 5.) in ipsa $\delta\kappa$ recta; hoc est, à T τ, vel A α, $\frac{1}{4}P$; & propterea ejusdem respectu A α, seu T τ momentum, (propter magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$,) est $\frac{1}{32}R^2P^2$: Quod itidem est aciem habentis T τ, vel A α, momentum respectu $\tau\alpha$; propter altitudines & distantias reciprocatas. Adeoque (propter hujus magnitudinem $\frac{1}{2}R^2P$) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{16}P$.

Similiter; Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu A α; sunt omnium planorum $\alpha\xi o$, $\alpha\zeta\upsilon$, &c usque ad $\alpha\beta\upsilon$, (ungulam illam complentium) momenta respectu A α; hoc est (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $-eR^2+avR$: seu *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR$, eo spectantia; sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes* a, (arcus arithmetice proportionales, eo spectantes;) $\frac{1}{2}a^2$, (per prop. 1. [illegible]s:) adeoque *Omn.* $-aR^2 := -\frac{1}{2}a^2R^2$.

Et *Omnes* s (eo spectantes) hoc est, ipsum $\alpha\beta\upsilon$ planum, est vR, (per § Q. prop. 17.) Adeoque *Omn.* $sR^2 := vR^3$.

Item *Omn.* av (sumptis a arithmetice proportionalibus,) sunt ipsius A b K plani, momentum respectu A α; hoc est, $\frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, (per § H. prop. 17.) Adeoque, *Omn.* $avR := \frac{1}{2}a^2R^2 - asR^2 + vR^3$.

Ergo; *Omn.* $-aR^2+sR^2+avR := 2vR^3 - asR^2$. Quod itaque est Momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Quod quidem momentum, divisum per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, magnitudinem eR^2 seu $aR^2 - sR^2$, (per § Q. prop. 17.) exhibet ejusdem Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{2vR - as}{a - s = e}$; adeoque à $\beta\upsilon$, $a - \frac{2vR - as}{a - s} = \frac{a^2 - 2vR}{a - s = e}$; ejusque propterea respectu $\beta\upsilon$ momentum, $a^2R^2 - 2vR^3$.

Idemque $2vR^3 - asR^2$, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis A α, magnitudinem $-eR^2 + avR$ (per § Q. prop. 17.) divisum; exhibet ejusdem distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, $\frac{2vR^2 - asR}{-aR + sR + av}$; adeo-

Fig. 169, 170. que ab A α, $a - \frac{2vR^2 - asR}{-aR + sR + av} = \frac{-a^2R + 2asR + a^2v - 2vR^2}{-aR + sR + av = -eR + av}$; hujusque propterea, respectu A α, momentum, $-a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$.

Et, speciatim; Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\delta\kappa$; $2R^4 - \frac{1}{4}R^3P$: Ungulæque $\alpha\delta\kappa$ aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\delta\kappa$, $\frac{1}{16}R^2P^2 - 2R^4$: Aciemque habentis A α, momentum respectu A α, $\frac{1}{2}R^3P - 2R^4$. Centrique gravitatis, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\delta\kappa$, distantia ab A α, $\frac{8R^2 - RP}{P - 4R}$; à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 32R^2}{4P - 16R}$; Aciemque habentis A α, distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $2R - \frac{1}{4}P$; ab A α, $\frac{1}{2}P - 2R$.

Ungulæ autem totius $\alpha\tau\kappa$ figuræ sinuum rectorum totius semicirculi, aciem habentis sive A α, sive T τ, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2P$, $s = 0$,) Magnitudo, $\frac{1}{2}R^2P$: Momentum respectu aciei suæ, $\frac{1}{4}R^2P^2 - 4R^4$; respectu termini oppositi, $4R^4$: Distantiaque Centri gravitatis ab acie sua, $\frac{1}{2}P - \frac{8R^2}{P}$; ab opposito termino, $\frac{8R^2}{P}$.

P. Ungulæque $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$, momentum respectu $\tau\alpha$; idem est atque omnium $\alpha\beta\upsilon$ planorum, ipsam complentium, respectu ejusdem $\tau\alpha$: Hoc est, (per § Q. prop. 17.) *Omn.* $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$: seu *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR$: eo spectantia: sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omnes a*: (arithmetice proportionales,) $= \frac{1}{2}a^2$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 := \frac{1}{8}a^2R^2$.

Et *Omn. s*: (ut modo ostensum,) $= vR$. Adeoque *Omn.* $-\frac{1}{4}sR^2 := -\frac{1}{4}vR^3$.

Item *Omn. sv*: (per § A. prop. 18.) $= \frac{1}{2}v^2R = vR^2 - \frac{1}{2}s^2R$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{4}svR = \frac{1}{8}v^2R^2 = \frac{1}{4}vR^3 - \frac{1}{8}s^2R^2$.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}svR := \frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{8}s^2R^2$, seu $\frac{1}{8}efR^2$. Quod itaque est momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\beta\upsilon$, respectu $\tau\alpha$; Idemque (propter distantias & altitudines reciprocatas,) etiam aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\beta\upsilon$.

Hoc itaque momentum, per Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\beta\upsilon$ magnitudinem (modo dictam) eR^2, divisum; exhibet hujus, à $\tau\alpha$, distantiam Centri gravitatis, $\frac{1}{8}f = \frac{1}{8}a + \frac{1}{8}s$.

Idemque momentum, divisum per magnitudinem Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR$ (per § Q. prop. 17.) exhibet

Ungulæ

Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $\tau\alpha$, Distantiam Centri gravitatis à $\beta\upsilon$, Fig. 169, 170. $\frac{a^2R - s^2R = efR}{2aR - 2sR + 2sv}$; adeoque ab $A\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{2aR - 2sR + 2sv}$ $= \frac{e^2R + 2asv}{2eR + 2sv}$; & propterea, ejusdem respectu $A\alpha$ momentum, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR = \frac{1}{8}e^2R^2 + \frac{1}{4}asvR$: Quod ipsum (propter distantias & altitudines reciprocatas) est etiam momentum Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ aciem habentis $A\alpha$, respectu $\tau\alpha$. Atque hoc demum per hujus magnitudinem (modo dictam) $-eR^2 + avR$, divisum; exhibet Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$, aciem habentis $A\alpha$, distantiam Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{a^2R - 2asR + s^2R + 2asv}{-8aR + 8sR + 8av} = \frac{e^2R + 2asv}{-8eR + 8av}$.

Et speciatim, Ungulæ $\alpha\delta\kappa$, aciem habentis $\delta\kappa$, momentum respectu $\tau\alpha$; aciemve habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\delta\kappa$; (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,) $\frac{1}{128}R^2P^2 - \frac{1}{8}R^4$. Aciemque habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$; aciemve habentis $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{128}R^2P^2 + \frac{1}{8}R^4$. Item Aciem habentis $\delta\kappa$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{32}P + \frac{1}{8}R$: Aciemque habentis $A\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{128R} = \frac{1}{8}R + \frac{P^2}{128R}$: Aciemque habentis $\tau\alpha$, Distantia Centri gravitatis à $\delta\kappa$, $\frac{P^2 - 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P - \frac{2R^2}{P}$ ab $A\alpha$, $\frac{P^2 + 16R^2}{8P} = \frac{1}{8}P + \frac{2R^2}{P}$.

In Ungulis igitur expositis, tum quæ figuram Sinuum Versorum, tum quæ figuram Sinuum Rectorum, eorumque partes spectant; determinavimus tum Magnitudines, tum Momenta; & Centri gravitatis distantias, tum à plano per aciem perpendiculari, tum à plano ad aciem recto; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, constat ex prop. 12. nempe in eo quæ Ungulæ altitudinem bisecat. Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsum in singulis gravitatis Centrum determinavimus.

Quæ autem de Ungulis traduntur, eadem & Solidis conversione factis, eorumve Semisolidis, aliisve imperfectâ conversione factis, facile accommodantur: per prop. 12, & 14. hujus. Nempe Semisolidi conversione facti, magnitudo, est ad correspondentem Ungulam Semiquadrantalem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R: Ejusque Centri gravitatis distantia à plano quod conversionis Axi rectum sit; eadem est quæ

Fig. 169, 170. Ungulæ à Plano aciei suæ recto: Adeoque momenta illius ad respectiva momenta hujus, respectu istius plani, sunt ut ipsæ magnitudines, nempe ut $\frac{1}{2} P$ ad R: Centrique gravitatis Semisolidi distantia à conversionis axe, ad illam Ungulæ ab acie sua; ut $2 R$ ad $\frac{1}{2} P$: Semisolidique momentum respectu axis sui, ad illud Ungulæ respectu aciei suæ, (in ratione quæ ex magnitudinum & distantiarum rationibus componitur,) ut 2 ad 1. Ut in suis locis passim ostensum est.

Quæque de expositis Ungulis (sive quæ figuram Sinuum Versorum, sive quæ figuram Sinuum Rectorum spectant, eorumve partes,) dicta sunt: eadem ad alias (calculo rite adhibito) facile accommodantur.

R. Si autem pro figuris jam expositis $A\tau\alpha$, $\alpha\tau\kappa$; Protractæ Contractæve considerandæ veniant: Quoties rectæ b B in Calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas quæ ad illam sit, ut $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2} P$; ut ad Propositiones præcedentes monitum est.

Quæque de solidis figuram Sinuum Rectorum Unius Quadrantis traduntur; eadem etiam ad Solida figuram Chordarum in Semicirculo spectantia transferentur; uti ad propositiones præcedentes monitum est.

PROP.

PROP. XX.

Semicyclois, est, correspondentis Semicirculi Generantis, *Tripla*: Et Partes, Partium (respective sumptarum,) *Triplæ*. Puta $A\tau\alpha = 3\,AD\alpha$; & $b\beta\alpha A = 3\,B\alpha A$. Et sic ubique. A. Fig. 169. 170.

Illorum verò Momenta, ad Momenta horum, respectu ejusdem $\tau\alpha$ Tangentis, ut 5 ad 2; seu *Dupla-sesquialtera*. C.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quod ad Magnitudines, tum quod ad Momenta, & Centra gravitatis, in Semicycloide; quæ supra in Semicirculo (prop. 15.) & in Figura Sinuum versorum, (prop. 17.) determinantur.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus)

Semicycloidis $A\tau\alpha$; magnitudo, $\frac{3}{4}RP$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{7}{8}R^2P$: Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R$; à TA, $\frac{7}{6}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{3}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$: Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; à $T\tau$, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$. B, C.

Complementi Semicycloidis, $A\tau T$; magnitudo, $\frac{1}{4}RP$: Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}R^2P$; respectu TA, $\frac{1}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R$; à TA, $\frac{1}{2}R$: Momentum B, C. H.

Fig. 169, 170. mentum respectu A α, $\mp\frac{1}{16}RP^2+\frac{2}{3}R^3$; respectu T τ, $\mp\frac{1}{16}RP^2-\frac{2}{3}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{4}P+\frac{16R^2}{3P}$; à T τ, $\frac{1}{4}P-\frac{16R^2}{3P}$.

B, D. Portionis Semicycloidis b β α A, magnitudo $\frac{1}{2}fR$: Momentum respectu $\tau\,\alpha$, $\frac{2}{4}fR^2+\frac{5}{12}shR$; respectu T A, $\frac{2}{4}fR^2-\frac{5}{12}shR$; Distantia Centri grav. à $\tau\,\alpha$, $\frac{1}{6}R+\frac{5sh}{18f}$; à

I, T A, $\frac{2}{6}R-\frac{5sh}{18f}$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR-\frac{1}{3}vR^2+\frac{5}{12}s^2R$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}s-\frac{4vR+2s^2}{9a+9s}=\frac{1}{2}f-\frac{4vR+2s^2}{9f}$.

B. E. Segmenti Semicycloidis b β τ, Magnitudo $\frac{1}{2}\alpha R-\frac{1}{2}sR$: Momentum respectu $\tau\,\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha R^2-\frac{1}{4}sR^2-\frac{5}{12}shR$; & respectu T A, $\frac{2}{4}\alpha R^2-\frac{2}{4}sR^2+\frac{5}{12}shR$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\,\alpha$, $\frac{1}{6}R-\frac{5sh}{18\alpha-18s}$; à T A, $\frac{2}{6}R+$

I. $\frac{5sh}{18\alpha-18s}$: à T τ, $\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}s+\frac{2b^2}{9\alpha-9s}$; Momentum resp. T τ, $\frac{1}{4}\alpha^2R-\frac{1}{2}\alpha sR+\frac{1}{4}s^2R+\frac{1}{3}b^2R$.

B, F. Trapezii b β α V; Magnitudo $ab+\frac{1}{2}sb$: Momentum respectu $\tau\,\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2+\frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $2abR+sbR-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{3}sb^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\,\alpha$,

K. $\frac{3a+2s}{6a+3s}b$; à T A, $2R-\frac{3a+2s}{6a+3s}b$: Momentum respectu A α, $\frac{1}{2}fab+\frac{1}{6}s^2b$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{3fa+s^2}{6a+3s}$.

B. F. Segmenti Semicycloidis, b V A; Magnitudo, $-\frac{1}{1}eR+av+\frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\,\alpha$, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{2}as^2+\frac{1}{3}s^3$; respectu T A, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; & respectu b V, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{6}s^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\,\alpha$, $\frac{-9eR^2+12avR+3svR+6as^2+4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à

à T A, $\frac{-3eR^2+12avR+9svR-6as^2-4s^3}{-6eR+12av+6sv}$; à b V, $\frac{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}{-6eR+12av+6\,v}$: Momentum respectu Aα, $-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R-\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a-\frac{8vR^2-3asR-s^2R-3asv-2s^2v}{-6aR+6sR+12av+6sv}$. Fig. 169, 170. K, L.

Trilinei A b K; Magnitudo, $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$: Momentum respectu T A, $\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{6}s^3$; respectu τα, $\frac{3}{4}eR^2+\frac{1}{4}svR+\frac{1}{6}s^3$; respectu b V, $-\frac{1}{4}eR^2+\frac{1}{2}avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{3}s^3$: Momentum respectu Aα, $\frac{2}{3}vR^2+\frac{1}{2}a^2R-\frac{1}{2}asR-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{8vR^2+6a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}$. B, G. K.

Adeoque exhibentur tum totius Semicycloidis, tum ejusdem Partium expositarum, Magnitudines, & Momenta respectu rectarum expositarum, ipsaque Centra gravitatis. M.

Quæ autem de Momentis hic tradita sunt; ad Ungularum magnitudines, & Solidorum conversione factorum, facile transferuntur. Et planorum hic consideratorum momenta, (propter data ipsa Centra gravitatis,) respectu rectarum aliarum, quocunque situ positarum, facile haberi possunt.

Eademque omnia quæ de his expositis Cycloidis portionibus traduntur; ad alias item, variis modis abscissas, facile erit accommodare; additionibus & subductionibus, prout res postulaverit, adhibitis.

Quæque de Cycloide primaria jam traduntur; Ad Cycloides Protractas & Contractas, facile transferuntur. N.

Si

A. Fig. 166. SI super $\tau\alpha$ rectâ, insistens circulus (quem *Circulum Generantem*, seu *Generatorem* dicimus,) puncto sui b (quod *punctum lineans* appellabimus) rectam in τ tangens; qui super eadem recta volvi intelligatur (motu continuo & æquabili) peripheriâ suâ (continuâ ad rectam applicatione) commensurans æqualem rectam $\tau\alpha\tau$, donec b punctum lineans, in sublime latum, (adeoque curvam suo motu describens b b,) circuitu facto, eandem $\tau\alpha\tau$ rectam, (in ejusdem altero extremo τ,) iterum contingat: (dum interim Centrum suum c, rectam c C c describat, ipsi $\tau\alpha\tau$ parallelam & æqualem:) Curvam b b descriptam, *Lineam Cycloidem* appellabimus: Rectam $\tau\alpha$, *Cycloidis Basin*: Figuram curvâ illâ & Base comprehensum, $\tau\tau$ A, *Figuram Cycloidem*: Ejusque semissem $\tau\alpha$ A, *Semicycloidem*: Et bisecantem rectam (basi perpendicularem) α C A, *Cycloidis Axem*.

Cycloidis autem Nomen, quod spectat; Videtur (mihi saltem) *Cyclois* (hoc est, Græce Κυκλοὶς, Κυκλοίδος,) potius quam *Cycloides* (hoc est, Κυκλοειδὴς, Κυκλοειδέος, contractè Κυκλοειδὴς,) dicenda: utpote quæ non tam *Circulo similem*, quàm *ex circulo oriundam*, lineam vel figuram indicat.

Manifestum autem est, (ex constructione Cycloidis,) non modo Peripheriam Circuli Generantis integram (propter continuam sui quæ supponitur ad rectam $\tau\alpha$ applicationem) ipsi $\tau\alpha$ æqualem esse; (adeoque semissem semissi, &c. puta curvam Semicirculi α B A, rectæ $\tau\alpha$, &c.) Sed &, particulatim, dum Circulus Genitor, Basin in β contingens, puncto suo lineante designat Cycloidis punctum b; rectam $\tau\beta$ (propter eandem continuam ἐφαρμογὴν) curvæ bβ æqualem esse; hoc est, (ductâ rectâ b B V basi parallelâ, quæ occurrat in B Circulo Genitori circa Cycloidis Axem constituto, Axique in V,) curvæ α B: Adeoque, & reliquam reliquæ; nempe rectam $\beta\alpha$, hoc est b B, ipsi B A curvæ. Et sic ubique.

Et propterea: Rectam b V, ubique æqualem esse, aggregato Arcûs & Sinûs recti, Sinui verso V A competentium; puta (retentis Symbolis propositionum præcedentium) b V = B A + B V = $a + s$. Atque hoc indifferenter, sive sit V punctum, supra C Centrum circuli Generantis, sive infra, sive denique in ipso C puncto.

Ductisque B α, b β, rectis; sunt (per 33. El. 6. *Euclidis*) Anguli B α A, proportionales ipsis quibus insistunt Arcubus B A; hoc est, rectis b B, seu $\beta\alpha$: Adeoque anguli B $\alpha\tau$, hoc est, b $\beta\tau$, arcubus B α, seu b β; hoc est rectis $\beta\tau$. Nempe, (propter angulum in centro duplum Anguli in Peripheria, per 20. El. 3.) Ut $\tau\beta$ recta, hoc est

V.

tem,
neans
vi in-
â ad
nec b
tu de-
usdem
uum c,
urvam
, *Cy*-
, *Fi*-
: Et
xem.
altem)
cloides
icenda:
undam,

modo
am sui
m esse;
, rectæ
, Basin
ctum b;
β æqua-
occurrat
ue in V,)
β α, hoc

gato Ar-
(retentis
$=a+e$.
Centrum

) Anguli
; hoc est,
, arcubus
rum in cen-
recta, hoc
est

PROP

eſt arcu
rectam
Divis
ζ, ξ, &
rectis φ
αF, α
lium ſub
tum, h
metice p
puta fφ
rα; ſeu
Divi
&c. tu
mero æ
inſuper
δσ, &
omnes
tum cui
æquales
Duct
Semicir
tum Se
Triang
Erun
gula ſin
pluſqua
Con
& Para
denti in
ſimili,
correſpo
ſcilicet,
duplum
τξρ fig
rallelog
æquali b
Triangu
17. den
τξρ ſeu
Deind

est arcus, βb, seu αB, ad Semiperipheriam $\alpha B A$, vel huic æqualem rectam $\tau\alpha$; sic angulus $b\beta\tau$, hoc est $B\alpha\tau$, ad $A\alpha\tau$ rectum.

Divisâ itaque $\tau\alpha$ in partes quotlibet æquales, in punctis φ, ϵ, δ, ζ, ξ, &c. ductisque, ab his punctis contactûs ad punctum lineans, rectis φf, ϵe, δd, ζz, ξx &c. (quibus parallelæ sint in Semicirculo, αF, αE, αD, αZ, αX, &c arcuum arithmetice proportionalium subtensæ:) erunt, tum anguli $f\varphi\tau$, $e\epsilon\tau$, $d\delta\tau$, $z\zeta\tau$, $x\xi\tau$, &c. tum, his æquales, $F\alpha\tau$, $E\alpha\tau$, $D\alpha\tau$, $Z\alpha\tau$, $X\alpha\tau$, &c. arithmetice proportionales: Eorumque communis excessus, primo æqualis; puta $f\varphi\tau$, vel $F\alpha\tau$; Nempe, ea pars anguli recti, quæ est $\tau\varphi$, totius $\tau\alpha$; seu arcus $F\alpha$, semiperipheriæ $\alpha F A$. Fig. 167.

Divisis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis $f\varphi$, $e\epsilon$, $d\delta$, &c. tum Semicirculo, rectis $F\alpha$, $E\alpha$, $D\alpha$, &c. in segmenta numero æqualia, singula singulis respective correspondentia: Ductisque insuper in Semicycloide, à punctis ξ, ζ, δ, &c. rectis $\xi\pi$, $\zeta\varsigma$, $\delta\sigma$, &c. quæ parallelæ sint rectis ζz, δd, ϵe, &c. Erunt anguli omnes $x\xi\pi$, $z\zeta\varsigma$, $d\delta\sigma$, &c. æquales, tum inter se, tum ipsi $f\varphi\tau$, tum cuilibet angulorum $\tau\alpha F$, $F\alpha E$, $E\alpha D$, &c. qui item (propter æquales arcus αF, $F E$, $E D$, &c) sunt inter se æquales.

Ductis porro, tum in Semicycloide rectis $x O$, $z p$, $d r$, &c. tum in Semicirculo, $X O$, $Z P$, $D R$, &c. basi $\tau\alpha$ parallelis; inscribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapeziis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa inscripta Trapezia, Triangulorum inscriptorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) plusquam Tripla.

Constat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo simul & Parallelogrammo. Quorum illud est Triangulo sibi correspondenti in Semicirculo (fig. 167, seu 169.) ubique æquale; (quippe simili, & æque alto.) Hoc autem, illius plusquam duplum; utpote correspondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale; (æque altum scilicet, & super æquali base;) quod respectivi Trianguli plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostensum est. Puta Triangulum $\tau\xi p$ fig. 167, æquale Triangulo $Z\alpha P$ fig. 167 seu 169; & parallelogrammum $z\zeta\xi\pi$, fig. 167, æquale (utpote æque altum & super æquali base) Parallelogrammo correspondenti $z\zeta\xi\pi$ fig. 170; quod Trianguli correspondentis $Z\alpha P$ plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. demonstratur: Adeoque Totum $z\zeta\xi p$ Trapezium, ejusdem $\tau\xi p$ seu $Z\alpha P$ Trianguli plusquam Triplum. Et sic ubique.

Deinde continuatis rectis αX, αZ, αD, &c. ad Q, I, Y, &c. Fig. 168.

 rectisque

PR
est a
rect.
D
ζ, ξ
recti
aF,
lium
tum,
metic
puta
ra,
Di
&c.
mero a
insupe
.ir, &
omnes
tum cu
æquale
Duc
Semicir
tum Se
Triang
Erun
gula sin
plusqua
Cont
& Para
denti in S
simili, &
correspon
scilicet,
duplum
ζξp fig.
rallelogra
æquali bas
Trianguli
17. demo
ζξ p seu Z
Deinde

est arcus, βb, seu αB, ad Semiperipheriam αB A, vel huic æqualem rectam $\tau\alpha$; sic angulus b$\beta\tau$, hoc est B$\alpha\tau$, ad A$\alpha\tau$ rectum.

Divisâ itaque $\tau\alpha$ in partes quotlibet æquales, in punctis φ, ϵ, δ, ζ, ξ, &c. ductisque, ab his punctis contactûs ad punctum lineans, rectis φf, ϵe, δd, ζz, ξx &c. (quibus parallelæ sint in Semicirculo, αF, αE, αD, αZ, αX, &c. arcuum arithmetice proportionalium subtensæ:) erunt, tum anguli f$\varphi\tau$, e$\epsilon\tau$, d$\delta\tau$, z$\zeta\tau$, x$\xi\tau$, &c. tum, his æquales, F$\alpha\tau$, E$\alpha\tau$, D$\alpha\tau$, Z$\alpha\tau$, X$\alpha\tau$, &c. arithmetice proportionales: Eorumque communis excessus, primo æqualis; puta f$\varphi\tau$, vel F$\alpha\tau$; Nempe, ea pars anguli recti, quæ est $\tau\varphi$, totius $\tau\alpha$; seu arcus Fα, semiperipheriæ αF A. Fig. 167.

Divisis autem hoc modo, tum Semicycloide rectis fφ, eϵ, dδ, &c. tum Semicirculo, rectis Fα, Eα, Dα, &c. in segmenta numero æqualia, singula singulis respective correspondentia: Ductisque insuper in Semicycloide, à punctis ξ, ζ, δ, &c. rectis $\xi\pi$, $\zeta\varsigma$, $\delta\sigma$, &c. quæ parallelæ sint rectis ζz, δd, ϵe, &c. Erunt anguli omnes x$\xi\pi$, z$\zeta\varsigma$, d$\delta\sigma$, &c. æquales, tum inter se, tum ipsi f$\varphi\tau$, tum cuilibet angulorum $\tau\alpha$F, FαE, EαD, &c. qui item (propter æquales arcus αF, F E, E D, &c) sunt inter se æquales.

Ductis porro, tum in Semicycloide rectis x O, z p, d r, &c. tum in Semicirculo, X O, Z P, D R, &c. basi $\tau\alpha$ parallelis; inscribatur, tum Semicycloidi, figura ex Trapeziis; tum Semicirculo, Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa inscripta Trapezia, Triangulorum inscriptorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) plusquam Tripla.

Constat enim Trapeziorum illorum quodlibet, ex Triangulo simul & Parallelogrammo. Quorum illud est Triangulo sibi correspondenti in Semicirculo (fig. 167, seu 169.) ubique æquale; (quippe simili, & æque alto.) Hoc autem, illius plusquam duplum; utpote correspondenti in fig. 170. parallelogrammo æquale; (æque altum scilicet, & super æquali base;) quod respectivi Trianguli plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostensum est. Puta Triangulum $\tau\xi$p fig. 167, æquale Triangulo ZαP fig. 167 seu 169; & parallelogrammum z$\zeta\xi\pi$, fig. 167, æquale (utpote æque altum & super æquali base) Parallelogrammo correspondenti z$\zeta\xi\pi$ fig. 170; quod Trianguli correspondentis ZαP plusquam duplum esse, ad § A. prop. 17. demonstratur: Adeoque Totum z$\zeta\xi$p Trapezium, ejusdem $\tau\xi$p seu ZαP Trianguli plusquam Triplum. Et sic ubique.

Deinde continuatis rectis αX, αZ, αD, &c. ad Q, I, Y, &c. rectisque Fig. 168.

Fig. 168. rectisque ξx, ζz, δd, &c ad q, i, y, &c. rectisque ξπ, ζρ, &c. ad ι, υ, &c. ductisque rectis tum AQq, XI, ZY, &c. tum xιi, zυy, &c. ipsi τα parallelis: Circumscribatur, tum Semicycloidi Figura ex Trapeziis, tum Semicirculo Figura ex Triangulis correspondentibus constans.

Eruntque illa circumscripta Trapezia, circumscriptorum Triangulorum, singula singulorum respective sumptorum, (adeoque & omnia omnium,) minus quam Tripla.

Constat enim Trapeziorum horum quodlibet, ex Triangulo simul & parallelogrammo. Quorum quidem illud est Triangulo ad Semicirculum posito, ubique æquale, (utpote simili, & æque alto:) Hoc autem, illius minus quam duplum; utpote respectivo Parallelogrammo fig. 170. æquale, (cum æque altum sit, & super æquali base;) quod Trianguli respectivi minus quam duplum esse, ad § A. prop. 17. ostenditur. Puta, Triangulum ιξx fig. 168. æquale Triangulo IαX fig 168, seu 169. Et Parallalogrammum iζξι fig. 168. æquale Parallelogrammo iζξx fig. 170. adeoque minus quam Trianguli duplum, ut ad § A. prop. 17. ostenditur. Et propterea totum iζξx Trapezium, ejusdem IαX Trianguli minus quam Triplum. Et sic ubique.

Fig. 166, 167, 168, 169. Cumque hæc ubique obtineant: Figura illa ex Trapeziis Inscripta sive toti Semicycloidi τbAα, sive ipsius portioni, ut τbβ, aut βbAα, aut etiam βbdδ; (utrobique enim, sive de tota sive de parte, eodem modo procedit demonstratio;) Major est quam Tripla Figuræ ex Triangulis correspondentis, Inscriptæ, sive toti Semicirculo αBA, sive ipsius correspondenti portioni, ut αBα, aut αBA, aut etiam αBDα: Circumscripta vero, Circumscriptæ, Minor quam Tripla.

Cumque, multiplicatis Sectionibus, Inscriptæ & Circumscriptæ Differentia continue decrescat utrobique, donec tandem datâ quâvis minor evadat: Nec tamen unquam Inscripta Inscriptæ Minor quam Tripla, nec Circumscripta Circumscriptæ Major quam Tripla, esse possit: Continuatâ in infinitum sectione, evanescet differentia; Inscriptis simul & Circumscriptis coincidentibus illic cum Semicycloide ejusve portione, hic cum Semicirculo hujusve portione correspondente: eritque propterea tum Semicyclois Semicirculi tripla, tum partes partium respective sumptarum.

Hoc est; tum Semicyclois τbAα, Tripla Semicirculi αDA; tum istius Portio, bβαVA, sectoris hujus BαA; portioque reliqua τbβ, reliqui segmenti αBα; portioque βbdδ, sectoris BαD, Tripla. Et sic ubique. Quod erat primo loco probandum.

Est

Est utique *Semicyclois*, Figura ex *Semicirculo* & *Figurâ Sinuum Versorum (Arcuumve)* composita. Quippe Recta quælibet b B V fig. 166. æqualis duabus simul b B, B V, fig. 170, 169. Et quidem, si ex Semicycloidis Trapeziis singulis (fig. 167. vel 168.) eximi intelligantur sua respective Triangula; hoc est, ex Semicycloide quam constituunt illa numero infinita Trapezia, Semicirculus quem illa numero infinita Triangula, aut illis saltem æqualia, constituunt; (protrusis rectis b B, ad rectam A α; ut puncta B, V, congruant:) Reliqua Parallelogramma (prius inclinata, jam exemptis Triangulis erecta,) eadem erunt cum parallelogrammis (fig. 170.) correspondentibus, figuram Sinuum Versorum Arcuumve complentibus. Quod itaque *Trilineum Restitutum* dicimus; propter parallelogramma, quæ in Semicycloide interpositis triangulis obliquabantur, in debitum situm restituta in Trilineo fig. 170. Quod quidem Trilineum aliud non est quam illud ipsum fig. 166, 167, 168. Trilineum A τ α D, (curvâ cycloidis, & Semicirculi convexâ, rectâque τ α, comprehensum,) in debitum situm, exempto Semicirculo, restitutum. Fig. 166, 169, 170.

Atque in partibus similiter: Puta, ex Trapeziis Quadrilineum β b A α in Semicycloide constituentibus, exemptis Triangulis Sectorem Trilineum B α A constituentibus (vel his æqualibus;) reliqua Parallelogramma constituent Quadrilineum β b A α Trilinei restituti, aut huic æquale; Hoc est, in Semicycloide, Quinquilineum b β α B A (tribus rectis b β, β α, α B, & duabus curvis b A, B A, comprehensum;) vel Quadrilineum b β α D A fig. 166. (tribus curvis b β, b A, A D α, ut recta β α, comprehensum;) Sectoris B α A duplum: Adeoque (quod ex utrisque componitur) Quadrilineum Cycloidis β b A α (rectis A α, α β, β b, curvaque b A, comprehensum,) ejusdem Sectoris B α A, triplum. Et sic ubique. Similiter; Si ex Semicycloidis Segmento A b V, eximatur Segmentum Semicirculi A B V; relinquitur A b B fig. 166. = A b B fig. 170. Et sic ubique. Quod & de eorum Momentis respectu rectarum τ α, T A, aut aliarum hisce parallelarum, pariter intelligendum erit: Propter tum Magnitudines tum Distantias æquales. (Si vero ad A α, aliamve rectam quæ ipsis τ α, T A, parallela non sit, æstimentur momenta; secus erit: Quippe tum, æqualium Magnitudinum, Distantiæ inæquales erunt. Ut infra dicendum erit.)

Et quidem, ut, in Cycloide, recta b B V (aggregatum arcûs & sinus recti) ea quantitas est quam dicimus $f = a + s$: Sic, in Trilineo restituto (seu Figurâ Arcuum) si Diametro A α describatur circulus, quæ à b puncto ordinatim applicatur ad Axem A α, est a Arcus;

quæ vero ad peripheriam ulteriorem continuetur est $a+s=f$; quæque peripheriâ propiore intercipitur est $a-s=e$, differentia arcûs & sinûs recti sinui verso AV convenientium. (Puta, fig. 186, $bB=a+s=f$; fig. 185, $bB=a-s=e$; utrobique $bV=a$, $BV=s$.) Adeoque si, exempto illo Semicirculo, protruderentur illæ interceptæ rectæ usque ad $A\alpha$ axem; quæ prodiret figura esset figura differentiarum Arcuum sinuumque rectorum: Sicut, ex Semicycloide, exempto Semicirculo, figura Arcuum formabatur.

B. His ita constitutis; (Nempe Semicycloidem Semicirculi Triplam
Fig. 166, esse, & partes partium respective sumptarum; vel quod eodem
170. recidit, Semicycloidem Semicirculo & Figuræ Sinuum versorum Arcuumve (hoc est, Trilineo restituto,) simul sumptis æqualem, ejusque partes partibus horum respective sumptis:) ad calculum sic procedimus: Retentis Symbolis propositionum præcedentium.

Est Semicirculus A D $\alpha = \frac{1}{4}RP$, (per § D. prop. 15.) & Trilineum restitutum τ A D α (istius duplum) $\frac{1}{2}RP$; per § B. prop. 17. Ergo Semicyclois (ejusdem Triplum) τ A V $\alpha = \frac{3}{4}RP$. Adeoque Parallelogrammi residuum seu Semicycloidis complementum A τ T $=\frac{1}{4}RP$.

Item Sector B α A $=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR=\frac{1}{2}fR$ (per § H. prop. 15.) Trilinei restituti portio b β α B A $=aR+sR=fR$, per § B. prop. 17. Ergo Portio Cycloidis b β α V A $=\frac{3}{2}aR+\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}fR$.

Item Segmentum Semicirculi residuum α B $\alpha = \frac{1}{4}RP-\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}sR = \frac{1}{2}\alpha R-\frac{1}{2}sR$, (per § G. prop. 15.) Ergo Segmentum Semicycloidis residuum b β $\tau = \frac{3}{4}RP-\frac{3}{2}aR-\frac{3}{2}sR=\frac{3}{2}\alpha R-\frac{3}{2}sR$.

Item; Si, ex illa portione Semicycloidis b β α V A; auferatur tum parallelogrammum b β α B ($=$ b β α B fig. 170.) $=ah$, tum Triangulum α B V $=\frac{1}{2}sh$; hoc est Trapezium b β α V $=ah+\frac{1}{2}sh$ $=2aR-av+sR-\frac{1}{2}sv$: Relinquitur Semicycloidis segmentum AbV $=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=\frac{3}{2}fR-ah-\frac{1}{2}sh$.

Vel etiam; propter A B V $=\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$ (per § F. prop. 15.) & A B b $=-eR+av$, (per § B prop. 17.) erit A b V $=-\frac{1}{2}eR+av+\frac{1}{2}sv=-\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}sR+av+\frac{1}{2}sv$.

Et, speciatim, Segmentum A d C (propter $a=\frac{1}{4}P$, $s=v=R$,) $=R^2+\frac{1}{8}RP$.

Fig. 166. Item, si ex Parallelogrammo A V b K $=fv$ (propter AV $=v$, & bV $=f$,) eximatur Segmentum illud A b V $=\frac{3}{2}fR-ah-\frac{1}{2}sh$: Relinquitur Trilineum A b K (seu segmenti A b V complementum) $fv-\frac{3}{2}fR+ah+\frac{1}{2}sh$; hoc est (reductione facta) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$;

Nempe,

Nempe, tantundem atque Semicirculi ſegmentum A B V, modò dictum.

Porro, ſi intelligatur Semicirculus (juxta def. 1. cap. 4.) ex infinitis numero Sectoribus conſtitui, ut A α X, X α Z, &c. vel etiam (quod in partibus infinite exiguis, propter infinitam approximationem, tantundem valet) ex infinitis numero Triangulis figuram inſcriptam complentibus, ut O α X, P α Z, &c. ſive ex totidem Triangulis figuram circumſcriptam complentibus, ut Q α A, I α X, &c. aut etiam figuram inſcriptæ & circumſcriptæ intermedium (utpote partim inſcriptam, partim circumſcriptam) complentibus, ut Y α P, &c. (quæ rectis α Z, &c. ut illorum axibus repræſententur:) Intelligenda erit ſimiliter Semicyclois ex totidem conſtitui Quadrilineis A α ξ x, x ξ ζ z, &c. vel etiam (quod eodem recidit, ſectione in infinitum continuatâ,) ex totidem Trapeziis figuram inſcriptam complentibus, ut O x ξ α, p z ζ ξ, &c. aut circumſcriptam complentibus, ut A q ξ α, x i ζ ξ, &c. aut quæ figuram partim inſcriptam partim circumſcriptam complent, ut p y δ ξ, &c. (quæ rectis z ζ, &c. ut eorum axibus repræſententur.) C. Fig. 167, 168.

Cumque hæc Trapezia ſingula, ex Triangulo ſimul & Parallelogrammo conſtituit; quorum illud eſt reſpectivo Semicirculi Triangulo æquale, hoc autem reſpectivo Parallelogrammo Trilinei Reſtituti fig. 170. ſuntque in eiſdem ſive à τ α ſive à T A diſtantiis: Trapezii cujuſque momentum ſive reſpectu rectæ τ α, ſive reſpectu rectæ T A, (aliarumve hiſce parallelarum,) æquabitur Momentis ſimul ſumptis eorundem quibus æquantur Trianguli Parallelogrammique. Fig. 166, 167, 168, 170.

Cumque hoc de ſingulis obtineat, obtinebit & de ſimul omnibus complentibus vel totam A τ α Semicycloidem, vel ipſius portionem aliquam, ut A b β α, b β τ, b β δ d, &c. Puta Momentum Portionis Semicycloidis b β α V A, reſpectu rectæ τ α vel T A, æquale erit momento Sectoris B α A, & Quadrilinei fig. 170. b β α B A, (reſpectu rectarum τ α vel T A reſpective,) ſimul ſumptis.

Et ſimiliter oſtendetur, Momentum Segmenti Semicycloidis AbV, æquale momentis Segmenti Semicirculi A B V, & Segmenti Trilinei fig. 170. A b B, (reſpectu rectarum τ α, T A, vel hiſce parallelarum, reſpective,) ſimul. Æqualia ſiquidem ſunt, atque in eâdem diſtantiâ.

Eſt autem Semicirculi A D α, reſpectu τ α, momentum, $\frac{1}{4}R^2P$, (per § I. prop. 15.) Et momentum Trilinei Reſtituti, ejuſdem ſeſquialterum ſeu ut 3 ad 2, hoc eſt $\frac{3}{8}R^2P$. per § C. prop. 17. Semicycloidis igitur, reſpectu ejuſdem τ α, momentum (utpote illis ſimul ſumptis æquale) ad illud Sectoris, ut 5 ad 2, hoc eſt $\frac{5}{8}R^2P$. Cumque hujus magnitudo ſit

(per.

Fig. 166, 170. (per § B.) $\frac{1}{4}RP$; distantia centri gravitatis Semicycloidis a $\tau\alpha$, erit $\frac{5}{6}R$. Adeoque a T A, $\frac{7}{6}R$. Ejusque respectu T A momentum (magnitudine in distantiam ducta) $\frac{7}{8}R^2P$. (Quod æquale est momentis Semicirculi Trilineique Restituti, prop. 15. & 17. inventis, simul sumptis.) Ergo & Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est $\frac{5}{8}R^2P$; aciémque habens T A, $\frac{7}{8}R^2P$. Solidúmque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{5}{8}RP^2$; & Semisolidum, $\frac{5}{16}RP^2$: Atque circa T A, Solidum $\frac{7}{8}RP^2$, & Semisolidum $\frac{7}{16}RP^2$.

Atque si ex Parallelogrammi A T $\tau\alpha$ momento respectu $\tau\alpha$ vel T A, hoc est ex R^2P, (propter magnitudinem $\frac{1}{2}P\times 2R = RP$, distantiamque Centri gravitatis R;) auferatur Semicycloidis momentum jam inventum; habetur Complementi A τ T, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; respectu T A, $\frac{1}{8}R^2P$. Adeoque (propter magnitudinem modo inventam, $\frac{1}{4}RP$,) Distantia Centri gravitatis ejusdem à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R$; atque a T A, $\frac{1}{2}R$. Item Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$, $\frac{3}{8}R^2P$; aciemque habens T A, $\frac{1}{8}R^2P$. Solidumque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$ factum, $\frac{3}{8}RP^2$; & semisolidum, $\frac{3}{16}RP^2$: Atque circa T A, solidum $\frac{1}{8}RP^2$; semisolidum, $\frac{1}{16}RP^2$.

D. Item Sectoris B α A momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{1}{2}fR^2 + \frac{1}{6}shR = \frac{1}{2}aR^2 + \frac{5}{6}sR^2 - \frac{1}{6}svR$, per § M. prop. 15. Et Portionis Trilinei restituti b β α B A, momentum $\frac{1}{4}fR^2 + \frac{1}{4}shR = \frac{1}{4}aR^2 + \frac{2}{4}sR^2 - \frac{1}{4}svR$, per § D. prop 17. Ergo Portionis Semicycloidis b β α V A, momentum respectu $\tau\alpha$ (utpote ex illis aggregatum,) $\frac{3}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR = \frac{3}{4}aR^2 + \frac{22}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$. (Idemque est & Ungula Semiquadrantalis eidem insistens, aciem habens $\tau\alpha$.) Adeoque (propter magnitudinem § B inventam, $\frac{3}{2}fR = \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$) Distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, est $\frac{5}{6}R + \frac{5sh}{18f} = \frac{15aR + 25sR - 5sv}{18a + 18s}$: Atque à TA, $\frac{7}{6}R - \frac{5sh}{18f} = \frac{21aR + 11sR + 5sv}{18a + 18s}$: Ejusque respectu T A momentum, (vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens T A,) $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$. Solidumque ejusdem conversione circa $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}aRP + \frac{22}{12}sRP - \frac{5}{12}vP$; & Semisolidum $\frac{5}{8}aRP + \frac{22}{24}sRP - \frac{5}{24}svP$: Atque circa T A, Solidum $\frac{7}{4}aRP + \frac{11}{12}sRP + \frac{5}{12}svP$, & semisolidum, $\frac{7}{8}aRP + \frac{11}{24}sRP + \frac{5}{24}svP$.

E. Similiter, Segmenti Semicirculi α B α, Momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu $\tau\alpha$, est $\frac{1}{2}aR^2 - \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{6}shR$; & respectu

spectu TA, $\frac{3}{2}\alpha R^2 - \frac{3}{2}sR^2 + \frac{1}{6}shR$; per § N. prop. 15. Estque Fig. 166, segmenti Trilinei Restituti $b\beta\tau$, Momentum (vel Semiquadrantalis 170. Ungulæ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}\alpha R^2 - \frac{3}{4}sR^2 - \frac{1}{4}shR$; & respectu TA, $\frac{1}{4}\alpha R^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{4}shR$; per § E. prop. 17. Ergo (quod ex utrisque aggregatum est) Segmenti Semicycloidis $b\beta\tau$, momentum (seu Semiquadrantalis Ungulæ) respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; & respectu TA, $\frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$. Hoc est (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $b = 2R - v$,) respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}R^2P - \frac{5}{4}aR^2 - \frac{25}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$; & respectu TA, $\frac{7}{8}R^2P - \frac{7}{4}aR^2 - \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$. Adeoque (propter magnitudinem § B inventam, $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR = \frac{1}{4}RP - \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$,) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{5sh}{18\alpha - 18s} = \frac{5}{6}R - \frac{10sR - 5sv}{9P - 18a - 18s}$: à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{5sh}{18\alpha - 18s} = \frac{7}{6}R + \frac{10sR - 5sv}{9P - 18a - 18s}$. Solidumque ejusdem circa $\tau\alpha$ conversione factum $\frac{5}{4}\alpha RP - \frac{5}{4}sRP - \frac{5}{12}shP = \frac{5}{8}RP^2 - \frac{5}{4}aRP - \frac{25}{12}sRP + \frac{5}{12}svP$; & semisolidum $\frac{5}{8}\alpha RP - \frac{5}{8}sRP - \frac{5}{24}shR = \frac{5}{16}RP^2 - \frac{5}{8}aRP - \frac{25}{24}sRP + \frac{5}{24}svP$: Atque, circa TA, Solidum $\frac{7}{4}\alpha RP - \frac{7}{4}sRP + \frac{5}{12}shP = \frac{7}{8}RP^2 - \frac{7}{4}aRP - \frac{11}{12}sRP - \frac{5}{12}svP$; & semisolidum, $\frac{7}{8}\alpha RP - \frac{7}{8}sRP + \frac{5}{24}shP = \frac{7}{16}RP^2 - \frac{7}{8}aRP - \frac{11}{24}sRP - \frac{5}{24}svP$.

Item, Segmenti Semicirculi BVA, Momentum respectu $\tau\alpha$, F. $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR + \frac{1}{3}s^3$; & respectu TA, $\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}svR - \frac{1}{3}s^3$, & respectu bBV, $-\frac{1}{2}eR^2 + \frac{1}{2}avR - \frac{1}{6}s^3$; per § L, R. prop. 15. Momentum autem Segmenti Trilinei $b\beta A$, respectu $\tau\alpha$, $-\frac{5}{4}eR^2 + avR - \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2$; & respectu TA, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; & respectu bBV, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2$; per § F. prop. 17. Momentum igitur Segmenti Semicycloidis bVA, (vel Semiquadrantalis Ungulæ correspondens,) respectu $\tau\alpha$, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; & respectu TA, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; & respectu bBV, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$. Adeoque (propter magnitudinem § B. inventam, $-\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$;) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{-9eR^2 + 12avR + 3svR + 6as^2 + 4s^3}{-6eR + 12av + 6sv}$; à TA, $\frac{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}{-6eR + 12av + 6sv}$; à bBV, $\frac{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}{-6eR + 12av + 6sv}$. Solidum ejusdem conversione

circa

Fig. 166, 170. circa $\tau\alpha$ factum, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{1}{4}svP + \frac{as^2P}{2R} + \frac{s^3P}{3R}$; & semisolidum, $-\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{8}svP + \frac{3as^2P + 2s^3P}{12R}$: Item circa TA, Solidum, $-\frac{1}{4}eRP + avP + \frac{3}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{3R}$; & semisolidum, $-\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{3}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{6R}$: Denique circa bV, Solidum $\frac{1}{4}eRP + \frac{1}{2}avP + \frac{1}{4}svP - \frac{as^2P}{2R} - \frac{s^3P}{6R}$; & semisolidum, $\frac{1}{8}eRP + \frac{1}{4}avP + \frac{1}{8}svP - \frac{as^2P}{4R} - \frac{s^3P}{12R}$.

Eadem habentur ope Trapezii b β α V. Quippe si ex quadrilinei b β α A fig. 166. auferatur Trapezium b β α V, restabit Semicycloidis segmentum b V A: Ejusque momentum ex momento Quadrilinei subductum, relinquit segmenti b V A momentum, sive respectu rectæ T A, sive $\tau\alpha$; unde & reliqua consequentur.

Est autem Trianguli B V α, magnitudo $\frac{1}{2}sb$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $sbR - \frac{1}{3}sb^2$; per § M. prop. 15. Et parallelogrammi b β α B, magnitudo ab; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2$; respectu T A, $2abR - \frac{1}{2}ab^2$: per § F. prop. 17. Ergo Trapezii b β α V, magnitudo, $ab + \frac{1}{2}sb$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2$; respectu T A, $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2$. Quæ respective subducta ex Quadrilinei b β α A, magnitudine & Momentis § D. traditis: Relinquunt Segmenti b V A magnitudinem $\frac{3}{2}fR - ab - \frac{1}{2}sb = -\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR + av + \frac{1}{2}sv = -\frac{1}{2}eR + av + \frac{1}{2}sv$: Momentum respectu $\tau\alpha$, (vel correspondens Ungula,) $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{1}{12}shR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2 = -\frac{3}{4}aR^2 + \frac{3}{4}sR^2 + 2avR - \frac{11}{12}svR - \frac{1}{2}av^2 - \frac{1}{3}sv^3 = -\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; respectu T A, $\frac{3}{4}fR^2 - \frac{1}{12}shR - 2abR - sbR + \frac{1}{2}ab^2 + \frac{1}{3}sb^2 = -\frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2 + \frac{1}{12}svR + \frac{1}{2}av^2 + \frac{1}{3}sv^2 = -\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$. Unde reliqua deducentur ut prius. Trapeziique Distantia Centri gravitatis (momento per magnitudinem diviso) a $\tau\alpha$, $\frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$; a T A, $2R - \frac{3a + 2s}{6a + 3s}b$.

G. Si verò, ex Parallelogrammi A V b K momentis, eximantur momenta segmenti A b V; relinquentur Momenta respectiva Trilinei A b K.

Est

Est autem, (propter $AV = v$, $bV = f$, Distantiamque Centri gravitatis ab $A\alpha$, vel bK, $\frac{1}{2}f$; ab AK, vel bV, $\frac{1}{2}v$; adeoque ab $\alpha\tau$, $\frac{1}{2}v + h = 2R - \frac{1}{2}v$;) Parallelogrammi magnitudo, fv; momentum respectu $A\alpha$ vel bK, $\frac{1}{2}f \cdot v$; respectu AT vel bV, $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2$; respectu $\alpha\tau$, $2fvR - \frac{1}{2}fv^2 = \frac{1}{2}fv^2 + fvh = \frac{1}{2}fv^2 + fs^2 = fvR + \frac{1}{2}fs^2$. Fig. 166.

Si itaque ex $\frac{1}{2}fv^2 = fvR - \frac{1}{2}fs^2 = avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$, auferatur segmenti AbV momentum respectu TA (modo inventum) $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; habetur $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{6}s^3$, momentum Trilinei AbK respectu TA. Ideoque, propter magnitudinem (§ B inventam) $\frac{1}{2}eR + \frac{1}{2}sv$, Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{3eR^2 + 3svR - 2s^3}{6eR + 6sv} = \frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{3}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; à bV, $\frac{3}{2}R - h$ $(= v - \frac{1}{2}R) + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; & (restituendo magnitudinem) momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; & respectu bV, $\frac{1}{2}evR + \frac{1}{2}sv^2 - \frac{1}{4}eR^2 - \frac{1}{4}svK + \frac{1}{6}s^3 = -\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$ (propter $\frac{1}{2}evR = \frac{1}{2}avR - \frac{1}{2}svR$, & $\frac{1}{2}sv^2 = svR - \frac{1}{2}s^3$.) Vel etiam, ex momentis Parallelogrammi $AVbK$, $fvR + \frac{1}{2}fs^2$ & $fvR - \frac{1}{2}fs^2$ (modò traditis,) hoc est, ex $avR + svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{2}s^3$, & $avR + svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{2}s^3$; subductis momentis segmenti AbV, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, modò inventis; Habetur Momentum Trilinei AbK, respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{4}eR^2 + \frac{3}{4}svR + \frac{1}{6}s^3$; &, respectu bV, $-\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{3}s^3$; ut prius.

H. Atque hactenus Semicycloidis, partiumque illius, Momenta & Ungulas, consideravimus duntaxat prout ad rectas $\tau\alpha$, TA, aut huic parallelas respectum habent. Quæ quidem, (propter eandem à rectis illis distantiam Parallelogrammorum $b\beta\xi\pi$, sive ut inclinata jacent in Semicycloide fig. 167, 168. sive ut erecta in Trilineo restituto fig. 170. Et Triangulorum similiter, ut $\pi\xi p$ seu $B\alpha P$, fig. 167, 168. eisque æqualium $B\alpha P$, fig. 169.) alia non sunt quam aggregata partium correspondentium in Semicirculo, & Trilineo Restituto, fig. 169, 170, Et Momenta Ungulæque quæ Semicycloidem spectant, respectivorum Momentorum Ungularúmque aggregata, Semicirculum Trilineúmque illud respective spectantium.

Verum si ad rectam $A\alpha$, aliámve ipsis $\tau\alpha$, TA, non parallelam exigantur; sive ut Ungularum aciem sive ut librationis axem: Quo-

niam alia est inde distantia Parallelogrammorum in Semicycloide inclinatorum, atque erectorum in Trilineo Restituto; altiore adhuc indagine opus erit, quo distantiarum variatarum justa ratio habeatur.

Intelligatur itaque, ut prius, tum Semicirculus in minuta Triangula, ut Y α P, tum Semicyclois in totidem Trapezia correspondentia, ut y δ ξ p, distribui; quæ figuram utrobique inscriptæ & circumscriptæ intermediam (utpote partim inscriptam partim circumscriptam) compleant. Quæ suis Axibus seu Diametris B α, b β repræsentari intelligantur. In quibus itaque rectis sua respective Centra gravitatis constituta fore, constat (ex prop. 5. hujus,) saltem inde distare distantia quæ datâ quavis minor sit; quæque sectione in infinitum continuatâ evanescet. Cúmque ex præmonstratis (§ A,) Trapeziarum illarum quodvis ex Triangulo constat, respectivo Semicirculi Triangulo æquali, & Parallelogrammo ejusdem Trianguli duplo, (utpote æquali respectivo Trilinei restituti Parallelogrammo:) intelligatur Trapezii Triangulum illud, ut υ β π, (ipsi Y α P simile & æquale,) utrinque ad b β positum, (per cujus itaque Centrum gravitatis transire intelligatur b β recta;) adeoque Parallelogrammum (Trapezii reliquum) in duo Parallelogramma dimidia dirimere, ut υ β δ y, π β ξ p: Per cujus itaque bipartiti Parallelogrammi, seu duorum Parallelogrammorum simul sumptorum, commune Centrum gravitatis non minus transibit b β recta, quam si, exempto Triangulo, (quod in Trilineo restituto fit,) utrinque eidem b β rectæ adjacerent dimidia illa Parallelogramma, utrinque jam æqualiter remota. Quanquam enim in sectione definitâ, major sit B Y quam B P, & b υ quam b π; sectione tamen in infinitum continuatâ; differentia illa in æqualitatem sensim evanescit; ut ex præmonstratis patet.

Fig. 156, 168.

Re sic constructâ; Momentum Trapezii cujusvis, ut y δ ξ P, ad momentum correspondentis Trianguli, ut Y α P, respectu ejusdem A α, (adeoque & Ungula super illo, ad Ungulam super hoc, quæ communem Aciem habeant A α; Solidúmque illius ad Solidum hujus conversione circa A α factum;) est in ratione quæ componitur ex magnitudinis ad magnitudinem ratione, (hoc est, sectione in infinitum continuatâ, ut 3 ad 1, per § A;) atque ex ratione Distantiæ Centri gravitatis illius, ad Distantiam Centri gravitatis hujus, ab eadem A α rectâ.

Est autem Centrum gravitatis Trianguli Y α P, in ipsâ α B; ejusque ab α distantia est $\frac{2}{3}$ αB, (per § C. prop. 6. hujus;) adeoque ab A α distantia est $\frac{2}{3}BV = \frac{2}{3}s$, & a τ α, $\frac{2}{3}V\alpha = \frac{2}{3}h$.

Trapezii vero y δ ξ p, Centrum gravitatis in b β positum, à β distat $\frac{1}{2}b$.

$\frac{5}{9}\beta b$. Cum enim Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum, à β distet $\frac{2}{3}\beta b$; & parallelogrammi bipartiti seu ex duobus compositi, βy, βp, centrum à β distet $\frac{1}{2}\beta b$; per 6 hujus; sitque utrumque in βb rectâ, ut modo ostensum est: Horum ab invicem distantia erit $\frac{1}{6}\beta b = \frac{2}{3}\beta b - \frac{1}{2}\beta b$: Hæc itaque centrorum ab invicem distantia, divisa in magnitudinum, quæ sunt ut 1 ad 2, ratione reciprocâ; pro communi utriusque, hoc est ipsius Trapezii centro gravitatis, superaddit distantiæ Centri Parallelogrammi à puncto β, trientem ipsius $\frac{1}{6}\beta b$, hoc est $\frac{1}{18}\beta b$; per 17. cap. præced. Nam, ut $3 = 2 + 1$, ad 1; sic $\frac{1}{6}\beta b$, ad $\frac{1}{18}\beta b$. Adeoque propter $\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$, Trapezii centrum gravitatis, in βb positum, a β distabit, $\frac{5}{9}\beta b$. Fig. 166, 168.

Et propterea, ejusdem à $\pi\alpha$ distantia erit $\frac{5}{9}V\alpha = \frac{5}{9}b$; & ab $A\alpha$ distantia bB ($= \beta\alpha = BA$) $+ \frac{5}{9}BV$, (ut ex Schematis inspectu facile constabit;) hoc est $a + \frac{5}{9}s$.

Ratio itaque distantiarum Centrorum gravitatis Trapezii $y\delta\xi p$, & Trianguli $Y\alpha P$, ab eadem $A\alpha$; nempe $bB + \frac{5}{9}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $a + \frac{5}{9}s$ ad $\frac{2}{3}s$; cum ratione magnitudinum 3 ad 1 (multiplicando) composita; exhibet rationem momentorum $3\,bB + \frac{5}{3}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $3a + \frac{5}{3}s$ ad $\frac{2}{3}s$. Hoc est, Momentum Trapezii $y\delta\xi p$, in suo situ, ad momentum Trianguli $Y\alpha P$ in suo, respectu ejusdem $A\alpha$ rectæ; est ut Trianguli illius in distantia $3\,bB + \frac{5}{3}BV$ suspensi momentum, ad ejusdem suspensi in distantia $\frac{2}{3}BV$, (hoc est, in suo situ,) momentum respectu ejusdem $A\alpha$. Hoc est (propter eandem Trianguli magnitudinem) ut distantia $3\,bB + \frac{5}{3}BV$, ad distantiam $\frac{2}{3}BV$. Hoc est, ut $\frac{5}{3}BV$ ad $\frac{2}{3}BV$ (seu ut 5 ad 2) atque insuper ut $3\,bB$ ad $\frac{2}{3}BV$, seu $9\,bB$ ad $2\,BV$. Hoc est; ut 5 ad 2, atque insuper ut $9\,a$ ad $2\,s$.

Quod quidem cum ubique fiat: Ratio momenti Trapeziorum simul omnium, sive quæ Totam Semicycloidem, sive quæ ipsius Portionem ut $b\beta\alpha A$, complent; (quippe de partibus perinde procedit demonstratio atque de totis;) ad momentum omnium Triangulorum complentium vel totum Semicirculum, vel ipsius Portionem, ut $B\alpha A$, respective; ea est quam habent omnium illorum triangulorum ut $Y\alpha P$, in distantias respective $3\,bB + \frac{5}{3}BV$ suspensorum momenta, ad momenta earundem in distantiis respective $\frac{2}{3}BV$ suspensorum; seu, ut omnia $Y\alpha P$ in $\frac{5}{3}BV$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective ductâ, atque insuper ut eadem omnia $Y\alpha P$ in $3\,bB$, ad eadem in $\frac{2}{3}BV$ respective.

Cumque sit eadem ubique ratio Trianguli, ut $Y\alpha P$, in $\frac{5}{3}BV$, ad idem in $\frac{2}{3}BV$; adeoque & omnium ad omnia; nempe ut 5 ad 2:

 Sed

Fig. 166, 168. Sed non eadem ubique ratio Trianguli, ut Y α P, in 3 b B; ad idem in $\frac{2}{3}$ B V; propter tum Triangulorum super æquales bases inæqualem altitudinem, tum aliam atque aliam rationem b B ad B V, hoc est, arcus ad sinum: Propterea, rationi 5 ad 2; alia consocianda est; Quam nempe habeant omnia respective Triangula ut Y α P in 3 b B, ad eadem in $\frac{2}{3}$ B V; seu, quam habent omnia in 9 b B, ad eadem in 2 B V, respective: Hoc est, Quam habet *Noncuplum omnium* b B, seu β α, (hoc est B A arcuum arithmetice proportionalium,) aut his æqualium β ϛ Triangulum α τ t fig. 170. complentium, *in respectiva Triangula* Y α P, seu (propter æquales omnium bases) *Triangulorum altitudines* V α respectivas, (hoc est, sinus versos arcuum B α, qui cum B A complent Semicirculum,) seu in, ipsis æquales, b β, seu *minuta parallelogramma* his proportionalia figuram Sinuum versorum seu Trilineum Restitutum fig. 170. complentia: Ad *Duplum omnium* B V (Sinuum rectorum eorundem arcuum B A,) aut his æqualium β υ (complentium τ α υ figuram Sinuum rectorum totius Semicirculi fig. 170.) in *eadem respective Triangula* seu Triangulorum *Altitudines*, aut *minuta Parallelogramma* ipsis Proportionalia: Hoc est (in Trilineo Restituto fig. 170.) quam habet *Noncuplum* omnium b β in β ϛ, ad *Duplum* eorundem b β in β υ, respective.

Fig. 170. At b β, in β ϛ seu β α ducta, exhibet ipsius b β momentum respectu A α; adeoque omnes b β in respectivas β ϛ seu β α, exhibent respectu ejusdem A α, momenta omnium b β, hoc est momentum Trilinei A τ α; Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ϛ, est Noncuplum Momenti Trilinei A τ α respectu A α. Et similiter in portionibus: Puta, Noncuplum omnium b β portionem b β α B A complentium, in respectivas β ϛ seu β α ductarum, (hoc est *omnia* 9 *a b*, portionem b β α B A spectantia,) est Noncuplum momenti portionis b β α B A, respectu ejusdem A α.

Fig. 168, 169, 170. Atque omnes eædem b β in β υ fig. 170. seu in B V fig. 168, 169. Exhibent *Triplum* Momenti Semicirculi A D α, aut ipsius Sectoris B α A, (prout de Triangulis totum Semicirculum, aut ipsius tantum Sectorem complentibus, intelligatur,) respectu Diametri A α; per § A. prop. 18.

Adeoque *Duplum* omnium b β in β υ, est *Sextuplum* momenti Semicirculi α D A respectu ipsius A α: Atque, in partibus similiter, respective sumptis.

Adeoque *Noncuplum* omnium b β in β ϛ, ad *Duplum* earundem b β in β υ, est ut *Noncuplum* momenti Trilinei Restituti A τ α,

(ejusve

(ejusve portionis b β α B A,) fig. 170. respectu rectæ A α; ad *Sextuplum* momentum Semicirculi A D α, (ejusve Sectoris respectivi B α A,) respectu Diametri A α: Vel, ut *Triplum* momenti illius, ad *Duplum* momenti hujus.

Est autem (per § G. prop. 17.) Trilinei Restituti A τ α fig. 170. momentum respectu A α, $\frac{3}{8}RP^2 - 2R^3$; adeoque hujus Triplum $\frac{9}{8}RP^2 - 6R^3$: Et momentum Semicirculi, respectu A α, per § Q. prop. 15. $\frac{2}{3}R^3$; hujusque Duplum $\frac{4}{3}R^3$. Est ergo Triplum illud ad Duplum hoc; ut $\frac{9}{8}RP^2 - 6R^3$, ad $\frac{4}{3}R^3$; hoc est, $9RP^2 - 144R^3$, ad $32R^3$: Seu ut $9P^2 - 144R^2$ ad $32R^2$. Atque hæc demum ratio (ut supra ostensum est) rationi 5 ad 2, hoc est $80R^2$ ad $32R^2$ conjuncta; exhibet rationem momenti Semicycloidis A τ α, ad momentum Semicirculi A D α, respectu ejusdem A α rectæ; nempe, ut $9P^2 - 64R^2$ ad $32R^2$. Cum itaque momentum illud Semicirculi sit $\frac{2}{3}R^3$: Erit Semicycloidis momentum respectu A α (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis,) $\frac{9P^2 - 64R^2}{48}R = \frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$.

Atque hoc Momentum per Semicycloidis magnitudinem $\frac{3}{4}RP$ (§ B.) divisum; exhibet ejusdem ab A α Centri gravitatis distantiam, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{9P}$; adeoque, à τ T, $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{9P}$; & (restituendo magnitudinem,) ejusdem respectu τ T momentum $\frac{3}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$. Solidumque conversione factum (utpote ad Ungulam ut P ad R,) circa A α, $\frac{3}{16}P^3 - \frac{4}{3}R^2P$; & circa τ T, $\frac{3}{16}P^3 + \frac{4}{3}R^2P$: Semisolidaque horum dimidia.

Eademque Momenta, ex respectivis Parallelogrammi A α τ T momentis, hoc est, (propter $\tau\alpha = \frac{1}{2}P$, & A $\alpha = 2R$, distantiamque Centri gravitatis sive à τ T sive ab A α, $\frac{1}{2}\tau\alpha = \frac{1}{4}P$,) ex $\frac{1}{4}RP^2$, subducta; relinquunt Complementi Semicycloidis A τ T, momentum respectu A α (seu correspondentem Ungulam Semiquadrantalem) $\frac{1}{16}RP^2 + \frac{4}{3}R^3$; & respectu τ T, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$: (Et Solida Semisolidaque correspondentia, ad hæc Momenta Ungulasve, ut P seu $\frac{1}{2}P$, ad R:) Eademque momenta Complementi Semicycloidis per magnitudinem, $\frac{1}{4}RP$ (per § B.) divisa; exhibent ejusdem ab A α distantiam Centri gravitatis $\frac{1}{4}P + \frac{16R^2}{3P}$; & à τ T, $\frac{1}{4}P - \frac{16R^2}{3P}$.

Similiter, in Semicycloidis portione b β α V A. Momentum hujus,

Fig. 168, jus, ad momentum Sectoris in Semicirculo correspondentis, BαA,
169, respectu ipsius Aα, (ut modo ostensum est,) est ut 5 ad 2; atque
170. insuper, ut *Triplum* momenti correspondentis Portionis Trilinei restituti, bβαBA, ad *Duplum* momenti Sectoris Semicirculi BαA; respectu Aα.

Est autem Momentum Portionis Trilinei Restituti bβαBA, respectu Aα, $\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2$, (per § H. prop. 17.) adeoque ejusdem Triplum $\frac{3}{2}a^2R + 3asR - 3vR^2$; & momentum Sectoris BαA, respectu Aα, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$, (per § S. prop. 15) hujusque Duplum $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{3}s^2R$. Ratio itaque quam habet Triplum illud ad hoc Duplum, hoc est $\frac{3}{2}a^2R + 3asR - 3vR^2$ ad $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{3}s^2R$; seu $9a^2 + 18as - 18vR$, ad $4vR + 2s^2$; rationi 5 ad 2, seu $10vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$ (addendo) consociata; exhibet Momenti Portionis Semicycloidis bβαVA, ad momentum correspondentis Sectoris BαA, respectu Aα, rationem, $9a^2 + 18as - 8vR + 5s^2$ ad $4vR + 2s^2$. Cum itaque Sectoris momentum illud sit, $\frac{1}{3}vR^2 + \frac{1}{6}s^2R$ (ut modo dictum;) erit Portionis Semicycloidis bβαVA, momentum respectu Aα, (seu correspondens Ungula Semiquadrantalis) $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$.

Atque hoc momentum, per Portionis Semicycloidis bβαVA magnitudinem $\frac{1}{2}fR = \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, (per § B.) divisum; exhibet distantiam Centri gravitatis ab Aα, $\frac{9a^2 - 8as - 8v + 5s^2}{18a + 18s} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s - \frac{4vR + 2s^2}{9a + 9s} = \frac{1}{2}f - \frac{4vR + 2s^2}{9f}$. Unde etiam ejusdem à τT & bK distantia facile colligitur; & momentum respectu illarum. Item Solidum ejusdem circa Aα conversione factum, $\frac{3}{4}a^2P + \frac{3}{2}asP - \frac{2}{3}vRP + \frac{5}{12}s^2P$; & semisolidum, hujus dimidium.

Si autem ex totius Semicycloidis respectu Aα momento, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$, subducatur hoc portionis bβαVA momentum $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$: Relinquitur Segmenti bβτ momentum respectu ejusdem Aα, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{5}{12}s^2R$; seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $b = 2R - v$,) $\frac{1}{4}\alpha RP - \frac{3}{4}sRP - \frac{3}{4}\alpha^2R + \frac{1}{2}\alpha sR - \frac{2}{3}bR^2 - \frac{5}{12}s^2R$: Quod per magnitudinem $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$, (§ B.) divisum: Exhibet Centri gravitatis ab Aα distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{3}s - \frac{4bR - 2s^2}{9\alpha - 9s} = \frac{1}{2}P - \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{2}s - \frac{2b^2}{9\alpha - 9s}$: Adeoque à Tτ, $\frac{3}{2}\alpha - \frac{1}{2}s + \frac{2b^2}{9\alpha - 9s}$: Ejusque, respectu Tτ momentum $\frac{3}{4}\alpha^2R - \frac{1}{3}\alpha sR - \frac{1}{4}s^2R + \frac{2}{3}b^2R$.

Et

Ex illo autem Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha$ V A Momento (Ungulave) respectu A α; si subducatur Trapezii b $\beta\alpha$ V, respectu ejusdem A α, Momentum Ungulave: Relinquitur, respectu ejusdem A α, Momentum Ungulave Segmenti Semicycloidis A b V. K. Fig. 168, 169, 170.

Componitur autem hoc Trapezium, ex Parallelogrammo b $\beta\alpha$ B, & Triangulo α B V. Parallelogrammi magnitudo (propter basin b B $= a$, & altitudinem V $\alpha = b$, est ab; Centrique gravitatis (utpote in sui medio positi) ab A α distantia, $\frac{1}{2}$bB $+ \frac{1}{2}$BV $= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}f$: Adeoque momentum $\frac{1}{2}fab$. Trianguli magnitudo (propter BV $= s$, & V$\alpha = b$,) $\frac{1}{2}sb$; Centrique gravitatis ab A α distantia $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$BV $= \frac{1}{3}s$: Adeoque momentum respectu A α, $\frac{1}{6}s^2b$. Momentum itaque Trapezii b $\beta\alpha$ V respectu A α, est, $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b = a^2R + asR - \frac{1}{2}a^2v - \frac{1}{2}asv + \frac{1}{3}s^2R - \frac{1}{6}s^2v$. (Magnitudo autem, $ab + \frac{1}{2}sb$, Adeoque Centri gravitatis ab A α Distantia, $\frac{3fa + s^2}{6a + 3s} = \frac{1}{2}a + \frac{3a + 2s}{12a + 6s}s$.)

Illud autem Trapezii Momentum, ex Portionis b $\beta\alpha$ V A momento (modo reperto) $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$ subductum; relinquit, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$, Momentum Segmenti Semicycloidis b V A respectu A α, Ungulamve correspondentem. (Solidumque & Semisolidum ejusdem circa A α conversione factum, ad Ungulam illam, ut P, & $\frac{1}{2}P$, ad R.)

Quod quidem momentum, per magnitudinem (§ B. inventam) $-\frac{1}{2}eR(-\frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR) + av + \frac{1}{2}sv$, divisum; exhibet Centri grav. ab A α distantiam $\frac{-3a^2R + 6asR + s^2R - 8vR^2 + 6a^2v + 6asv + s^2v}{-6aR + 6sR + 12av + 6sv}$; hoc est $\frac{1}{2}a + \frac{2asR + s^2R - 8vR^2 + 3asv + 2s^2v}{-6eR + 12av + 6sv}$, seu $\frac{1}{2}a - \frac{8vR^2 - 3asR - s^2R - 3asv - 2s^2v}{-6eR + 12av + 6sv}$. Unde habetur etiam ejusdem à τ T vel b K distantia; ejusque respectu hujus momentum, Ungulave: Solidumq; & Semisolidum ejusdem circa τ T vel bK conversione factum.

Si autem ex Parallelogrammi A V b K momento respectu A α (§ G. tradito) $\frac{1}{2}f^2v$; hoc est, ex $\frac{1}{2}a^2v + asv + \frac{1}{2}s^2v$; auferatur momentum segmenti A b V respectu ejusdem A α, jam inventum, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: Relinquitur Trilinei A b K respectu ejusdem A α, momentum $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2R - \frac{1}{2}asR$ —

$-\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{3}s^2v$: Adeoque, propter magnitudinem (§ B. traditam) $\frac{1}{2}eR+\frac{1}{2}sv$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα,

$$\frac{8vR^2+6a^2R-6asR-s^2R+6asv+4s^2v}{6eR+6sv}.$$

L. Hæc eadem Momenta & Solida, aliâ adhuc methodo ſic inveſtigantur.

Fig. 166, 168. Omnia momenta rectarum b V, æqualibus intervallis ſumptarum, (ſive totam Semicycloidem, ſive ipſius ſegmentum ut b V A complentium,) reſpectu rectæ Aα; momentum integrum complentia: Vel omnia Triangula rectangula Iſoſcelia eiſdem inſiſtentia, Semiquadrantalem Ungulam, aciem habentem Aα, complentia: Sunt totidem Semiquadrata earundem b V rectarum: Hoc eſt, ſemiſumma quadratorum rectarum omnium b V $=$ b B $+$ B V $= a+s$: Hoc eſt, ſemiſumma omnium $a^2+2as+s^2$; ſeu ſumma *Omnium*, $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$; ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Fig. 170. Sunt autem *Omn.* $\frac{1}{2}a^2$, ſeu ſemiſumma quadratorum omnium b B rectarum: Idem atque momentum Trilinei reſtituti A$\tau\alpha$, (quam figuram *Arcuum*, non minus quam Sinuum verſorum figuram eſſe, oſtendimus § A. prop. 17.) ejuſve ſegmenti b B A, reſpectu Aα. (Eſt enim magnitudo cujuſque b B $= a$, quæ itaque in ſui ſemiſſem, ſeu Centri gravitatis diſtantiam, $\frac{1}{2}a$, ducta; exhibet ejuſdem reſpectu Aα momentum, $\frac{1}{2}a^2$.) Nempe Trilinei A$\tau\alpha$ momentum, $\frac{1}{8}RP^2-2R^3$: Et Segmenti b B A, momentum, $-\frac{1}{2}a^2R+asR-vR^2+\frac{1}{2}a^2v$, per § G, I. prop. 17.

Fig. 168, 169. Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$; ſeu ſemiſumma Quadratorum rectarum *BV* (æqualibus intervallis ſumptarum) Semicirculum A Dα, ejuſve ſegmentum A B V complentium; eſt ejuſdem A Dα Semicirculi, ejuſve Segmenti A B V, momentum reſpectu diametri ſuæ Aα. Nempe Semicirculi momentum, $\frac{2}{3}R^3$; & ſegmenti A B V momentum (reſpectu ejuſdem Aα) $\frac{1}{3}vR^2-\frac{1}{6}s^2R+\frac{1}{6}s^2v$; per § Q, R. prop. 15.

His autem jam inventis *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}s^2$; ſi addantur *Omn.* as, (ut modo oſtenſum eſt) habentur *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: Momentum Semicycloidis, ejuſve Segmenti b V A, reſpectu Aα.

Adeoque ſi admittamus Momentum illud Semicycloidis Segmentive ſui, per præcedentem methodum, jam inventum: Inde colligitur ſumma omnium as; hoc eſt, factum ex omnibus ordinatis in Semicirculo, ductis in reſpectivos arcus ipſis & vertice interceptos.

Quippe,

V

tudi-
A a,

efti-

um,
om-
tia :
emi-
Sunt
nma
Hoc
$+as$

b B
uam
ffe,
Eft
ntri
no-
R_1;
per

V
eg-
fve
npe
re-
R.

s,
lo-

tive
tur
mi-

pe,

(
fu
fp
tiu
me
omn
utiq
in B
A
quate
eft M
§ K,
Ad
Omn.
Omn.
Semicy
daque c
Item
datur N
tur port
alia meth
tatis, Sol
Exhibi
totius) e
menta ref
gravitatis
gravitatis.
plano rect
trum, per p

Quippe, si ex Momento Semicycloidis, respectu rectæ A α, (§ H. invento,) $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; auferamus tum $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3$, tum $\frac{2}{3}R^3$, (hoc est, summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}s^2$;) Quod restat, $\frac{1}{16}RP^2$, est summa *omn. as.*

Similiter; Si ex Momento Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, (§ K. invento,) $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; auferamus, tum $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$, tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$; (hoc est summam *omn.* $\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}s^2$, eo spectantium;) Quod restat, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$, est summa *omn. as*, eo spectantium.

Si vero Momentum illud integrum sive Semicycloidis, sive Segmenti ejus b V A, nondum ut inventum assumatur: Eadem summa *omnium as*, per se habetur, per § K, L. prop. 18. (Completur utique Solidum A b B V, ibidem descriptum, ex ductu rectarum bB $= a$, in BV $= s$, respective.) Nempe, quæ totam Semicycloidem spectant $\frac{1}{16}RP^2$; Quæque ipsius Segmentum b V A, $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv$.

Additis igitur, pro tota Semicycloide, tum $\frac{1}{8}RP^2 - 2R^3 = Omn.\ \frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{2}{3}R^3 = Omn.\ \frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{16}RP^2 = Omn.\ as$: Habentur, quatenus totam Semicycloidem spectant, $Omn.\ \frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$: Hoc est Momentum Semicycloidis respectu A α, $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$. Ut supra § K. Fig. 166, 168.

Additisque, pro Semicycloidis Segmento b V A, tum $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v = Omn.\ \frac{1}{2}a^2$; tum $\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v = Omn.\ \frac{1}{2}s^2$; tum $\frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{4}s^2R + \frac{1}{2}asv = Omn.\ as$: Habentur $Omn.\ \frac{1}{2}a^2 + as + \frac{1}{2}s^2$, eo spectantia; Hoc est, Momentum Segmenti Semicycloidis b V A, respectu A α, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; ut prius § K. Unde Centra gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Item, Si Momento Segmenti b V A respectu A α, sic invento; addatur Momentum Trapezii b β α V (§ K. traditum,) Habebitur portionis b β α V A Momentum respectu A α; idem nempe quod alia methodo prius exhibitum est § I. Unde ejusdem Centrum gravitatis, Solidaque conversione facta, eodem modo quo prius elicientur.

Exhibuimus itaque tum ipsius Semicycloidis (adeoque & Cycloidis totius) ejusque partium expositarum, tum Magnitudines, tum Momenta respectu rectarum aliquot expositarum; earumque Centrorum gravitatis ab illis rectis distantias: Et propterea ipsa earundem Centra gravitatis. Datis enim Centri gravitatis distantiis a duabus in eodem plano rectis (non invicem parallelis;) datur ipsum gravitatis Centrum, per prop. 26. cap. præced. M.

 Atque

Atque his quidem ita traditis; non erit difficile in aliis item Cycloidis Segmentis, variis modis abscissis, tum Magnitudines, tum Momenta, adeoque & Centra gravitatis determinare: Additionibus scilicet, & Subductionibus factis prout res postulaverit.

Eademque Segmenta quæ nos ad aliquot rectas comparavimus, eorundem respectu illarum Momenta determinando, ipsaque Centra gravitatis (per distantias suas à duabus saltem non parallelis rectis) designando: Poterit quilibet ad alias quasvis datas rectas (propter tum Magnitudines tum distantias Centrorum datas) similiter comparare: Idemque & in aliis Segmentis (horum ope) præstare.

Ex Momentis autem; Ungularum Magnitudines,& Solidorum conversione (perfectâ aut imperfectâ) descriptorum, obtineri posse; in præcedentibus sæpe dictum est. Sunt utique Ungulæ Semiquadrantales, ipsis Momentis (ut à nobis designatis) æquales; (aliæque Ungulæ, ad has, in altitudinum ratione:) Solidaque integra conversione facta, ad correspondentes Ungulas Semiquadrantales, ut *P*, ad *R*; & semisolida, eorum dimidia: Et similiter de aliis imperfectis conversionibus, servatâ ratione, judicandum. Ut ad hanc aliasque propositiones sæpius insinuatum est.

N. Denique; quæ de Cycloide primariâ jam tradidimus omnia; eadem ad Secundarias facile transferuntur, quas *Protractas Contractasque* appellant. Fig. 175, 176.

Cycloidem vero *Primariam* illam dicunt quam hactenus descripsimus; Quam scilicet volventis circuli Punctum aliquod in peripheria describit, dum ipsa sibi Peripheria commensurat in subjecto plano æqualem rectam $\tau\alpha\tau$; Ejusve Centrum rectam describit cCc, peripheriæ æqualem. Puta $\tau A \tau$, fig. 166. 175. 176.

Si vero recta cCc, quam Centrum describit dum circulus unam conversionem facit, seu quæ huic subest in plano $\tau\alpha\tau$, quam Cycloidis Basem dicimus, Major fuerit quam Circuli Genitoris Peripheria, *Protractam* dicimus Cycloidem; ut $\tau I \tau$ fig. 175. si Minor *Contractam*, ut $\tau E \tau$.

Dúmque Circulus ADα, aliquo peripheriæ suæ puncto, describit Cycloidem *primariam*, ut τA; Fig. 166. 176. eodem tempore, Circuli Concentrici cujusque Minoris correspondens punctum describit Cycloidem *Protractam* ut τ I, fig. 176. Concentrici vero *Majoris* cujusque punctum correspondens, *Contractam* describit ut τ E. Quarum quidem Cycloidum *Protractæ Contractæque* Genitores, sunt illi *Minor*, *Major* que Circulus.

Quæ

Quæ autem de Cycloide Primaria traduntur omnia; eadem Secundariis accommodantur; cum hoc discrimine, Quòd, cum in *Primaria* rectæ b B sint ipsis Genitoris sui arcubus B A Æquales; in *Protractis*, Majores sunt; in *Contractis* Minores; quam suorum respective Genitorum Correspondentes arcus B A; & quidem in ea ratione Majores Minoresve, qua recta $\tau\alpha$, major est vel minor quam $\frac{1}{2}P$, Genitoris Circuli sui Semicircumferentia. Adeoque, quoties in calculum veniunt rectæ b B; pro α, substituenda erit quantitas quæ ad hanc sit in ea ratione qua est $\tau\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$. Et similiter, mutatis mutandis, in earundem Quadratis Cubis, reliquisque potestatibus: Ut in præcedentibus aliquot propositionibus monitum fuit.

PROP. XXI.

Ungula Semicycloidi A $\tau\alpha$ insistens aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera*, correspondentis Ungulæ Semicirculo A D α insistentis; seu ut 5 ad 2. A. Fig. 166.

Ejusque *Momentum* respectu aciei suæ, est *Duplum-sesquitertium* Momenti Ungulæ respectivæ Semicirculo A D α insistentis, eandem aciem habentis, respectu aciei suæ; seu ut 7 ad 3.

Idémque in respectivis portionibus obtinet: Puta *Ungula* Quadrilineo b $\beta\alpha$ A in Semicycloide insistens, aciem habens $\tau\alpha$, est *Dupla-sesquialtera* respectivæ Ungulæ Sectori B α A insistentis; seu ut 5 ad 2.

Ejúsque *Momentum* est *Duplum sesquitertium* momenti respectivæ Ungulæ insistentis Sectori BαA; respectu aciei suæ $\tau\alpha$; seu ut 7 ad 3.

Atque hinc eadem respective determinantur, tum quoad Momenta, & Centra gravitatis, in Ungulis Semicycloidi, ejusve portionibus, insistentibus; atque in illis

Fig. 166. quæ Semicirculo, ejusque portionibus respectivis insistunt.

Nempe (retentis Symbolis ut in propositionibus præcedentibus,)

B. Semiquadrantalis Ungulæ, Semicycloidis $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo est $\frac{5}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; respectu T A, $\frac{25}{48}R^3P$; Distantia

H. Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; à T A, $\frac{5}{6}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

B. Aciemque habentis T A; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; respectu T A, $\frac{59}{48}R^3P$; Distantia Centri grav. à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; à T A, $\frac{59}{42}R$:

H. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$; $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

H. Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; respectu T A, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à T A, $\frac{7}{6}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$:

M. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}$.

C. Ungulæ (Semiquadrantalem intellige) Portionis Semicycloidis $b\beta\alpha VA$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{24}fR^3 + \frac{7}{8}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu T A, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R + \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; à T A, $\frac{5}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$:

G. Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3$ +

$+\frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, Fig. 166.
$a - \frac{45a^2R+64vR^2-41s^2R+14s^2v}{90aR+150sR-30sv}$.

Aciemque habentis TA; Mag. $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR$; Momentum C.
reſp. $\tau\alpha$, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; reſp. TA, $\frac{22}{24}fR^3 - \frac{12}{24}shR^2$
$-\frac{7}{36}s^3R$; Diſt. Cen. grav. à $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R + \frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$; à
TA, $\frac{17}{42}R - \frac{52shR+49s^3}{441fR-105sh}$: Momentum reſpectu G.
A α, $\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR$
$+\frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $a -$
$\frac{32vR^2+63a^2R-19s^2R-14s^2v}{126aR+66sR+30sv}$.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR$ G.
$-\frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2$
$+\frac{21}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2$
$+\frac{1}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis
à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$; à
TA, $\frac{7}{6}R + \frac{12vR^2-30asR-8s^2R+15asv+7s^2v}{27a^2+54as-24vR+15s^2}$: Momentum reſpectu A α, $\frac{29}{24}cR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R$ M.
$+\frac{3}{2}a^2sR + \frac{5}{6}as^2R + \frac{7}{36}s^3R$; Diſtantia Centri grav. ab A α,
$\frac{87cR^2-96avR-9svR+36a^3+108a^2s+60as^2+14s^3}{54a^2+108as-48vR+30s^2}$.

Ungulæ portionis Semicycloidis b β τ, aciem habentis $\tau\alpha$; D.
Magnitudo $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{1}{12}sbR$; Momentum reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{15}{24}\alpha R^3 - \frac{15}{24}sR^3 - \frac{7}{8}sbR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; reſpectu
TA, $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; Diſtantia
Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R - \frac{7sb^2}{45\alpha R-45sR-15sb}$; à TA,
$\frac{1}{6}R + \frac{7sb^2}{45\alpha R-45sR-15sb}$: Momentum reſpectu A α, I.

$\frac{1}{32}R^2P^2$

Fig. 166. $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri grav. ab Aα; $a + \frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}$.

D. Aciemque habentis TA; Magnitudo $\frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; Momentum reſpectu τα, $\frac{25}{24}\alpha R^3 - \frac{25}{24}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; reſpectu TA, $\frac{59}{24}\alpha R^3 - \frac{59}{24}sR^3 + \frac{19}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{25}{42}R - \frac{52shR + 40s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$; à TA, $\frac{59}{42}R + \frac{52shR + 49s^3}{441\alpha R - 441sR + 105sh}$:

I. Momentum reſpectu Aα, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri grav. ab Aα, $a + \frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}$.

I. Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR - \frac{5}{12}s^2R$; Momentum reſpectu τα, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{25}{12}asR^2 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; reſpectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$; Diſtantia Centri gravitatis à τα, $\frac{5}{6}R - \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}$:

N. Momentum reſpectu Aα, $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{24}aR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$; Diſtantia Centri gravitatis ab Aα,

$$\frac{9P^3 - 105R^2P - 174aR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}$$

F. Ungulæ Trapezii bβαV, aciem habentis τα; Magnitudo, $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$; Momentum reſpectu τα, $\frac{1}{3}ah^3$ +

$+\frac{1}{4}sb^3$; respectu T A, $ab^2R+\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{4}sb^3$; Fig. 166. Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}b$; à T A, $2R-\frac{4a+3s}{6a+4s}b$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{3}asb^2$ K. $+\frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a+\frac{4as+3s^2}{12a+8s}=\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}s+\frac{s^2}{36a+24s}$.

Aciemque habentis T A; Magnitudo, $2abR+sbR-\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{3}sb^2$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $ab^2R+\frac{2}{3}sb^2R-\frac{1}{3}ab^3-\frac{1}{4}sb^3$; respectu T A, $4abR^2+2sbR^2-2ab^2R-\frac{4}{3}sb^2R+\frac{1}{3}ab^3+sb^3$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b+\frac{2Rsb-fb^2}{24aR+12sR-6ab-4sb}$; à TA, $2R-\frac{1}{2}b-\frac{2sbR-fb^2}{24aR+12sR-6ab-4sb}$: Momentum respectu $A\alpha$, $fabR$ K. $+\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{1}{3}asb^2-\frac{1}{8}s^2b^2$; Dist. Cen. grav. ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}s+\frac{2s^2R-fsb}{48aR+24sR-12ab-8sb}$. F.

Aciemque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $\frac{1}{2}fab+\frac{1}{6}s^2b$; Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{3}asb^2+\frac{1}{8}s^2b^2$; respectu TA, $fabR+\frac{1}{3}s^2bR-\frac{1}{4}a^2b^2-\frac{1}{3}asb^2-\frac{1}{8}s^2b^2$; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}b+\frac{2asb+s^2b}{12fa+4s^2}$; à TA, $2R-\frac{1}{2}b-\frac{2asb+s^2b}{12fa+4s^2}$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1}{3}a^3b+\frac{1}{2}a^2sb$ O. $+\frac{1}{3}as^2b+\frac{1}{12}s^3b$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{4a^3+6a^2s+4as^2+s^3}{6fa+2s^2}$. K.

Ungulæ Segmenti Semicycloidis bV A, aciem habentis TA; Magnitudo, $-\frac{1}{4}eR^2+avR+\frac{1}{4}svR-\frac{1}{2}as^2-\frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu T A, $-\frac{5}{24}eR^3+\frac{4}{3}avR^2+\frac{2}{8}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{12}{36}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3$ E.

+

Fig. 166. $+\frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu b V, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R - \frac{6fvR^2 - 3fs^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$; à bV, $v - \frac{5}{6}R \left(= \frac{1}{6}R - b\right)$

K. $- \frac{6fvR^2 - 3fs^2R\,(=3fv^2R) - 4as^2 - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}$: Momentum respectu A α, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a +$

$$\frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}.$$

E. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; Momentum respectu T A, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; respectu b V, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis à T A,

$$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à $\tau\alpha$, $$\frac{-87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à b V, $$\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

K. Momentum respectu A α, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{32}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a +$

$$\frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3},$$

Aciemque

P. V

$\frac{1}{4}s^3v$;

$-\frac{2}{9}s^3R$

T A,

$\frac{1}{6}$R—

R--b)

omen-

$-\frac{1}{2}a^2vR$

Centri

$\frac{s^4}{\,}$.

$-\frac{1}{4}svR$

$\frac{2}{3}avR^2$

$\tau\alpha$,

$\frac{1}{4}s^3v$;

$-\frac{2}{9}s^3R$

T A,

$v s^3 R$

$8s^3R$

$-8s^3R$

;

$\frac{1}{2}s^2R^2$

$-\frac{4}{3}s^4$;

$\frac{4}{\,}$,

nque

PR
Aci
-
-
r
-
-
C
à
M
-
-
4
Aci
-
sp
-
-
-
-
-
à

Aciemque habentis bV; Magnitudo, $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; Momentum respectu TA, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; respectu τα, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; respectu bV, $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{2}as^2R - \frac{13}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri grav. à TA, $\frac{5}{6}R - \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$; K. Fig. 166.

à τα, $\frac{7}{6}R + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$: à bV, $\frac{5}{6}R - b\,(= v - \frac{5}{6}R) + \frac{2as^2v + s^3v - es^2R}{3eR^2 + 6avR + 9svR - 6as^2 - 2s^3}$:

Momentum respectu Aα, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{11}{72}s^2R^2 - \frac{2}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{2}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis ab Aα, $\frac{1}{2}a + \frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{18eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}$. K, L.

Aciemque habentis Aα; Magnitudo, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$; Momentum respectu τα, $-\frac{3}{8}a^2R^2 + \frac{3}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{5}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$; respectu TA, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{7}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$; respectu bV, $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$; Distantia Centri gravitatis à τα, K, L.

$$\frac{1}{2}R - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

à TA, $$\frac{1}{2}R + \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

 à bV,

à b V, $\frac{1}{2}R - b - \frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

O, P. Momentum respectu A α, $\frac{22}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}s^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; Distantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2sv + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 36asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}.$$

Adeoque exhibuimus, in expositis Ungulis, tum Magnitudines & Momenta, tum & ipsa Gravitatis Centra. Quæque de Ungulis tradita sunt; ad Solida conversione facta facile transferentur. Quæque de expositis dicta sunt; facile est ad alia, calculo rite adhibito, accommodare: Puta, Ungulas Trilinei A b K; aliasve ejusmodi.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam spectantibus tradita sunt; eadem omnia ad Ungulas Solidaque, Semicycloides Secundarias (sive Protractas sive Contractas) spectantia facile transferentur.

A. Fig. 166, 168, 170. DIstributis, (ut ad propositionem præcedentem) Tum Semicirculo A D α, in minuta Triangula, numero infinita: Tum Semicycloide A τ α, in totidem Trapezia correspondentia: Intelligatur utrique insistere Semiquadrantalis Ungula, aciem habens τ α.

Quæ autem vel toti Semicirculo, vel ipsius Sectori, ut B α A, insistit Ungula; componi intelligatur ex infinitis numero Ungulis, seu Pyramidulis, minutis illis Triangulis (ut α B, seu Y α P,) incumbentibus: Quarum communis vertex sit α punctum; Basisque super Triangulorum illorum Basibus (ut Y P, &c.) erectæ, altitudines habeant ipsis V α respectivis æquales.

Quæque Semicycloidi sive toti, sive ipsius Portioni, ut b β α V A (quæ Sectori B α A respondet,) insistit; ex totidem Ungulis, quæ respectivis Trapeziis β b, seu y δ ξ p, &c. incumbant; acies habentibus

bentibus in $\tau\alpha$ rectâ continuè jacentes, altitudines verò super ipsis ybp Trapeziorum basibus (pro Semiquadrantalis Ungulæ ratione) ipsis Vα (respectivè) earundem à $\tau\alpha$ distantiis, æquales. Fig. 166, 170.

Quæ quidem Minutis illis Trapeziis insistentes Ungulæ (propter Trapezia illa æqualia, respectivis tum Semicirculi Triangulis, tum Trilinei Restituti fig. 170. Parallelogrammis simul sumptis,) æquales erunt respectivis Pyramidulis Cuneisque simul sumptis, quæ respectivis Semicirculi Triangulis Trilineique restituti Parallelogrammis, incumbunt; adeoque ad pyramidulas illas, ut 5 ad 2; (ut ad prop. præced. ostensum est.) Suntque in eisdem respective sive à $\tau\alpha$, sive T A, (aut hisce parallelis,) distantiis (ut patet.) Adeoque & Momenta Momentis æqualia habebunt, sive respectu rectæ $\tau\alpha$, sive T A, sive cujusvis hisce parallelæ rectæ.

Cumque hoc in singulis respective obtineat, (adeoque in simul omnibus:) Illius, quæ ex Ungulis hisce, minutis Trapeziis incumbentibus, componitur, (sive toti A$\tau\alpha$ Semicycloidi, sive ipsius portioni, ut b$\beta\alpha$A, vel b$\beta\delta$d, vel b$\beta\tau$, &c. fig. 166. insistentis,) Ungulæ Momentum; æquale est Momentis, simul sumptis, tum illius quæ ex Pyramidulis componitur Ungulæ, (sive toti Semicirculo ADα, sive ipsius portioni respectivæ, ut BαA, BαD, BαB, &c. insistentis,) tum illius quæ ex Cuneis componitur, (sive toti Trilineo restituto, sive ipsius portioni respectivæ, ut b$\beta\alpha$A, b$\beta\delta$d, b$\beta\tau$, &c. fig. 170. insistentis,) simul sumptis.

Est autem illius quæ ex Cuneis, ad illius quæ ex Pyramidulis componitur, Ungulæ momentum, respectu rectæ $\tau\alpha$; ut 4, ad 3, (per § A. prop. 19.) Est itaque illius quæ ex Ungulis Trapeziorum componitur (sive Toti Semicycloidi A$\tau\alpha$, sive ipsius Portioni, ut b$\beta\alpha$A, b$\beta\delta$d, b$\beta\tau$, &c. insistentis) momentum (utpote utrisque illis æquale) ad momentum illius quæ ex pyramidulis componitur (sive Toti Semicirculo ADα, sive ipsius respectivæ portioni BαA, BαD, BαB, &c. insistentis;) ut 7 ad 3.

Et quidem, ea quæ Trilineo restituto A$\tau\alpha$, fig. 170. insistit Ungula sive aciem habeat $\tau\alpha$, sive T A, sive aliam quamvis rectam hisce parallelam; alia non est quam quæ Trilineo distorto A$\tau\alpha$D (cycloidis curvæ, & Semicirculi convexæ interjecto) insistit, in situm debitum restituta: Et Ungularum Momenta, respectu rectarum $\tau\alpha$, TA, aut hisce parallelarum, (propter tum Magnitudines tum Distantias æquales,) sunt æqualia. Quod & in partibus respective comparatis, perinde obtinet: Puta, quæ curvæ rectæque A b, A B, fig. 170. & quæ curvis A b, A B, fig. 166. interjacet; item quæ

Fig. 166, 170. rectis B α, b β, fig. 170. quæque duabus sive rectis sive curvis B α, b β, fig. 166. interjacet; (& similiter alibi;) propter tum Magnitudines tum Distantias utrobique æquales. (Si vero vel Ungularum acies, vel rectæ ad quas momenta æstimantur, sint A α; aliave quæ ipsis $\tau\alpha$, T A, parallela non sit; secus erit: Propter vel Magnitudines, vel Distantias, vel utrasque variatas: Ut post dicendum erit.)

R. Est autem, toti Semicirculo insistentis, Semiquadrantalis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu ejusdem $\tau\alpha$ rectæ, $\frac{5}{16}R^3P$; & respectu rectæ T A, $\frac{3}{16}R^3P$; per § T. prop. 16. Totique Trilineo insistentis, aciem item habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{12}R^3P$; respectu T A, $\frac{1}{3}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo Semicycloidi insistentis Ungulæ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{48}R^3P$; & respectu T A, $\frac{25}{48}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{8}R^2P$, per § C prop. præced.) Distantia Centri gravitatis Ungulæ à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R$; a T A, $\frac{5}{6}R$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, Magnitudo (quippe ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, seu P ad $2R$,) $\frac{5}{16}RP^2$; Distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$ (quippe ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P,) $\frac{14R^2}{3P}$; Semisolidique momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ ut 2 ad 1; (propter magnitudinem ut P ad $2R$; & distantiam ut $4R$ ad P; per prop. 12. & 14. estque $\frac{P}{2R} \times \frac{4R}{P} = \frac{2}{1}$:) hoc est, $\frac{35}{24}R^3P$.

Similiter; Semicirculo insistentis Ungulæ, aciem habentis TA, Momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{3}{16}R^3P$; & respectu T A, $\frac{5}{16}R^3P$; (per § T. prop. 16.) Trilineoque Restituto insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}R^3P$, (idem utique atque aciem habentis $\tau\alpha$, Momentum respectu T A, propter magnitudines & distantias reciprocatas,) & respectu T A, $\frac{11}{12}R^3P$; per § B. prop. 19.

Ergo, Semicycloidi insistentis, aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{25}{48}R^3P$; & respectu T A, $\frac{59}{48}R^3P$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{7}{8}R^2P$, per § C. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{25}{42}R$; & a T A $\frac{59}{42}R$. Semisolidique circa T A, magnitudo, $\frac{7}{16}RP^2$; Distantia Centri gravitatis ab axe conversionis T A, $\frac{118R^2}{21P}$; Momentum respectu ejusdem T A, $\frac{59}{24}R^3P$.

Item

Item Ungulæ Sectoris Bα A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{3}{8}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; respectu T A, $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulaque portionis Trilinei restituti b$\beta\alpha$ B A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$; respectu T A, $\frac{2}{3}fR^3 + \frac{1}{9}s^3R$; per § C. prop. 19. C. Fig. 166, 170.

Ergo Ungulæ Portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$ V A, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{42}fR^3 + \frac{7}{8}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{35}{24}tR^3 + \frac{22}{24}sR^3 - \frac{7}{8}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; respectu T A, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{25}{24}tR^3 + \frac{22}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{7}{6}R + \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$; & à T A, $\frac{5}{6}R - \frac{14shR - 7s^3}{45fR + 15sh}$. Semisolidique circa $\tau\alpha$, magnitudo $\frac{5}{8}fRP + \frac{5}{24}shP$; momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{35}{12}fR^3 + \frac{7}{4}shR^2 - \frac{7}{18}s^3R$; Centri gravitatis a $\tau\alpha$ distantia $\frac{14R^2}{3P} + \frac{56shR^2 - 28s^3R}{45fRP + 15shP}$.

Similiter, Ungulæ Sectoris BαA, aciem habentis T A; Momentum respectu T A, est $\frac{3}{8}fR^3 - \frac{7}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § W. prop. 16. Ungulæque in Trilineo correspondentis b$\beta\alpha$ B A, $\frac{11}{6}fR^3 - \frac{1}{2}shR^2 - \frac{1}{9}s^3R$, per § C. prop. 19.

Ergo Ungulæ portionis Semicycloidis b$\beta\alpha$ V A, aciem habentis TA, momentum respectu ipsius T A, $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{19}{24}shR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{55}{24}aR^3 + \frac{7}{8}sR^3 + \frac{19}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau\alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu T A; propter magnitudines & distantias reciprocatas,) $\frac{25}{24}fR^3 - \frac{1}{24}shR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{25}{24}tR^3 + \frac{22}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{5}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR$, per § D. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{55}{42}R - \frac{52shR - 49s^3}{441fR - 105sh}$; & à $\tau\alpha$, $\frac{5}{42}R + \frac{52shR - 49s^3}{441fR - 105sh}$. Semisolidique circa T A, magnitudo $\frac{5}{8}fRP - \frac{5}{24}shP$; momentum respectu TA, $\frac{55}{12}fR^3 - \frac{19}{12}shR^2 - \frac{7}{18}s^3R$; Centrique gravitatis inde distantia $\frac{118R^2}{21P} - \frac{208shR + 196s^3}{441fRP - 105shP}R$.

Item, Ungulæ Segmenti α B α, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est $\frac{5}{8}aR^3 - \frac{5}{8}sR^3 - \frac{3}{8}shR^2 + \frac{1}{12}s^3R$, & respectu T A, $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{3}{8}sR^3 + \frac{1}{24}shR^2 - \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque respectivæ in Trilineo Restituto b$\beta\tau$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}aR^3 - \frac{5}{6}sR^3 - \frac{1}{2}shR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; & respectu T A, $\frac{2}{3}aR^3 - \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19. D.

Ergo,

Fig. 166, 170. Ergo, Ungulæ portionis Semicycloidis b $\beta \tau$, aciem habentis $\tau \alpha$, momentum respectu $\tau \alpha$, $\frac{21}{24}aR^3 - \frac{21}{24}sR^3 - \frac{7}{8}sbR^2 + \frac{7}{36}s^3R = \frac{21}{48}R^3P - \frac{21}{24}aR^3 - \frac{21}{24}sR^3 + \frac{7}{8}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; respectu TA, $\frac{21}{24}aR^3 - \frac{21}{24}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{7}{36}s^3R = \frac{21}{48}R^3P - \frac{21}{24}aR^3 - \frac{21}{24}sR^3 - \frac{1}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{5}{4}aR^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}sbR$, per § E. prop præced.) Dist. Cen. grav. à $\tau \alpha$, $\frac{105aR^2 [illegible] 105sR^2 - 63sbR + 14s^3}{90aR - 90sR - 30sb}$

$= \frac{7}{6}R - \frac{14sbR - 7s^3}{45aR - 45sR - 15sb} = \frac{7}{6}R - \frac{14sbR - 7sbv}{45aR - 45sR - 15sb}$

$= \frac{7}{6}R - \frac{7sb^2}{45aR - 45sR - 15sb}$; à TA, $\frac{75aR^2 - 75sR^2 + 3sbR - 14s^3}{90aR - 90sR - 30sb}$

$= \frac{5}{6}R + \frac{7sb^2}{45aR - 45sR - 15sb}$. Semisolidique correspondentis circa $\tau \alpha$, magnitudo, $\frac{5}{8}aRP - \frac{5}{8}sRP - \frac{5}{24}sbP$; ejusque respectu $\tau \alpha$ momentum $\frac{11}{12}aR^3 - \frac{11}{12}sR^3 - \frac{3}{4}sbR^2 + \frac{7}{18}s^3R$; indeque Distantia Centri gravitatis, $\frac{14R^2}{3P} - \frac{28sb^2R}{45aRP - 45sRP - 15sbP}$.

Similiter; Ungulæ segmenti $\alpha B \alpha$, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est $\frac{1}{8}aR^3 - \frac{1}{8}sR^3 + \frac{7}{24}sbR^2 + \frac{1}{12}s^3R$; per § Y. prop. 16. Ungulæque correspondentis in Trilineo Restituto b $\beta \tau$, $\frac{11}{6}aR^3 - \frac{11}{6}sR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 + \frac{1}{9}s^3R$; per § D. prop. 19.

Ergo, Ungulæ b $\beta \tau$ in Semicycloide, aciem habentis TA, momentum respectu TA, $\frac{19}{24}aR^3 - \frac{19}{24}sR^3 + \frac{19}{24}sbR^2 + \frac{7}{36}s^3R$; & respectu $\tau \alpha$ (idem quod aciem habentis $\tau \alpha$, momentum respectu TA,) $\frac{21}{24}aR^3 - \frac{21}{24}sR^3 + \frac{1}{24}sbR^2 - \frac{7}{36}s^3R$. Adeoque (propter magnitudinem $\frac{7}{4}aR^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}sbR$, per § E. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à TA, $\frac{177aR^2 - 177sR^2 + 57sbR + 14s^3}{126aR - 126sR + 30sb}$

$= \frac{59}{42}R + \frac{52sbR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sb}$; à $\tau \alpha$, $\frac{75aR^2 - 75sR^2 + 3sbR - 14s^3}{126aR - 126sR + 30sb}$

$= \frac{25}{42}R - \frac{52sbR + 49s^3}{441aR - 441sR + 105sb}$. Semisolidique correspondentis circa TA, magnitudo $\frac{7}{8}aRP - \frac{7}{8}sRP + \frac{5}{24}sbP$: Momentum respectu TA, $\frac{19}{12}aR^3 - \frac{19}{12}sR^3 + \frac{19}{12}sbR^2 + \frac{7}{18}s^3R$: Centrique gravitatis à TA distantia, $\frac{118R^2}{21P} + \frac{208sbR^2 + 196s^3R}{441aRP - 441sRP + 105sbP}$.

Item, Ungulæ Segmenti Semicirculi, BVA, aciem habentis TA; momentum respectu TA, est, $\frac{1}{8}aR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R$ —

$-\frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16. Fig. 166, 170.

Et Ungulæ Trilinei b B A aciem item habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{2}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$; & respectu b B V, $\frac{5}{6}eR^3 - \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R - \frac{1}{6}s^2v$; per § E prop. 19.

Ergo Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis T A, momentum respectu T A, est $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{13}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$, $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{1}{4}eR^2 + avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à T A;

$$\frac{-15eR^3 + 96avR^2 + 81svR^2 - 48as^2R - 38s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$

$$= \frac{1}{6}R + \frac{6fvR^2 - 3fs^2R\ (= 3fv^2R) - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3};$$ à $\tau\alpha$,

$$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$$

$$= \frac{1}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3};$$ à b B V,

$$\frac{15eR^3 + 30avR^2 + 45svR^2 - 24as^2R - 16s^3R - 12as^2v - 6s^3v}{-18eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3}$$

$$= v - \frac{1}{6}R - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3} - \frac{2}{6}R - h - \frac{3fv^2R - 4as^2v - 3s^3v}{-3eR^2 + 12avR + 9svR - 6as^2 - 4s^3}.$$

Semisolidique correspondentis circa T A, magnitudo ad illud Ungulæ aciem habentis T A, ut $\frac{1}{2}P$ ad R. Momentum Semisolidi ad Momentum Ungulæ, ut 2 ad 1; Centrique gravitatis distantia in semisolido, ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi B V A, aciem habentis $\tau\alpha$; momentum respectu $\tau\alpha$, est, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $-\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{2}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{4}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$; per § T. prop. 16.

Ungulæque Trilinei b B A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu

Fig. 166, spectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}fR^3 + \frac{1}{2}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}ab^3 = -\frac{11}{6}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2$
170. $-\frac{1}{2}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; & respectu b B V, $\frac{5}{6}fR^3 - \frac{1}{4}abR^2 - \frac{1}{4}sbR^2 - \frac{1}{9}s^3R - \frac{1}{4}sb^2R + \frac{1}{6}ab^3 = \frac{2}{3}eR^3 + \frac{1}{12}avR^2 + \frac{1}{4}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R + \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{6}as^2v$; per § E. prop. 19.

Adeoque Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $-\frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & respectu b B V, $\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$; & respectu T A, (idem quod aciem habentis T A, momentum respectu $\tau\alpha$,) $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $-\frac{3}{4}eR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; per § F, G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis, à $\tau\alpha$

$$\frac{-87eR^3 + 96avR^2 + 9svR^2 + 96as^2R + 58s^3R - 24as^2v - 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à b B V, $$\frac{21eR^3 + 42avR^2 + 63svR^2 - 48as^2R - 8s^3R + 12as^2v + 6s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3};$$

à T A, $$\frac{-21eR^3 + 48avR^2 + 27svR^2 - 24as^2R - 10s^3R + 24as^2v + 18s^3v}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}.$$

Semisolidique correspondentis circa $\tau\alpha$, Magnitudo ad illud Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R; Momentum respectu axis sui $\tau\alpha$, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1; Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, ad illam Ungulæ, ut 2 R ad $\frac{1}{2}P$.

Similiter, Ungulæ Segmenti Semicirculi B V A, aciem habentis b B V, momentum respectu b B V, est, $\frac{5}{8}eR^3 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{12}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$; per § V. prop. 16. Et Ungulæ Trilinei b B A, aciem habentis b B V, respectu b B V, est $-\frac{5}{6}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{11}{18}s^3R - \frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b V A, aciem habentis b B V, momentum respectu b B V, est $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{6}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{6}as^2R - \frac{29}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$: Ejusque momentum respectu T A (idem atque aciem habentis T A, respectu b B V,) $-\frac{5}{24}eR^3 + \frac{5}{12}avR^2 + \frac{5}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{2}{9}s^3R - \frac{1}{6}as^2v - \frac{1}{12}s^3v$; & respectu $\tau\alpha$ (idem atque aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu b B V,) $-\frac{7}{24}eR^3 + \frac{7}{12}avR^2 + \frac{7}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{6}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Ergo (propter magnitudinem $\frac{1}{4}eR^2 + \frac{1}{2}avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$; per § F. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à b B V,

$-15eR^3$

$$\frac{-15eR^3+60avR^2+45svR^2-12as^2R-38s^3R-24as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$ Fig. 166, 170.

$$=\tfrac{5}{6}R-h\left(=v-\tfrac{5}{6}R\right)+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à TA,

$$\frac{15eR^3+30avR^2+45svR^2-24as^2R-16s^3R-12as^2v-6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\tfrac{5}{6}R-\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3};$$ à $\tau\alpha$,

$$\frac{21eR^3+42avR^2+63svR^2-48as^2R-8s^3R+12as^2v+6s^3v}{18eR^2+36avR+54svR-36as^2-12s^3}$$

$$=\tfrac{7}{6}R+\frac{2as^2v+s^3v-es^2R}{3eR^2+6avR+9svR-6as^2-2s^3}.$$ Semisolidique correspondentis circa bV; magnitudo, ad illam Ungulæ, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, nempe $\frac{1}{8}eRP+\frac{1}{4}avP+\frac{1}{8}svP-\frac{as^2P}{4R}-\frac{s^3P}{12R}$: Momentum, ad illud Ungulæ, ut 2 ad 1, adeoque $-\frac{5}{12}eR^3+\frac{5}{3}avR^2+\frac{5}{4}svR^2-\frac{1}{3}as^2R-\frac{19}{18}s^3R-\frac{2}{3}as^2v-\frac{1}{6}s^3v$: Distantia Centri gravitatis à bV (utpote ad illam Ungulæ ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$,)

$$\frac{-30eR^4+120avR^3+90svR^3-24as^2R^2-76s^3R^2-48as^2vR-12s^3vR}{9eR^2P+18avRP+27svRP-18as^2P-6s^3P}.$$

Eademque habentur ope Trapezii b$\beta\alpha$V, & Ungularum huic insistentium. Quippe subductis Ungulis Trapezii b$\beta\alpha$V, ex respectivis Ungulis portionis b$\beta\alpha$A; restant Ungulæ Segmenti bVA. Et de momentis similiter. F.

Est autem Ungulæ Trianguli BαV aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{4}sh^3$; respectu TA, $\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{4}sh^3$; per § W. prop. 16. Ungulæque correspondentis Parallelogrammi b$\beta\alpha$B, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3$; respectu TA, $ah^2R-\frac{1}{3}ah^3$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b$\beta\alpha$V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{1}{3}ah^3+\frac{1}{4}sh^3=\frac{8}{3}aR^3+2sR^3-\frac{4}{3}avR^2-svR^2-\frac{4}{3}as^2R-s^3R+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{4}s^3v$; respectu TA $ah^2R+\frac{2}{3}sh^2R-\frac{1}{3}ah^3-\frac{1}{4}sh^3=\frac{4}{3}aR^3+\frac{2}{3}sR^3-\frac{2}{3}avR^2-\frac{1}{3}svR^2+\frac{1}{3}as^2R+\frac{1}{3}s^3R-\frac{1}{3}as^2v-\frac{1}{4}s^3v$. Adeoque (propter magnitudinem, $\frac{1}{2}ah^2+\frac{1}{3}sh^2$, per § G. prop. præced.) Distantia Centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{4a+3s}{6a+4s}h$; atque à TA, $2R-\frac{4a+3s}{6a+4s}h$.

Eademque momenta, ex reſpectivis correſpondentis Ungulæ portionis b β α V A momentis, $\frac{25}{24}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3 - \frac{7}{8}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{25}{24}aR^3 + \frac{22}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; relinquunt Ungulæ Segmenti b V A aciem habentis τ α, momentum reſpectu τ α, $-\frac{22}{24}aR^3 + \frac{22}{24}sR^3$ $(= -\frac{22}{24}eR^3)$ $+ \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{22}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu T A, $-\frac{7}{24}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3$ $(= -\frac{7}{24}eR^3)$ $+ \frac{2}{3}avR^2 + \frac{3}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Fig. 166, 170.

Similiter; Ungulæ Trianguli B α V, aciem habentis T A; Momentum reſpectu τ α, (idem atque aciem habentis τ α, reſpectu T A,) $\frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{4}s^3v$; reſpectu T A, $2shR^2 - \frac{4}{3}sh^2R + \frac{1}{4}sh^3 = \frac{1}{3}shR^2 + \frac{5}{6}s^3R - \frac{1}{4}s^3h = \frac{2}{3}sR^3 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{4}s^3v$; per § W. prop. 16. Ungulæque correſpondentis Parallelogrammi b β α B, aciem habentis T A, momentum reſpectu τ α (idem atque aciem habentis τ α, reſpectu T A,) $ab^2R - \frac{1}{3}ab^3 = \frac{4}{3}aR^3 - \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2v$; reſpectu T A, $\frac{8}{3}aR^3 - \frac{1}{3}av^3 = \frac{4}{3}abR^2 + \frac{4}{3}as^2R - \frac{1}{3}as^2b = \frac{8}{3}aR^3 - \frac{4}{3}avR^2 + \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}as^2v$; per § E. prop. 19.

Ergo Ungulæ Trapezii b β α V, aciem habentis T A, momentum reſpectu τ α (idem atque aciem habentis τ α, reſpectu T A,) $ab^2R + \frac{2}{3}sh^2R - \frac{1}{3}ab^3 - \frac{1}{4}sh^3 = \frac{4}{3}aR^3 + \frac{2}{3}sR^3 - \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{3}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu TA, $\frac{8}{3}aR^3 + 2shR^2 - \frac{4}{3}sh^2R - \frac{1}{3}av^3 + \frac{1}{4}sh^3 = \frac{4}{3}abR^2 + \frac{1}{3}shR^2 + \frac{4}{3}as^2R + \frac{5}{6}s^3R - \frac{1}{3}as^2h - \frac{1}{4}s^3h = 4abR^2 + 2sbR^2 - 2ab^2R - \frac{4}{3}sh^2R + \frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{4}sh^3 = \frac{8}{3}aR^3 + \frac{2}{3}sR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{3}svR^2 + \frac{2}{3}as^2R + \frac{1}{3}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}as^3v$. Adeoque (propter magnitudinem $2abR + sbR - \frac{1}{2}ab^2 - \frac{1}{3}sb^2 = 2aR^2 + \frac{2}{3}sR^2 - avR - \frac{1}{3}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$; per § G. prop. præced.) Diſtan. Cen. grav. à τ α,

$$\frac{12aR + 8sR - 4ab - 3sh}{24aR + 12sR - 6ab - 4sh}b = \frac{1}{2}b + \frac{2sR - fb}{24aR + 12sR - 6ab - 4sh}b;$$

à T A, $$2R - \frac{1}{2}b - \frac{2sR - fb}{24aR + 12sR - 6ab - 4sh}h.$$

Eademque Momenta, ex reſpectivis Momentis correſpondentis Ungulæ portionis b β α V A, $\frac{25}{24}aR^3 + \frac{23}{24}sR^3 + \frac{1}{24}svR^2 + \frac{7}{36}s^3R$, & $\frac{32}{24}aR^3 + \frac{7}{8}sR^3 + \frac{12}{24}svR^2 - \frac{7}{36}s^3R$, (§ C. traditis,) ſubducta; Relinquunt Ungulæ Segmenti b V A, aciem habentis T A, momentum reſpectu τ α, $-\frac{7}{24}aR^3 + \frac{7}{24}sR^3$ $(= -\frac{7}{24}eR^3)$ $+ \frac{2}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{3}as^2R - \frac{5}{36}s^3R + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$; & reſpectu T A, $-\frac{5}{24}aR^3 + \frac{5}{24}sR^3$ $(= -\frac{5}{24}eR^3)$ $+ \frac{4}{3}avR^2 + \frac{9}{8}svR^2 - \frac{2}{3}as^2R - \frac{19}{36}s^3R - \frac{1}{3}as^2v - \frac{1}{4}s^3v$: Ut ſupra § E. Unde reliqua deducentur ut prius.

Accedimus

Accedimus ad considerationem Momenti Ungularum Semicycloidis, ejusque partium, aciem habentium $\tau\alpha$ vel huic parallelam, respectu rectæ $A\alpha$, aut parallelæ huic: Adeoque & (propter distantias & altitudines reciprocatas,) aciem habentium $A\alpha$ aut huic parallelam, momenti respectu $\tau\alpha$, aut parallelæ huic: Eorumque quæ hinc dependent. G. Fig. 166, 168, 170.

Distributis itaque (ut ad § H. prop. præced. & alibi,) tum Semicirculo in sua minuta Triangula α B, seu Y α P; tum Semicycloide in respectiva Trapezia β b, seu y δ ξ p, fig. 168. quæ respective æqualia sint ipsis Y α P Triangulis, & parallelogrammis y δ ξ p fig. 170. simul sumptis: Erigi intelligantur, ut prius, Ungulæ Semiquadrantales aciem habentes $\tau\alpha$; quas compleant iisdem Triangulis, Trapeziisque minutis, insistentes minutæ Ungulæ. Quæ itaque Trapeziorum Ungulæ, æquales erunt respectivis Triangulorum & Parallelogrammorum Ungulis simul sumptis: Ut ad § C jam ostensum est.

Ungulæ Trianguli Y α P (Pyramis cum sit) adeoque & huic æquales similiterque positæ Trianguli (in Trapezio intermedii) $\upsilon\beta\pi$, Centrum gravitatis (illic in α B, hic in β b, positis,) à $\tau\alpha$ distabit Dodrante altitudinis, (per prop. 6. hujus,) hoc est, $\frac{3}{4}V\alpha = \frac{3}{4}h$. Adeoque ipsius Y α P pyramidis (sed non & ipsius $\upsilon\beta\pi$) distantia ab $A\alpha$, $\frac{3}{4}BV = \frac{3}{4}s$.

Ungulæque parallelogrammi y δ ξ p fig. 170. (utpote Prismatis, duabus basibus Triangularibus interjecti,) centrum gravitatis à $\tau\alpha$ distat, altitudinis Besse, (quantum scilicet inde distat Trianguli centrum,) per prop. 5, 6. hujus; hoc est, $\frac{2}{3}V\alpha = \frac{2}{3}h$. Atque tantundem inde distat bipartitæ Ungulæ, parallelogrammis $\upsilon\delta$, $\pi\xi$, (utrinque à bβ æqualiter remotis,) fig. 168. Centrum gravitatis, in ipsa bβ positum. Ejusque Centri, à Centro Ungulæ $\upsilon\beta\pi$ modo indicati in eadem bβ, distantia, (altitudinem quod spectat, seu distantiam à $\tau\alpha$,) est $\frac{3}{4}h - \frac{2}{3}h = \frac{1}{12}h$. Adeoque, propter Prismatis magnitudinem ad magnitudinem Pyramidis, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Prisma dimidium correspondentis Parallelepipedi, & Pyramis ejusdem Triens,) altitudini centri Prismatis additis duabus quintis differentiæ altitudinum, hoc est $\frac{2}{5} \times \frac{1}{12}h = \frac{1}{30}h$, habetur Ungulæ Trapezii y$\delta\xi$p (ex utrisque constantis) altitudo Centri gravitatis, seu distantia à $\tau\alpha$, $\frac{2}{3}h + \frac{1}{30}h = \frac{7}{10}h$. Adeoque ejusdem ab $A\alpha$ distantia, $bB + \frac{7}{10}BV = a + \frac{7}{10}s$.

Cum itaque Ungula Trapezii cujusque y δ ξ p, ad respectivam Trianguli Y α P Ungulam sit, magnitudine, ut 5 ad 2, (ut ad § A.

Fig. 156, 168, 170. ostensum est:) Sitque illius Distantia Centri gravitatis ab Aα, ad hujus distantiam, ut $a+\frac{7}{10}s$ ad $\frac{3}{4}s$; erit Ungulæ Trapezii cujusque y δ ξ p momentum ad momentum correspondentis Ungulæ Trianguli Y α P, respectu ejusdem A α, ut $5a+\frac{7}{2}s$ ad $\frac{3}{2}s$.

Cúmque hoc ubique obtineat; (sitque eadem ubique magnitudinis Ungulæ Trapezii ad magnitudinem Ungulæ Trianguli ratio, ut 5 ad 2:) Erit momentum Ungulæ Totius Semicycloidis, ejúsve portionis A b β α, aut b β δ d, aut b β τ, &c (nam in partibus perinde procedit demonstratio atque in totis,) ad correspondens Momentum Ungulæ Semicirculi, ejusve sectoris B α A, aut B τ D, aut α D α segmenti, &c. (quarum acies sint τ α,) respectu rectæ A α: Ut omnes illæ Trianguli Ungulæ, Pyramidesve, eo spectantes, in distantias respective $5a+\frac{7}{2}s$; ad easdem in $\frac{3}{2}s$, ductas; seu ut omnia quadrata V α (quibus, propter Y P ubique æquales, proportionales sunt illæ pyramides) in $5a+\frac{7}{2}s$, ad eadem quadrata V α in $\frac{3}{2}s$: Hoc est, ut *Omnia* $5ab^2+\frac{7}{2}sb^2$ eo spectantia, ad *omnia* $\frac{3}{2}sb^2$ respectiva; seu, ut *omnia* $10ab^2+7sb^2$, ad *omnia* $3sb^2$, eo spectantia: Hoc est, ut 7 ad 3, atque insuper ut *omnia* $10ab^2$, ad *omnia* $3sb^2$, eo spectantia; sumptis *a* arcubus arithmetice proportionalibus.

Sunt autem (pro A b β α portione) *omnia* ab^2 (sumptis *a* arithmetice proportionalibus;) hoc est, Omnes *a* arcus arithmetice proportionales, in quadrata Sinuum versorum, arcuum ad Semicirculum residuorum; idem atque *Duplum* Momenti correspondentis Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis τ α, respectu rectæ A α; (propter Triangula singulis b β rectis ibidem insistentia, $\frac{1}{2}b^2$; eorumque ab A α distantiam, *a*; adeoque momenta, $\frac{1}{2}ab^2$:) Hoc est, Duplum ipsius $\frac{3}{8}a^2R^2+\frac{5}{4}asR^2-\frac{1}{4}asvR-vR^3-\frac{1}{8}s^2R^2$; per § F. prop. 19. Adeoque earundem Decuplum, seu Omn. $10ab^2$; est hujus Momenti Vigecuplum; hoc est, $\frac{15}{2}a^2R^2+25asR^2-5asvR-20vR^3-\frac{5}{2}s^2R^2$.

Suntque *Omnia* sb^2, eo spectantia; hoc est, earundem arcuum arithmetice proportionalium Sinus recti, in Sinuum versorum, arcuum ad semicirculum residuorum, quadrata: Idem atque Duplum Momenti Solidi, quadrilineo A b β α fig. 170. incumbentis, ex ductu rectarum b β, in β υ facti, respectu rectæ τ α: Hoc est, Duplum ipsius, $\frac{2}{3}vR^3+\frac{2}{3}s^2R^2-\frac{1}{6}s^2vR$ per § E. prop. 18. Adeoque eorundem Triplum, seu *Omn.* $3sb^2$; est hujus momenti sextuplum, hoc est, $4vR^3+4s^2R^2-s^2vR$.

Ergo *Omn.* $10ab^2$: ad *Omn.* $3sb^2$: (portionem A b β α spectantia;) sunt, ut $\frac{15}{2}a^2R^2+25asR^2-5asvR-20vR^3-\frac{5}{2}s^2R^2$, ad $4vR^3$

$4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Cui si adjungatur, prius memorata, ratio 7 ad 3 seu $\frac{28}{3}vR^3 + \frac{28}{3}s^2R^2 - \frac{7}{3}s^2vR$, ad $4vR^3 + 4s^2R^2 - s^2vR$: Habetur ratio momenti ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, ad momentum Ungulæ Sectoris B α A, (quarum acies τ α,) respectu ipsius A α; $\frac{15}{2}a^2R^2 + 25asR^2 - 5asvR - \frac{32}{3}vR^3 + \frac{41}{6}s^2R^2 - \frac{7}{3}s^2vR$, ad $4vR^2 + 4s^2R^2 - s^2vR$. Fig. 166, 168, 170.

Cum itaque momentum illud Ungulæ Sectoris B α A sit (consequentis subduodecuplum) $\frac{1}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2 - \frac{1}{12}s^2v$, (per § L. prop. 16) erit, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis τ α, Momentum respectu A α, (subduodecuplum antecedentis,) $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$. Idemque est, Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis A α, momentum respectu τ α.

Quod quidem Momentum, divisum per Ungulæ illius A b β α, aciem habentis τ α, magnitudinem, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}shR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$, (per § D. prop. præced.) exhibet Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a - \frac{64vR^2 - 75asR - 41s^2R + 15asv + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$ $= a - \frac{45a^2R + 64vR^2 - 41s^2R + 14s^2v}{90aR + 150sR - 30sv}$.

Idemque Momentum, divisum per Ungulæ ejusdem A b β α portionis Semicycloidis, aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$, per § I. prop. præced. exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{6}R - \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$; à TA, $\frac{1}{6}R + \frac{12vR^2 - 30asR - 8s^2R + 15asv + 7s^2v}{27a^2 + 54as - 24vR + 15s^2}$. Adeoque ejusdem respectu T A, momentum, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$.

Quod ipsum, est etiam Momentum Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis T A, respectu A α. Adeoque, si per hujus Ungulæ magnitudinem $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$ (per § D. prop. præced.) dividatur: Habetur ejusdem Distantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{33asR + 19s^2R - 32vR^2 + 15asv + 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv} = a - \frac{63a^2R - 19s^2R + 32vR^2 - 14s^2v}{126aR + 66sR + 30sv}$.

Si igitur totius Semicycloidis A τ α, Ungulas spectemus: Quoniam hoc

casu

Fig. 166, casu est $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$, & $s = 0$; erit Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis
168, $\tau\alpha$, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P$;
170. Centrique gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $\frac{1}{4}P - \frac{128R^2}{45P}$.

Aciemque habentis $A\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Centrique gravitatis distantia à $\tau\alpha$, $\frac{5}{6}R - \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; à TA, $\frac{7}{6}R + \frac{32R^3}{9P^2 - 64R^2}$; Momentum respectu TA, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$.

Aciemque habentis TA, momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; Magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P$; Distantia Centri gravitatis, ab $A\alpha$, $\frac{1}{4}P - \frac{64R^2}{63P}$.

I. Si autem ex Ungularum Totius Semicycloidis $A\tau\alpha$ Magnitudinibus & Momentis; auferantur respectivè Magnitudines & Momenta Ungularum $Ab\beta\alpha$: Habentur Ungularum $b\beta\tau$, Magnitudines & Momenta.

Puta, si ex Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudine $\frac{5}{8}R^2P$; & Momento respectu $A\alpha$, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; modo exhibitis: Auferantur respectivæ Ungulæ $Ab\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{5}{4}fR^2 + \frac{5}{12}hR = \frac{5}{4}aR^2 + \frac{25}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu $A\alpha$, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ portionis Semicycloidis $b\beta\tau$, aciem habentis $\tau\alpha$, Magnitudo, $\frac{5}{8}R^2P - \frac{5}{4}aR^2 - \frac{25}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$, seu (propter $\alpha = \frac{1}{2}P - a$, & $h = 2R - v$,) $\frac{5}{4}\alpha R^2 - \frac{5}{4}sR^2 - \frac{5}{12}shR$; ejusque, respectu $A\alpha$, momentum, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{16}{9}R^4 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{5}{12}asvR - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantia, $a +$

$$\frac{45RP^2 - 180aRP + 180a^2R - 512R^3 + 256vR^2 - 164s^2R + 56s^2v}{180RP - 360aR - 600sR + 120sv}.$$

Si ex Ungulæ $A\tau\alpha$, aciem habentis TA, magnitudine, $\frac{7}{8}R^2P$; & momento respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$, modo traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ $Ab\beta\alpha$, magnitudo, $\frac{7}{4}fR^2 - \frac{5}{12}shR = \frac{7}{4}aR^2 + \frac{11}{12}sR^2 + \frac{5}{12}svR$; & momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; supra tradita § G. Habetur Ungulæ $b\beta\tau$, aciem habentis TA, magnitudo, $\frac{7}{8}R^2P - \frac{7}{4}aR^2 - \frac{11}{12}sR^2 - \frac{5}{12}svR = \frac{7}{4}\alpha R^2 - \frac{7}{4}sR^2 + \frac{5}{12}shR$; ejusque momentum respectu $A\alpha$, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{11}{12}asR^2 - \frac{19}{72}s^2R^2$
—

$-\frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Centri gravitatis ab A α distantia, $a +$ Fig. 166, 168, 170.

$$\frac{63RP^2 - 252aRP - 256R^3 + 128vR^2 + 252a^2R - 76s^2R - 56s^2v}{252RP - 504aR - 264sR - 120sv}.$$

Si ex Ungulæ A τ α, aciem habentis A α, magnitudine, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3$; Momento respectu τ α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4$; & respectu T A, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4$; modo traditis: Auferantur respectivæ Ungulæ A b β α, Magnitudo $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$; momentum respectu τ α, $\frac{5}{8}a^2R^2 + \frac{25}{12}asR^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{7}{36}s^2vR$; & respectu T A, $\frac{7}{8}a^2R^2 + \frac{11}{12}asR^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{19}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$: Habetur Ungulæ b β τ, aciem habentis A α, magnitudo, $\frac{3}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 - \frac{3}{4}a^2R - \frac{3}{2}asR + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{5}{12}s^2R$; Momentum respectu τ α, $\frac{5}{32}R^2P^2 - \frac{16}{9}R^4 - \frac{5}{8}a^2R^2 - \frac{25}{12}asR^2 + \frac{8}{9}vR^3 - \frac{41}{72}s^2R^2 + \frac{5}{12}asvR + \frac{7}{36}s^2vR$; respectu T A, $\frac{7}{32}R^2P^2 - \frac{8}{9}R^4 - \frac{7}{8}a^2R^2 - \frac{11}{12}asR^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{19}{72}s^2R^2 - \frac{5}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$: Adeoque Distantia Centri gravitatis à τ α, $\frac{5}{6}R -$

$$\frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2};$$

à T A, $\frac{7}{6}R +$

$$\frac{192R^3 - 96vR^2 + 240asR + 64s^2R - 120asv - 56s^2v}{54P^2 - 384R^2 - 216a^2 - 432as + 192vR - 120s^2}.$$

Atque hinc facile derivabitur, Ungulæ b β τ aciem habentis T τ, Momentum respectu τ α, vel T A, Centrique gravitatis inde distantia.

Sed & hæc omnia quæ Ungulas b β τ in Semicycloide (fig. 166.) spectant, possunt etiam per se exquiri, sine ope Ungularum A b β α. Nam & hic etiam perinde valet, quod § G. demonstratur: Nempe Momentum Ungulæ b β τ, aciem habentis τ α, respectu A α; ad momentum respectivæ Ungulæ segmenti α B α, aciem habentis τ α, respectu A α; esse ut 7 ad 3, atque insuper ut *Omn.* $10ab^2$, ad *Omn* $3sb^2$, seu, ut 7 ad 3, atque insuper ut *Vigecuplum* Momenti Ungulæ b β τ in figura Sinuum versorum fig. 170. aciem habentis τ α, respectu A α; ad *Sextuplum* Momenti Ungulæ Segmenti circularis α B α fig. 169. aciem habentis τ α, respectu A α. Idemque erit, Ungulæ b β τ fig. 166, 168. aciem habentis A α, momentum respectu τ α. Unde & cætera eo spectantia derivari poterunt; eadem quæ prius.

Deinde;

K. Deinde; Si ex Momentis Ungularum A b $\beta\alpha$, auferantur respectiva Momenta Ungularum Trapezii b $\beta\alpha$ V; restabunt respectiva Ungularum A b V Momenta.

Fig. 166, 170.

Constat autem Ungula Trapezii b $\beta\alpha$ V, fig. 166. aciem habentis $\tau\alpha$; ex duabus Ungulis; Nempe Trianguli B α V, & Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B.

Est autem Ungulæ Trianguli B α V, aciem habentis $\tau\alpha$; Momentum respectu A α, $\frac{1}{8}s^2h^2$, per § M. prop. 16.

Ungulæque Parallelogrammi b $\beta\alpha$ B, magnitudo (quippe eadem quæ respectivæ Ungulæ b $\beta\alpha$ B fig. 170.) $\frac{1}{2}ah^2$, per § F. prop. 17. Centrique gravitatis a $\tau\alpha$ distantia, $\frac{2}{3}h$, (per § C. prop. 5.) adeoque ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$, (ut ex schematis aspectu facile colligitur:) Et propterea, ejusdem respectu A α, momentum, $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2$.

Ergo; Ungulæ Totius Trapezii b $\beta\alpha$ V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α, est $\frac{1}{4}a^2h^2 + \frac{1}{3}ash^2 + \frac{1}{8}s^2h^2$, seu (propter $h = 2R - v$, adeoqne $h^2 = 4R^2 - 4vR + v^2 = 4R^2 - 2vR - s^2$,) $aR^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{4}{3}asR^2 - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Idemque est Ungulæ b $\beta\alpha$ V, aciem habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$; propter Distantias & Altitudines reciprocatas.

Quod itaque momentum, per Ungulæ aciem habentis $\tau\alpha$ magnitudinem $\frac{1}{2}ah^2 + \frac{1}{3}sh^2$ (ut § F. ostensum est) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab A α distantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{4as + 3s^2}{12a + 8s} = \frac{1}{2}a + \frac{4a + 3s}{12a + 8s}s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}s + \frac{s^2}{36a + 24s}$.

Idemque momentum, per Ungulæ aciem habentis A α, magnitudinem $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2h = \frac{1}{2}a^2h + \frac{1}{2}ash + \frac{1}{6}s^2h$ (per § K. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Ungulæ Distantiam Centri gravitatis a $\tau\alpha$, $\frac{6a^2 + 8as + 3s^2}{12a^2 + 12as + 4s^2}h = \frac{1}{2}h + \frac{2as + s^2}{12fa + 4s^2}h$: Adeoque à T A, $2R - \frac{1}{2}h$ $(= R + \frac{1}{2}v)$ $- \frac{2a + s}{12fa + 4s^2}sh$. Et propterea ejusdem respectu T A, momentum, $fabR + \frac{1}{3}s^2hR - \frac{1}{4}a^2h^2 - \frac{1}{3}ash^2$ $\frac{1}{8}s^2h^2$. Quod etiam (propter altitudines & distantias reciprocatas) est momentum Ungulæ b $\beta\alpha$ V, aciem habentis T A, respectu A α: Adeoque per Ungulæ b $\beta\alpha$ V aciem habentis T A, magritudinem $2abR + shR - \frac{1}{2}ah^2 - \frac{1}{3}sh^2$ (per § G. prop. præced.) divisum; exhibet hujus Distantiam Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s +$

$2s^2R$

$$\frac{2s^2R - fsh}{48aR + 24sR - 12ah - 8sh} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}s + \frac{fsv - 2asR}{24aR + 8sR + 12av + 8sv}.$$

Si itaque ex Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis $\tau\alpha$, Momento respectu A α; seu, aciem habentis A α, momento respectu $\tau\alpha$; $\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{5}{12}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 - \frac{1}{12}asvR - \frac{7}{36}s^2vR$ (per § G.) auferatur respectivum Ungulæ b β α V momentum modò traditum, $a^2R^2 + \frac{4}{3}asR^2 + \frac{1}{2}s^2R^2 - \frac{1}{2}a^2vR - \frac{2}{3}asvR - \frac{1}{4}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$: Habetur Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α; aciemve habentis A α, momentum respectu $\tau\alpha$; $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4$.

Quod per Ungulæ A b V, aciem habentis $\tau\alpha$, magnitudinem, $-\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2 + avR + \frac{1}{4}svR + \frac{1}{2}as^2 + \frac{1}{3}s^3$, (per § F, G. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{1}{2}a + \frac{27asR^2 + 5s^2R^2 - 64vR^3 + 9asvR + 4s^2vR + 12as^3 + 9s^4}{-54eR^2 + 72avR + 18svR + 36as^2 + 24s^3}.$$

Idemque momentum per Ungulæ A b V, aciem habentis A α, magnitudinem, $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R -$

$$\frac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}:$$

Adeoque à TA, $\frac{1}{2}R + \dfrac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$;

à bV, $\frac{1}{2}R - h(= v - \frac{1}{2}R) - \dfrac{4s^2R^2 - 8vR^3 + 18a^2vR + 36asvR + 14s^2vR - 18a^2s^2 - 24as^3 - 9s^4}{-18a^2R + 36asR + 6s^2R - 48vR^2 + 36a^2v + 36asv + 12s^2v}$.

Ejusque propterea respectu TA, momentum, $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 - \frac{4}{9}vR^3 + \frac{1}{2}a^2vR + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{3}as^3 - \frac{1}{8}s^4$: Et respectu bV, (factum ex v in magnitudinem, dempto momento respectu TA,) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 - \frac{5}{72}s^2R^2 + \frac{4}{9}vR^3 - \frac{1}{4}a^2vR - \frac{1}{4}asvR - \frac{7}{36}s^2vR + \frac{1}{4}a^2s^2 + \frac{1}{3}as^3 + \frac{1}{8}s^4 - \frac{2}{3}v^2R^2 + \frac{1}{2}a^2v^2 + \frac{1}{2}asv^2 + \frac{1}{6}s^2v^2$; seu (propter $v^2 = 2vR - s^2$,) $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2$

Fig. 166. $+\frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$. Quæ duo, ſunt etiam (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) momenta, reſpectu Aα, Ungularum AbV, acies habentium TA, & bV: Adeoque per harum reſpectivè magnitudines, $-\frac{1}{4}eR^2$ $(= -\frac{1}{4}aR^2 + \frac{1}{4}sR^2)$ $+ avR + \frac{3}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{3}s^3$, & $\frac{1}{4}eR^2$ $(= \frac{1}{4}aR^2 - \frac{1}{4}sR^2)$ $+ \frac{1}{2}avR + \frac{1}{4}svR - \frac{1}{2}as^2 - \frac{1}{6}s^3$, (per § F, G. prop præced.) diviſa; exhibent earum diſtantiam centri gravitatis ab Aα: Nempe, Ungulæ AbV, aciem habentis TA, diſtantiam ab

$$A\alpha,\ \frac{1}{2}a + \frac{9asR^2 + 7s^2R^2 - 32vR^3 + 27asvR + 20s^2vR - 12as^3 - 9s^4}{-108eR^2 + 72avR + 54svR - 36as^2 - 24s^3};$$

aciemque habentis bV, ab eadem Aα diſtantiam $\frac{1}{2}a +$

$$\frac{41s^2R^2 - 9asR^2 - 64vR^3 + 27asvR + 10s^2vR - 6as^3 - 3s^4}{108eR^2 + 36avR + 54svR - 36as^2 - 12s^3}.$$

Eadem Momenta, Ungulas AbV ſpectantia (& quæ hinc dependent,) ſic adhuc alias inveſtigantur, abſque ope Ungularum Ab$\beta\alpha$.

Ungulam AbV, aciem habentem bV, (ſi planis ipſi AbV plano parallelis, æqualibus ab invicem diſtantiis remotis, ſectam intelligamus,) conſtituent, omnia AbV plana, eo ſpectantia; ſumptis AV, hoc eſt v, arithmetice proportionalibus, uſque ad AV, ſeu V, maximum. Adeoque eorum momenta reſpectu Aα; hoc eſt (per § K, L. prop. præced.) *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: (ſumptis v arithmetice proportionalibus;) complent ejuſdem AbV Ungulæ, aciem habentis bV, momentum reſpectu Aα; ſeu (propter altitudines & diſtantias reciprocatas) aciem habentis Aα, momentum reſpectu bV.

Sunt autem, *Omnia* $\frac{1}{2}a^2$ eo ſpectantia, (ſumptis v arithmeticè proportionalibus;) hoc eſt, momentum ipſius AbB fig. 170 plani, reſpectu Aα; (per § I. prop. 17.) $-\frac{1}{2}a^2R + asR - vR^2 + \frac{1}{2}a^2v$. Adeoque, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R$: $= \frac{1}{4}a^2R^2 - \frac{1}{2}asR^2 + \frac{1}{2}vR^3 - \frac{1}{4}a^2vR$.

Item, *Omnia as*, eo ſpectantia; hoc eſt Solidum AbB fig. 170. ex ductu rectarum bB, in BV (fig. 169.) reſpective; (per § L. prop. 18.) $\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{2}asR + \frac{1}{2}asv$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{2}asR$: $= \frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{1}{4}asvR$.

Item *Omnia* $\frac{1}{2}s^2$, eo ſpectantia; hoc eſt, Momentum Segmenti Semicirculi ABV fig. 169. reſpectu Aα; (per § R. prop. 15.)

$\frac{1}{3}vR^2$

$\frac{1}{3}vR^2 - \frac{1}{6}s^2R + \frac{1}{6}s^2v$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{12}s^2R :=\frac{1}{18}vR^3 - \frac{1}{36}s^2R^2 + \frac{1}{36}s^2vR$. Fig. 166.

Item, *Omn.* v (arithmetice proportionales,) $\frac{1}{2}v^2$, (per prop. 1. hujus.) Adeoque *Omn.* $-\frac{2}{3}vR^2 := -\frac{1}{3}v^2R^2 = -\frac{2}{3}vR^3 + \frac{1}{3}s^2R^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2v$; hoc eſt, Momentum Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, reſpectu T A; (per § I. prop. 19.) $-\frac{1}{8}a^2R^2 + \frac{1}{4}asR^2 - vR^3 + \frac{1}{8}s^2R^2 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{2}a^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}asv$; hoc eſt, Semimomentum, reſpectu T A, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum b B, in b V fig. 169. (per § M. prop. 18.) $\frac{1}{8}s^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{5}{72}s^2R^2 + \frac{1}{9}vR^3 + \frac{1}{4}asvR + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{6}as^3$.

Item, *Omn.* $\frac{1}{2}s^2v$; hoc eſt, Momentum Ungulæ A B V fig. 169. aciem habentis A α, reſpectu T A: (per § E. prop. 16.) $\frac{1}{3}vR^3 - \frac{1}{6}s^2R^2 + \frac{1}{6}s^2vR - \frac{1}{8}s^4$. Adeoque *Omn.* $\frac{1}{6}s^2v := \frac{1}{9}vR^3 - \frac{1}{18}s^2R^2 + \frac{1}{18}s^2vR - \frac{1}{24}s^4$.

Ergo, *Omn.* $-\frac{1}{4}a^2R + \frac{1}{2}asR + \frac{1}{12}s^2R - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{2}a^2v + \frac{1}{2}asv + \frac{1}{6}s^2v$: Hoc eſt, Ungulæ A b V, aciem habentis b V, momentum reſpectu A α; aciemve habentis A α, momentum reſpectu b V; $\frac{1}{8}a^2R^2 - \frac{1}{4}asR^2 + \frac{41}{72}s^2R^2 - \frac{8}{9}vR^3 + \frac{1}{4}a^2vR + \frac{3}{4}asvR + \frac{5}{36}s^2vR - \frac{1}{4}a^2s^2 - \frac{1}{6}as^3 - \frac{1}{24}s^4$. Idem quod prius.

Atque hoc momentum diviſum per Ungulæ aciem habentis b V magnitudinem: Exhibet diſtantiam centri gravitatis ab A α.

Idemque per Ungulæ aciem habentis A α diviſum; exhibet hujus diſtantiam Centri gravitatis à b V; & conſequenter, à T A, & $\tau\alpha$; ejuſque propterea momentum reſpectu T A, & $\tau\alpha$: Quæ eadem etiam ſunt Momenta, reſpectu A α, aciem habentium T A, & $\tau\alpha$: Quæ per magnitudines diviſa, exhibebunt & harum diſtantias centri gravitatis ab A α. Eadem quæ prius.

Atque, his demum Momentis, ſi addantur reſpectiva Ungularum b β α B momenta: Habentur Ungularum A b β α momenta reſpectiva; eadem quæ ſuperius aliâ methodo inventa ſunt. Atque hinc, diſtantiæ centrorum gravitatis; ut prius.

Supereſt tandem, ut Ungularum aciem habentium A α, momenta reſpectu ejuſdem A α, inveſtigemus; & quæ hinc dependent. M.

Diſtributis igitur, ut priùs, tum Semicirculo in minuta Triangula T α P, tum Semicycloide in Minuta Trapezia y δ ξ p: Semiquadrantalem Ungulam, Semicycloidi inſiſtentem, aciem habentem A α, complebunt Solida his Minutis Trapeziis inſiſtentia; ſicut & Ungulam

Fig. 166, 168. Ungulam Semicirculo insistentem, eandem aciem habentem, complent Solida Triangulis illis insistentia.

Triangulo Y σ P insistens solidum, Pyramis est, cujus centrum gravitatis in α B positum, abscindit inde, versus α, $\frac{1}{4}$ α B, (per prop. 6. hujus;) adeoque ipsius ab A α distantia erit $\frac{1}{4}$BV$=\frac{1}{4}s$.

Trapezio y δ ξ p insistens solidum; Componitur ex Truncato Cuneo, seu Prismate duobus similibus Trapeziis y δ ξ p interjecto, altitudinem habente ipsi α β = α æqualem: Atque, ex Cuneo ei superimposito altitudinem habente, in β, nullam; sed, in b, ipsi BV = s æqualem; tantum scilicet quanto altius est solidum illud in b, quam in β; hoc est, quanto longior est b V, quam β α.

(Nec quemquam interim morari debeat, quod (propter aciem A α;) altitudo in Y, y, δ, major sit; atque in P, p, ξ, minor; quam in B, b, β, respective. Quamquam enim illud omnino verum sit; atque, in sectione determinatâ, alicujus sit Momenti: Continuatâ tamen in infinitum sectione, (quod supponimus,) differentia evanescit in datâ quâvis minorem: Quæ non modo in methodo indivisibilium, sed in omni per figurarum inscriptionem & circumscriptionem demonstrandi methodo, negligenda erit. Neque enim aliud producit, quam quod centrum gravitatis quod in B α, b β, rectis supponimus, promovendum erit ultra illas, intervallo quod dato quovis minus sit. Quod autem ab alio, differentiâ quæ datâ quâvis minor sit, differre demonstratur; pro æquali habendum erit. Dúmque easdem supponimus, tum in Y, y, δ, tum in P, p, ξ, altitudines quæ in B, b, β: Solidum ex minutis adscriptum (partim inscriptum, partim circumscriptum,) pro vero Solido substituimus, quod ab illo differat, non nisi differentiâ quæ datâ minor sit.)

Cuneus autem Truncatus ille, quem diximus; seu Prisma parallelis Trapeziis interjectum: Constat ex Cuneo intermedio, seu Prismate Triangulo υ β π insistente; & bipartito Parallelepipedo, parallelogrammis υ β δ y & π β ξ p insistente.

Qui quidem Cuneus intermedius, propter formam, est, ad Pyramidem æque altam ejusdem baseos, ut $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$, seu 3 ad 2, (est utique Cuneus illæ parallelepipedi illius Semis, cujus Pyramis Triens est:) Cumque porro altitudo Cunei, in β vel b, sit ad altitudinem baseos Pyramidis in B; ut β α seu b B, ad B V; hoc est, ut α ad s: Erit Cunei Triangulo υ β π insistentis, ad Pyramidem simili & æquali Triangulo Y α P incumbentem, ratio, (ex illis composita) ut 3 α ad 2 s. Cúmque Cunei centrum gravitatis sit in β b, abscindens, versus β, $\frac{1}{3}$ β b, (per prop. 5, 6.) adeoque ipsius ab A α distantia

distantia sit, bB + $\frac{2}{3}$ BV, seu $a + \frac{2}{3}s$, (ut ex schematis inspectu facile colligitur;) Centrique gravitatis Pyramidis Y α P (ut dictum est) inde distantia sit $\frac{1}{4}s$: Adeoque distantiarum ratio, ut $a + \frac{2}{3}s$, ad $\frac{1}{4}s$: Ratio hæc, cum ratione magnitudinum ($3a$ ad $2s$) composita; exhibet rationem Momenti Cunei illius, ad Momentum Pyramidis (respectu ejusdem A α,) ut $3a^2 + 2as$, ad $\frac{1}{2}s^2$, seu $6a^2 + 4as$ ad $3s^2$. Fig. 166, 168.

Et Parallelepipedum (bipartitum) cum sit, propter formam, ad Pyramidem æquealtam, ejusdem basis, ut 3 ad 1: Sitque baseos in β vel b altitudo, ad altitudinem in B, ut a ad s: Erit Parallelepipedi ad Pyramidem ratio $3a$ ad s. Cumque Parallelepipedi (utut bipartiti) commune centrum gravitatis sit in medio βb: Adeoque ejusdem ab A α distantia, $a + \frac{1}{2}s$: (Sitque centri gravitatis Pyramidis, ut dictum est, distantia $\frac{1}{4}s$:) Distantiarum ratio, $a + \frac{1}{2}s$ ad $\frac{1}{4}s$; cum ratione magnitudinum, $3a$ ad s, composita; exhibet rationem Momentorum, $3a^2 + \frac{3}{2}as$ ad $\frac{1}{4}s^2$, seu $12a^2 + 6as$ ad $3s^2$.

Cuneúsque, Truncato illi Cuneo superimpositus; Componitur ex Pyramide intermediâ, triangulo $\upsilon\beta\pi$ supereminente, (pyramidi in YαP simili & æquali;) & Cuneo bipartito, parallelogrammis $\upsilon\beta\delta$y, $\pi\beta\xi$p, supereminente.

Pyramidisque Trianguli $\upsilon\beta\pi$ centrum gravitatis, cum intelligatur in bβ situm, (saltem in plano super hanc erecto,) abscindens; versus β, $\frac{1}{4}\beta$b; adeoque ipsius ab A α distantiâ (ut ex schematis inspectu facile colligitur,) $a + \frac{3}{4}s$: Erit (propter magnitudines æquales) momenti ejus ratio, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) eadem quæ distantiarum; hoc est, ut $a + \frac{3}{4}s$ ad $\frac{1}{4}s$; seu ut $4a + 3s$, ad $3s$; hoc est, ut $4as + 3s^2$, ad $3s^2$.

Cuneique bipartiti, cum (propter æquales bases & altitudines,) sit ad Pyramidem, ut 3 ad 2; Centrique distantia illius, ad centri hujus distantiam, ut $a + \frac{2}{3}s$ ad $\frac{1}{4}s$: Erit momentum bipartiti Cunei, ad momentum Pyramidis Y α P, (respectu ejusdem A α,) ut $3a + 2s$ ad $\frac{1}{2}s$; seu $6as + 4s^2$ ad $3s^2$.

Ergo, Solidi totius, minuto Trapezio y$\delta\xi$p incumbentis, (quod ex partibus jam expositis componitur,) ad momentum Pyramidis correspondentis, incumbentis Triangulo Y α P, (respectu ejusdem A α,) est ut $6a^2 + 4as$ plus $12a^2 + 6as$ plus $4as + 3s^2$ plus $6as + 4s^2$, ad $3s^2$: Hoc est, ut $18a^2 + 20as + 7s^2$, ad $3s^2$. Vel (ductis omnibus in communem altitudinem V$\alpha = h$,) ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$. Et sic ubique. Adeoque momentum

Fig. 166, 168. mentum Solidi ex illis conflati (sive quod totam $A \tau \alpha$, sive quod ipsius partem ut $A b \beta \alpha$, spectat;) ad momentum correspondentis solidi ex his conflati, (quod vel totum $AD\alpha$, vel ipsius partem $B\alpha A$, spectat;) ut *Omnia*, $18a^2b + 20asb + 7s^2b$: ad *Omnia*, $35s^2b$: eo spectantia.

Eademque ratio, sic alias colligitur: ad methodum nostræ *Arithmeticæ Infinitorum*.

Sunto rectæ complentes $Y\alpha P$ Triangulum (utpote arithmeticè proportionales,) b, $2b$, $3b$, &c. usque ad maximam $YP = B$. Quarum puncta media, seu gravitatis Centra, in αB posita, habebunt (in Ungulâ Semiquadrantali aciem habente $A\alpha$) altitudines distantiis suis ab $A\alpha$ æquales, puta s, [illegible], $3s$, &c. usque ad maximam $BV = S$. Quæ distantiæ, in rectas illas respective ductæ, exhibent seriem magnitudinum rectis illis insistentium (ungulam complentium,) bs, $4bs$, $9bs$, &c. usque ad maximam BS. Quæ quidem series Magnitudinum, Pyramidem $Y\alpha P$ complentium, (utpote Series Secundanorum;) erit ad Seriem totidem maximæ æqualium, (hoc est, ad Parallelepipedum ejusdem basis & altitudinis,) ut 1 ad $2+1$; (per prop. 1. hujus:) Hoc est ut 1 ad 3. Puta, $\frac{1}{3}bBS$.

$$\begin{array}{l} b \,.\, 2b \,.\, 3b \,.\, \text{\&c. usque ad } B. \\ s \,.\, 2s \,.\, 3s \,.\, \text{\&c. usque ad } S. \\ \hline bs \,.\, 4bs \,.\, 9bs \,.\, \text{\&c usque ad } BS. \quad = \frac{1}{3}bBS. \end{array}$$

Eademque Series magnitudinum (quarum omnium Centra gravitatis sunt in αB, planove super hanc erecto; saltem inde distant intervallo quod dato quovis minus sit;) in suas iterum distantias, s, $2s$, $3s$, &c. ductæ; exhibent momentorum earundem, respectu ipsius $A\alpha$, seriem bs^2, $8bs^2$, $27bs^2$, &c. usque ad BS^2 maximum. Quæ quidem series, (utpote Tertianorum,) est ad seriem totidem maximo æqualium; puta bBS^2: (Hoc est, ad Parallelepipedi Momentum in B suspensi;) ut 1 ad $3+1$; hoc est, ut 1 ad 4: (per prop. 1. hujus.) Adeoque $\frac{1}{4}bBS^2$.

$$\begin{array}{l} bs \,.\, 4bs \,.\, 9bs \,.\, \text{\&c. usque ad } BS. \\ s \,.\, 2s \,.\, 3s \,.\, \text{\&c. usque ad } S. \\ \hline bs^2 \,.\, 8bs^2 \,.\, 27bs^2 \,.\, \text{\&c. usque ad } BS^2. \quad = \frac{1}{4}bBS^2. \end{array}$$

Tra-

Trapezium verò complentes rectæ, (quarum minima $\delta\xi = YP = B$,) erunt $B+b$, $B+2b$, $B+3b$, &c. usque ad $B+B$, seu $2B$. Quarum itaque summa, æquabit $bB + \frac{1}{2}bB = \frac{3}{2}bB$, per prop. 1. Fig. 166, 168.

	B.	B.	B.	&c.	$= bB$
plus	b.	$2b$.	$3b$.	&c. usque ad B.	$= \frac{1}{2}bB$

$$\left.\begin{matrix} = bB \\ = \frac{1}{2}bB \end{matrix}\right\} = \frac{3}{2}bB.$$

Eademque series in distantias suas ab A α ductæ; hoc est (propter gravitatis centra singulorum in βb,) in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$: Exhibent Seriem Magnitudinum eisdem insistentium (solidum complentium) $BA+bA+sB+sb$, $BA+2bA+2sB+4sb$, $BA+3bA+3sB+9sB$, &c Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $bBA + \frac{1}{2}bBA + \frac{1}{2}bSB + \frac{1}{3}bSB$, seu $\frac{3}{2}bBA + \frac{5}{6}bSB$.

$B+b$, in $A+s$, $= BA + bA + sB + sb$.
$B+2b$, in $A+2s$, $= BA + 2bA + 2sB + 4sb$.
$B+3b$, in $A+3s$, $= BA + 3bA + 3sB + 9sb$.
&c. usque ad,
$B+B$, in $A+S$, $= BA + BA + SB + SB$.

$bBA + \frac{1}{2}bBA + \frac{1}{2}bSB + \frac{1}{3}bSB$.
seu $\frac{3}{2}bBA + \frac{5}{6}bSB$.

Eademque Magnitudinum series, in distantias iterum ducta; hoc est, in $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. exhibet seriem Momentorum, (respectu ejusdem A α.) Quorum omnium Aggregatum (per eandem prop. 1.) est $bBA^2 + \frac{1}{2}bBA^2 + bSBA + \frac{2}{3}bSBA + \frac{1}{3}bS^2B + \frac{1}{4}bS^2B$, seu $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$.

$BA^2 + bA^2 + 2sBA + 2sbA + s^2B + s^2b$.
$BA^2 + 2bA^2 + 4sBA + 8sbA + 4s^2B + 8s^2b$.
$BA^2 + 3bA^2 + 6sBA + 18sbA + 9s^2B + 27s^2b$.
&c. usque ad,
$BA^2 + BA^2 + SBA + SBA + S^2B + S^2B$.

$bBA^2 + \frac{1}{2}bBA^2 + \frac{2}{2}bSBA + \frac{2}{3}bSBA + \frac{1}{3}bS^2B + \frac{1}{4}bS^2B$.
seu $\frac{3}{2}bBA^2 + \frac{5}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$.

Adeoque Solidi Trapezio γδξp incumbentis magnitudo, ad

mag-

Fig. 166, 168. magnitudinem Pyramidis Triangulo Y α P incumbentis, est ut, $\frac{1}{2}bBA + \frac{5}{6}bSB$, ad $\frac{1}{3}bBS$. Atque momentum illius, ad momentum hujus, (respectu ejusdem A α,) ut $\frac{1}{2}bBA^2 + \frac{2}{3}bSBA + \frac{7}{12}bS^2B$, ad $\frac{1}{4}bS^2B$. Seu, extrito B ubique, (utpote infinite exiguo, & ubique æquali;) ductisque omnibus in 6 (pro magnitudinibus,) seu (pro momentis) in 12, (quo fractiones tollantur:) Magnitudo ad magnitudinem erit, ut $9bA + 5bS$, ad $2bS$: Et Momentum illius, ad Momentum hujus, ut $18bA^2 + 20bAS + 7bS^2$, ad $3bS^2$. Seu (restitutis minuscularum valoribus) Magnitudo ad Magnitudinem, ut $9ah + 5sh$, ad $2sh$: Et momentum ad momentum, ut $18a^2h + 20ash + 7s^2h$, ad $3s^2h$.

Cumque hoc ubique obtineat; erit Solidorum omnium Trapeziis y δ ξ p insistentium, (sive quæ totam Semicycloidem spectant, sive quæ spectant ipsius portionem, A b β α, b β r, b β δ d, &c.) magnitudo; ad magnitudinem omnium Triangulis Y α P insistentium, (sive quæ totum spectant Semicirculum, sive ipsius respectivam portionem, ut B α A, α B α, B α D, &c.) ut *Omnia* $9ah + 5sh$: ad *Omn.* $2sh$: eo spectantia. (De quo non ultra soliciti sumus, utpote quod in capite præcedente tractavimus.) Eorúmque omnium Momentum, ad Momentum horum; ut *Omn.* $18a^2h + 20ash + 7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo spectantia. (Quod & supra inventum erat.)

Hoc est, ut *Omn.* $7s^2h$: ad *Omn.* $3s^2h$: (seu 7 ad 3:) atque insuper ut *Omn.* $18a^2h + 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$. Sumptis a arithmetice proportionalibus.

Sunt autem *Omn.* a^2h: (puta, quæ portionem A b β α spectant,) hoc est, Ungulæ A b β α fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α, (per § K. prop. 19.) $2eR^3 - 2avR^2 + \frac{1}{3}a^3R + a^2sR$. Adeoque *Omn.* $18a^2h := 36eR^3 - 36avR^2 + 6a^3R + 18a^2sR$.

Item, *Omn.* ash: eo spectantia; hoc est, Solidi A b β α fig. 170. ex ductu rectarum b β in β υ facti, momentum respectu A α, (per § H. prop. 18.) $-\frac{5}{4}eR^3 + avR^2 - \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{2}as^2R$. Adeoque *Omn.* $20ash := -25eR^3 + 20avR^2 - 5svR^2 + 10as^2R$.

Ergo, *Omn.* $18a^2h + 20ash := 11eR^3 - 16avR^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$.

Similiter; *Omn.* $\frac{1}{2}s^2h$: hoc est; Solidi A b β α, fig. 170. ex ductu rectarum b β in β υ facti, momentum respectu plani A τ α, (per § C. prop. 18.) $\frac{1}{4}eR^3 + \frac{1}{4}svR^2 + \frac{1}{6}s^3R$. Adeoque *Omn.* $3s^2h = \frac{3}{2}eR^3 + \frac{3}{2}svR^2 + s^3R$.

Momen-

Momentum igitur Ungulæ portionis Semicycloidis A b β α, aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α; eſt ad Momentum reſpectivæ Ungulæ portionis Semicirculi B α A, aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α: ut $11eR^3 - 16avK^2 - 5svR^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R$ ad $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svR^2 + s^3R$; atque inſuper (ut modo dictum) ut 7 ad 3; hoc eſt, ut $\frac{7}{2}eK^3 + \frac{7}{2}svK^2 + \frac{7}{3}s^3K$, ad $\frac{1}{2}eK^3 + \frac{1}{2}svK^2 + s^3R$: Adeoque omnino, ut $\frac{29}{2}eR^3 - 16avR^2 - \frac{3}{2}svK^2 + 6a^3R + 18a^2sR + 10as^2R + \frac{2}{3}s^3R$, ad $\frac{1}{2}eR^3 + \frac{1}{2}svK^2 + s^3R$. Cumque hoc poſterius ſit (per § R. prop. 16.) duodecuplum Momenti Ungulæ B α A, aciem habentis A α, reſpectu ipſius A α: Erit & prius illud, duodecuplum momenti Ungulæ A b β α (portionis Semicycloidis) aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α: Adeoque ipſum illius momentum, $\frac{29}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avK^2 - \frac{1}{8}svR^2 + \frac{1}{2}a^3R + \frac{3}{2}a^2sR + \frac{5}{6}as^2R + \frac{2}{36}s^3R$: (Hujuſque Duplum, eſt Semiſolidi circa A α converſione facti, Momentum reſpectu ipſius axis A α: ut ſupra ſæpius oſtenſum eſt.) Fig. 166, 168.

Illudque Ungulæ Momentum, per magnitudinem ſuam, $\frac{3}{4}a^2R + \frac{3}{2}asR - \frac{2}{3}vR^2 + \frac{5}{12}s^2R$, (per § I prop. 20.) diviſum; exhibet ipſius A b β α Ungulæ, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^2 - 96avR - 9svR + 36a^3 + 108a^2s + 60as^2 + 14s^3}{54a^2 + 108as - 48vR + 30s^2}.$$

(Semiſolidique correſpondentis, diſtantia centri gravitatis ab axe A α, eſt ad hanc Ungulæ; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$.)

Speciatim vero, Ungulæ totius Semicycloidis A τ α, aciem habentis A α, Momentum reſpectu A α, (propter $a = \frac{1}{2}P$, $v = 2R$. & $s = 0$,) $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P$. Centrique gravitatis ab A α diſtantia, eſt

$$\frac{3P^3 - 35R^2P}{9P^2 - 64R^2}.$$

Similiter oſtendetur, Ungulæ Segmenti Semicycloidis b β τ, aciem habentis A α, Momentum reſpectu A α; ad momentum Ungulæ ſegmenti ſemicirculi α B α, aciem habentis A α, reſpectu ejuſdem A α; eſſe, ut 7 ad 3; atque inſuper, ut *Omn.* $18a^2h + 20ash$: ad *Omn.* $3s^2h$: eo ſpectantia; ſumptis a arithmetice proportionalibus. Quæ ſimiliter, mutatis mutandis, ad calculum reducentur. Cumque Ungulæ Segmenti Semicirculi Momentum illud per § S. prop 16. innoteſcat: Habebitur & correſpondens Ungulæ Segmenti Semicycloidis Momentum; & quæ hinc dependent. N.

Vel etiam; ex totius A τ α Ungulæ momento, (modo tradito,)

Fig. 166, 168. ſi auferatur (modo traditum) momentum Ungulæ A b $\beta\,\alpha$: Reſtabit $\frac{1}{16}RP^3 - \frac{35}{48}R^3P - \frac{29}{24}eR^3 + \frac{4}{3}avR^2 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{2}a^3R - \frac{3}{2}a^2sR - \frac{5}{6}as^2R - \frac{7}{36}s^3R$, Momentum Ungulæ b $\beta\,\tau$ aciem habentis A α, reſpectu ipſius A α.

Atque hoc, per ipſius magnitudinem (§ I. traditam) $\frac{1}{16}RP^2 - \frac{4}{3}R^3 + \frac{2}{3}vR^2 - \frac{3}{4}a^3R - \frac{3}{2}asR - \frac{5}{12}s^2R$, diviſum; exhibet ejuſdem, ab A α, diſtantiam centri gravitatis,

$$\frac{9P^3 - 105R^2P - 174eR^2 + 192avR + 18svR - 72a^3 - 216a^2s - 120as^2 - 28s^3}{27P^2 - 192R^2 + 96vR - 108a^2 - 216as - 60s^2}.$$

O. Si vero ex Ungulæ A b $\beta\,\alpha$ (portionis Semicycloidis) momento illo, modo reperto; auferatur Momentum Ungulæ b $\beta\,\alpha$ V, (aciem habentis A α,) reſpectu A α: Relinquitur Ungulæ A b V (aciem habentis A α) momentum reſpectu A α.

Componitur autem Ungula illa b $\beta\,\alpha$ V, ex Pyramide Triangulo B α V incumbente, & ſolido incumbente Parallelogrammo b $\beta\,\alpha$ B.

Pyramidis iſtius momentum (per § R. prop. 16.) eſt, $\frac{1}{12}s^3b = \frac{1}{6}s^3R - \frac{1}{12}s^3v$.

Solidum Parallegrammo b $\beta\,\alpha$ B incumbens; altitudinem habet, in α, nullam; in β, $\alpha\beta = a$; in B, BV $= s$; in b, bV $= s + a$. Adeoque componitur ex priſmate, triangulares baſes habente, $\alpha\beta$, vel Bb, $= \frac{1}{2}a^2$; (quarum itaque centra gravitatis a B, & α, ſunt $\frac{2}{3}a$; &, propter altitudinem V $\alpha = b$, magnitudo priſmatis $\frac{1}{2}a^2b$; centrique gravitatis ab A α diſtantia $\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}s$, propter centrum priſmatis in medio rectæ centra baſium conjungente; adeoque momentum ejus reſpectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{4}a^2sb$:) Atque ex cuneo, altitudinem habente in $\alpha\beta$, nullam; in b B, æqualem ipſi B V $= s$: Adeoque (propter b B $= a$, & V $\alpha = b$,) magnitudinem habebit $\frac{1}{2}asb$, (ſemiſſem Priſmatis, ejuſdem baſis & altitudinis:) Centrique gravitatis ab A α diſtantiam, $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}s$: Ejuſque propterea reſpectu A α momentum, $\frac{1}{4}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b$. Solidique propterea totius parallelogrammo incumbentis momentum, reſpectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b$.

Adeoque Solidi Trapezio b $\beta\,\alpha$ V incumbentis, momentum reſpectu A α, $\frac{1}{3}a^3b + \frac{1}{2}a^2sb + \frac{1}{3}as^2b + \frac{1}{12}s^3b$. Atque hoc per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{2}fab + \frac{1}{6}s^2b$ (per § K. prop. 20.) diviſum; exhibet ipſius b $\beta\,\alpha$ V Ungulæ, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α, $\dfrac{4a^3 + 6a^2s + 4as^2 + s^3}{6fa + 2s^2}$.

Vel

Vel etiam sic colligitur, ejusdem b$\beta\alpha$V Ungulæ, aciem habentis Aα, respectu ipsius Aα, Momentum. Fig. 166, 108.

Rectæ Trapezium complentes, ab $\alpha\beta$ incipiendo, usque ad bV; sunt A, $A+s$, $A+2s$, $A+3s$, &c. usque ad $A+S$. Earúmque puncta media, seu gravitatis centra, distantias habent, $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$. Quæ in rectas illas ductæ, exhibent earundem momenta, seu Triangula rectis illis insistentia Ungulam complentia, $\frac{1}{2}A^2$, $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, &c. usque ad $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$. Eademque Triangula, ducta in earundem respective distantiam centri gravitatis ab Aα, nempe $\frac{2}{3}A$, $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, $\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, &c. usque ad $\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$; exhibent seriem Momentorum, eorundem Triangulorum, respectu Aα; $\frac{1}{3}A^3$, $\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$, $\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$, &c. usque ad $\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$. Quarum omnium aggregatum (per prop. 1.) propter $V\alpha=h$, est, $\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$. Seu (restituto valore minuscularum,) $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$. Ut prius.

$A+s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$.
$A+2s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{2}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$.
$A+3s$, in $\frac{1}{2}A+\frac{3}{2}s$, $=\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$.
&c. usque ad
$A+S$, in $\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}S$, $=\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$.

$\frac{1}{2}hA^2+\frac{1}{2}hSA+\frac{1}{6}hS^2$.

$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+sA+\frac{1}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+sA^2+s^2A+\frac{1}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+2sA+\frac{4}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+2sA^2+4s^2A+\frac{8}{3}s^3$.
$\frac{2}{3}A+\frac{6}{3}s$, in $\frac{1}{2}A^2+3sA+\frac{9}{2}s^2$, $=\frac{1}{3}A^3+3sA^2+9s^2A+\frac{27}{3}s^3$.
&c. usque ad
$\frac{2}{3}A+\frac{2}{3}S$, in $\frac{1}{2}A^2+SA+\frac{1}{2}S^2$, $=\frac{1}{3}A^3+SA^2+S^2A+\frac{1}{3}S^3$.

$\frac{1}{3}hA^3+\frac{1}{2}hSA^2+\frac{1}{3}hS^2A+\frac{1}{12}hS^3$.

Quod quidem Ungulæ b$\beta\alpha$V momentum, $\frac{1}{3}a^3h+\frac{1}{2}a^2sh+\frac{1}{3}as^2h+\frac{1}{12}s^3h$, seu (propter $h=2R-v$,) $\frac{2}{3}a^3R-\frac{1}{3}a^3v+a^2sR-\frac{1}{2}a^2sv$

Fig.166, $+\frac{2}{3}as^2R-\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{6}s^3R-\frac{1}{12}s^3v$; ex Ungulæ A b β α momento,
168. $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2+\frac{1}{2}a^3R+\frac{1}{2}a^2sR+\frac{5}{6}as^2R+\frac{7}{36}s^3R$, (modo tradito,) ſubductum; Relinquit Ungulæ A b V, aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, $\frac{29}{24}eR^3-\frac{4}{3}avR^2-\frac{1}{8}svR^2-\frac{1}{6}a^3R+\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{6}as^2R+\frac{1}{36}s^3R+\frac{1}{3}a^3v+\frac{1}{2}a^2sv+\frac{1}{3}as^2v+\frac{1}{12}s^3v$.

Atque hoc, per hujus Ungulæ magnitudinem, $-\frac{2}{3}vR^2-\frac{1}{4}a^2R+\frac{1}{2}asR+\frac{1}{12}s^2R+\frac{1}{2}a^2v+\frac{1}{2}asv+\frac{1}{6}s^2v$, (per § K, L. prop. præced.) diviſum; exhibet Ungulæ A b V, aciem habentis A α, diſtantiam centri gravitatis ab A α,

$$\frac{87eR^3-96avR^2-9svR^2-12a^3R+36a^2sR+12as^2R+2s^3R+24a^3v+36a^2sv+24as^2v+6s^3v}{-48vR^2-18a^2R+36asR+6s^2R+36a^2v+36asv+12s^2v}.$$

Semiſolidique correſpondentis Momentum reſpectu axis converſionis ſuæ, duplum eſt Momenti Ungulæ reſpectu aciei ſuæ: Illiuſque diſtantia centri gravitatis ab axe, ad hujus diſtantiam ab acie; ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$. Ut ſæpius oſtenſum eſt.

P. Eademque Momenta & Diſtantiæ, ſic adhuc aliàs inveſtigantur. Nempe, Momento Ungulæ A b V per ſe invento, ſine ope Ungulæ A b β α: Hinc ipſius A b β α Ungulæ Momentum, reliquaque deducuntur.

Diviſâ rectâ A α in partes infinite exiguas, invicem æquales, in punctis S, C, Σ, &c. hoc eſt, ſumptis v arithmetice proportionalibus: Quæ Semicycloidem A τ α, ejúſve ſegmentum A b V, complent rectæ b V; ſunt *Omnes* $a+s$, eò ſpectantes. Quæque Semiquadrantalem Ungulam eidem inſiſtentem, aciem habentem A α, complent plana, eaſdem rectis inſiſtentia; ſunt Triangula Iſoſcelia, earundem rectarum ſemiquadrata: hoc eſt, *Omn.* $\frac{1}{2}a^2+as+\frac{1}{2}s^2$: eo ſpectantia. Horumque Triangulorum centra gravitatis, ab A α diſtant earundem rectarum b V beſſe, hoc eſt $\frac{2}{3}$ b V $=\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}s$. Adeoque Triangulorum illorum Momenta, (ductis magnitudinibus in reſpectivas diſtantias,) ſunt *Omn.* $\frac{1}{3}a^3+a^2s+as^2+\frac{1}{3}s^3$: (ſeu, Triens cuborum omnium b V,) ſumptis v arithmetice proportionalibus.

Sunt autem, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3$: (ſumptis v arithmetice proportionalibus,) hoc eſt, Ungulæ A b B fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α, (per § M. prop. 19.) $2eR^3-2avR^2-\frac{1}{3}a^3R+a^2sR+\frac{1}{3}a^3v$.

Et *Omn.* a^2s: (eo ſpectantia,) hoc eſt, Duplum Momenti reſpectu A α, Solidi A b B fig. 170. ex ductu rectarum bB in bV reſpective, (per § N. prop. 18.) $-\frac{1}{4}eR^3-\frac{1}{4}svR^2+\frac{1}{6}a^3R-\frac{1}{2}a^2sR+\frac{1}{2}as^2R+\frac{1}{2}a^2sv$.

Item

Item *Omn.* as^2: (eo spectantia,) hoc est, Duplum Momenti ejusdem A b B Solidi, respectu plani A $\tau\,\alpha$, (per § O. prop. 18.) $-\frac{2}{3}eR^3 + \frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R + \frac{1}{9}s^3R + \frac{1}{3}as^2v$. Fig. 166, 168.

Et *Omn.* $\frac{1}{3}s^3$; (eo spectantia,) hoc est, Momentum Ungulæ A B V aciem habentis A α, respectu A α; $\frac{1}{8}eR^3 + \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{12}s^3R + \frac{1}{12}s^3v$: per § Q. prop. 16.

Ergo, *Omn.* $\frac{1}{3}a^3 + a^2s + as^2 + \frac{1}{3}s^3$: $= \frac{22}{24}eR^3 - \frac{4}{3}avR^2 - \frac{1}{8}svR^2 - \frac{1}{6}a^3R + \frac{1}{2}a^2sR + \frac{1}{6}as^2R + \frac{1}{36}s^3R + \frac{1}{3}a^3v + \frac{1}{2}a^2sv + \frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{12}s^3v$. Quod igitur est Momentum Ungulæ segmenti semicycloidis A b V, aciem habentis A α, respectu ipsius A α. (Idem quod prius inventum erat.) Quod itaque per magnitudinem divisum, exhibebit distantiam centri gravitatis ab A α: ut prius.

Atque huic quidem Momento, si addatur Momentum Ungulæ b β α V, (modo traditum,) habebitur Ungulæ A b β α, aciem habentis A α, Momentum respectu A α: ut prius.

Exhibuimus igitur in expositis Ungulis Semicycloidis, ejúsque partium, tum Magnitudines, & Momenta; tum centri gravitatis in singulis distantias à duobus saltem planis non sibi invicem parallelis; atque in quo tertio per aciem plano constitutum sit, ex § G. prop. 12. constat, (eo nempe quod Ungulæ altitudinem bisecat;) Adeoque (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis centra determinavimus. Q.

Quæque de Ungulis dicta sunt; eadem ad solida conversione facta facile transferuntur, ope prop. 12. & 14. ut suis locis sæpius ostensum.

Quæque de expositis dicta sunt; ad alia, calculo rite administrato, facile applicantur: Ut ad præcedentes aliquot propositiones admonuimus.

Quæque de Ungulis Solidisque Semicycloidem Primariam (hactenus traditam) dicta sunt; eadem omnia ad Ungulas, Solidáque, Secundarias (sive Protractas sive Contractas) similiter spectantia, facile transferentur. Nempe, quoties rectæ b B in calculum veniunt; pro a, substituenda erit alia quantitas, quæ, ad illam, eam habet rationem, quam habet recta $\tau\,\alpha$, ad $\frac{1}{2}P$, semiperipheriam circuli generantis. Et similiter, mutatis mutandis, de earundem Quadratis Cubis, cæterisque potestatibus; ut ad calcem propositionis præcedentis ostensum est. R. Fig. 175, 176.

PROP.

Fig. 177.

PROP. XXII.

A. Quæ Cycloidem contingit recta, eſt correſpondenti Circuli genitoris (circa cycloidis axem poſiti) Chordæ, ad verticem terminatæ, parallela.

B. Curvaque Semicycloidis, eſt Dupla Diametri circuli Genitoris.

C. Ejuſque portio quævis (ad verticem terminata) Dupla ſubtenſæ correſpondentis Arcûs circuli genitoris.

Adeoque ſecabitur Cycloidis curva, in ratione data.

Atque hinc Momenta & Magnitudines, ipsáque gravitatis centra, exhibentur; Tum Curvæ Cycloidis, partiúmque ejuſdem; tum ſuperficierum, earundem converſione, factarum.

Nempe (retentis ſymbolis ut in propoſitionibus præcedentibus, poſitoque $\chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \alpha B$.)

B. D, F. Curvæ Semicycloidis A τ, magnitudo $4R$: Momentum reſpectu T A, $\frac{8}{3}R^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{16}{3}R^2$; Diſtantia
G, K. Centri gravitatis, à T A, $\frac{2}{3}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}R$: Momentum reſpectu A α, $2RP - \frac{16}{3}R^2$; reſpectu T τ, $\frac{16}{3}R^2$; Diſtantia Centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$; à T τ, $\frac{4}{3}R$.

C. Curvæ A b; magnitudo, $2c$: Momentum reſpectu T A,
D, F. $\frac{2}{3}cv$; reſpectu b V, $\frac{4}{3}cv$; reſpectu $\tau\alpha$, $2cb + \frac{4}{3}cv = 4cR - \frac{2}{3}cv$: Diſtantia Centri gravitatis à T A,
G, K. $\frac{1}{3}v$; à b V, $\frac{2}{3}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{3}v = 2R - \frac{1}{3}v$: Momentum reſpectu A α, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi$;

Diſtantia

Distantia Centri gravitatis ab $A\chi$, $a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3a}$ Fig. 177.

Ungulæ Superficialis (Semiquadrantalis) ipsi $A\tau$ curvæ insistentis, aciem habentis T A, Magnitudo, $\frac{8}{3}R^2$: Momentum respectu T A, $\frac{16}{5}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{32}{15}R^3$: Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{6}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{4}{5}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{64}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$; à $T\tau$, $\frac{8}{15}R$. D, F. E, F. H, L.

Aciémque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $\frac{16}{3}R^2$: Momentum respectu T A, $\frac{32}{15}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{128}{15}R^3$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{2}{5}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$: A $T\tau$, $\frac{26}{15}R$; ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{26}{15}R$; Momentum respectu $T\tau$, $\frac{416}{45}R^3$; respectu $A\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$. D, F. E, F. H, L.

Aciémque habentis $A\alpha$; Magnitudo, $2RP - \frac{16}{3}R^2$: Momentum respectu T A, $\frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{8}{3}R^2P - \frac{416}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{30P - 32R}{45P - 120R}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{60P - 208R}{45P - 120R}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $RP^2 - \frac{1024}{45}R^3$; respectu $T\tau$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; Distantia Centri grav. ab $A\alpha$, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; à $T\tau$, $\frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$. G, K. H, L. I, M.

Aciémque habentis $T\tau$; Magnitudo, $\frac{16}{3}R^2$: Momenmentum respectu T A, $\frac{64}{45}R^3$; respectu $\tau\alpha$, $\frac{416}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis à T A, $\frac{4}{15}R$; à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$: Momentum respectu $A\alpha$, $\frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$; respectu $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$; Distantia Centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$; à $T\tau$, $P - \frac{64}{15}R$. G, K. H, L. I, M.

Ungulæ Superficialis A b, aciem habentis T A; Magnitudo $\frac{4}{3}cv$: Momentum respectu T A, $\frac{2}{3}cv^2$; respectu D, F. E, F.

bV,

Fig. 177. b V, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{3}{5}v$; à b V, $\frac{2}{5}v$;

H, L. à $\tau\alpha$, $b + \frac{2}{5}v = 2R - \frac{3}{5}v$: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2};$$

Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{60cvR^2 = 30c^3R}.$$

D, F. Aciemque habentis b V; Magnitudo, $\frac{4}{3}cv$: Momentum

E, F. reſpectu T A, $\frac{4}{15}cv^2$; reſpectu b V, $\frac{16}{15}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}cvR - \frac{4}{15}cv^2$; Diſtantia Centri gravitatis à T A, $\frac{1}{5}v$; à b V, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $b + \frac{4}{5}v = 2R - \frac{1}{5}v$:

H, L: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2}.$$

Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R}.$$

D, F. Aciemque habentis $\tau\alpha$; Magnitudo, $2ch + \frac{4}{3}cv = 4cR$

E, F. $- \frac{2}{3}cv$: Momentum reſpectu T A, $\frac{4}{3}cvR - \frac{2}{5}cv^2$; reſpectu $\tau\alpha$, $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$; reſpectu b V, $\frac{4}{3}cvR - \frac{14}{15}cv^2$; Diſtantia Centri grav. à T A, $\frac{10vR - 3v^2}{30R - 5v}$;

H, L. à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2 - 20vR + 3v^2}{30R - 5v}$; à b V, $\frac{20vR - 2v^2}{30R - 5v}$: Momentum reſpectu A α,

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2};$$

Diſtantia Centri gravitatis ab A α,

360acR³

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =) 30c^3R.}$$ Fig. 177.

Aciemque habentis A α; Magnitudo, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + (4\chi R - \frac{4}{3}b\chi =) \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$: Momentum respectu TA, G,K. H,L.

$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{90R^2}$; respectu $\tau\alpha$,

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2};$$

respectu bV, $$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2};$$

Distantia Centri gravitatis à TA,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =) 30c^2\chi R},$$

à $\tau\alpha$, $$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R};$$

à bV, $$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R}:$$

Momentum respectu A α, $2a^2c + \frac{4}{3}c^3 - \frac{112}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 + 8a\chi R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^5}{10R^2}$; Distantia Centri gravitatis ab A α, I,M.

$$\frac{180a^2cR^2 + 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

N. Fig. 177. Adeoque exhibuimus, tum rectas Cycloidem (Primariam) tangentes; tum ipsius curvæ, partiumque ejusdem, longitudines, & Centra gravitatis; earumque Momenta respectu expositarum rectarum; Ungularum item superficialium, (adeoque & superficierum conversione factarum,) magnitudines, momenta, & Centra gravitatis. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia facile transferentur.

O. Possunt etiam & Cycloidum Secundariarum (Contractarum scilicet & Protractarum) Tangentes exhiberi; earumque Curvis Semiellipses æquales; & partes partibus respective sumptis.

A. SUmpto, in Semicycloidis curva A τ, puncto quovis b; duci intelligatur basi τ α, parallela b B; Circulo genitori, circa Cycloidis axem A α constituto, occurrens in B: Junctâque Chordâ A B; ducatur huic parallela, per punctum b, recta g b h. Dico rectam g b h, Semicycloidem in b contingere.

Sumptis in recta g b h, supra b, puncto g; &, infra, puncto h: ducantur, ipsi b B parallelæ, rectæ g x X G, h d H D, Semicycloidi occurrentes in x, d; Semicirculo in X, D; chordæque A B (productæ) in G, H.

Ostensum est (§ A. prop. 20.) arcui B A, æqualem esse rectam b B; adeoque & (propter parallelas) g G, & h H. Item arcui X A, rectam x X; & arcui D A, rectam d D.

Cumque ibidem demonstratum sit rectas B P, (fig. 167, 168, 169.) arcubus B X, ubique minores esse; rectasque B Y, arcubus B D majores: Similiter ostendetur, (fig. 177.) rectam X G minorem arcu B X; rectamque H D, majorem esse arcu B D. (Nam similiter, hic, ducitur A B, ab A; atque illic, α B, ab α.)

Adeoque; propter totam g G rectam, toti B A curvæ æqualem; & ablatam X G, ablatâ X B minorem: Erit reliqua X g recta, major quam reliqua X A curva, seu recta x X. Et, propterea, punctum g, extra cycloidem cadet.

Item; propter h H rectam, ipsi B A curvæ æqualem; & H D adjectam, majorem adjectâ B D: Erit tota D h recta, major quam

tota

tota curva D A, seu D d recta. Et, propterea, punctum h est extra Cycloidem. Fig. 177.

Cum itaque, tum g (punctum quodvis supra b,) tum h (punctum quodvis infra b,) sit extra Cycloidem; (adeoque unicum b punctum cycloidi commune;) recta g b h Cycloidem in b tangit.

Estque (propter parallelas) b g = B G, b h = B H, g h = G H; & (producta b g, donec tangenti verticis A T occurrat in T,) b T = B A = $c = \sqrt{2vR}$; (propter A V, A B, A α, hoc est, $v . c . 2R$. continue proportionales; ut sæpe dictum est.) Item, (ductis g X O, b B V, h D C, ipsi T A parallelis, Axi A α occurrentibus in O, V, C, rectam V O, vel C O, intercipientibus; quam dicamus B;) erit, ut A V = v, ad A B = $\sqrt{2vR}$; sic V O, vel C O, = B; ad B G, vel H G; hoc est, ad b g, vel h g, = $\frac{B\sqrt{2vR}}{v} = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$. B.

Si itaque intelligatur recta A $\alpha = 2R$, in partes æquales numero infinitas, dividi, quarum una intelligatur V O, vel O C; adeoque omnes A V, hoc est omnes v, eo spectantes, arithmetice proportionales: Quæ his respondent subtensæ totidem A B, hoc est, totidem $\sqrt{2vR}$ correspondentes; (series utique subsecundanorum;) sunt ut totidem rectæ V p semiparabolam A p P α (fig. 178.) complentes; cujus tum Axis A α, tum basis α P, (adeoque & latus rectum,) sit = $2R$. Fig. 177, 178.

Rectæque b g, seu g h, tangentes; hoc est, (in partibus infinite exiguis) ipsæ b x, seu x d, curvæ; sunt totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, correspondentes; (hoc est, series seriei subsecundanorum reciproca.)

Adeoque; si rectæ V O, vel O C, singulæ; hoc est, totidem B, intelligantur ipsis α O seu V O, totidem, fig. 177, 178 rectangulum A α O O complentibus, æquales; & sumantur ubique, ut V p, ad α P, seu V P; sic α O, seu V O, ad V ω: hoc est, ut $\sqrt{2vR}$, ad $2R$; sic B, ad $\frac{2BR}{\sqrt{2vR}} = \frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$ = V ω: Erunt omnes illæ b g, seu g h; hoc est, (in partibus infinite exiguis,) omnes illæ b x, seu x d, curvam A τ complentes; ad omnes illas V O, seu O C, complentes rectam A α; hoc est, ipsa A τ curva, ad rectam A α: ut

 omnes

Fig. 177, 178. omnes illæ $V\omega$ figuram interminabilem $A\alpha O\omega$ complentes, ad omnes illas VO complentes Rectangulum $A\alpha OO$; Hoc est, ut figura illa interminabilis, ad inscriptum parallelogrammum; Hoc est, ut Reciproca Secundanorum Series, cujus index est $-\frac{1}{2}$; ad congruam Æqualium seriem, cujus Index est ± 0, (per def. 1, 2. hujus.) hoc est (per prop. 1. hujus.) ut 1 ad $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ seu ut 2 ad 1. Adeoque $A\tau$ curva, est dupla rectæ $A\alpha$.

Fig. 179. Vel etiam; eâdem Parabolâ inverso situ positâ, ut $\alpha\pi\Pi$, fig. 179, ductoque ad eandem diametrum Semicirculo $AB\alpha$: Si sumatur, ubique, ut VB ad $V\pi$, sic VO seu αO ad $V\omega$; (hoc est, ut $s=\sqrt{vh}$ ad $\sqrt{2hR}$, sic B ad $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$:) habebitur eadem quæ prius figura interminabilis $A\alpha O\omega$: Reliquaque consequentur ut prius.

C. Similiter ostendetur (in partibus,) curvam Ab, ad AV rectam; Fig. 177, 178, 179. esse, ut est figura $AV\omega\omega$ interminabilis ad AVOO rectangulum.

Et, consequenter, si intelligatur $A\alpha O\omega$ (figura interminabilis) rectâ $V\omega$ secari in ratione datâ: in eâdem ratione secabitur, in b, curva $A\tau$.

Quò autem secetur $A\alpha O\omega$ in ratione datâ; secanda erit $A\alpha$ recta in ejusdem ratione duplicatâ. Intellige, si ratio data sit r ad R; sitque AV ad $A\alpha$, ut r^2 ad R^2; erit $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque Ab curva, ad curvam $A\tau$,) in data ratione r ad R. Esto enim $AV\ (=v)=\frac{2r^2}{R}$, (hoc est, ad $A\alpha=2R$, in ratione r^2 ad R^2:) Erit propterea $Vp\ (=AB=\sqrt{2vR})=\sqrt{4r^2}=2r$: Et $V\omega\ (=B\sqrt{\frac{2R}{v}})=B\sqrt{\frac{R^2}{r^2}}=\frac{BR}{r}$. Adeoque Rectangulum $AV\omega$ $(=vB\sqrt{\frac{2R}{v}})=2rB$. Hujus itaque duplum $4rB$, erit ipsi $AV\omega\omega$ interminabilis. (Nam, qua ratione $A\alpha O\omega$ est dupla inscripti parallelogrammi $A\alpha OO$; eâdem est $AV\omega\omega$ interminabilis, dupla huic inscripti parallelogrammi $AV\omega$; nempe per prop. 1. hujus.) Est autem (propter $A\alpha=2R$, & $\alpha O=B$,) Rectangulum $A\alpha OO$ $=2RB$; hujusque propterea duplum $A\alpha O\omega=4RB$. Ergo $AV\omega\omega$, ad $A\alpha O\omega$, (adeoque & Ab, ad $A\tau$,) ut $4rB$, ad $4RB$; hoc est, ut r ad R.

Cum itaque Sinus versi AV ad $A\alpha$, (hoc est v ad $2R$;) sint in duplicata ratione subtensarum AB ad $A\alpha$; (hoc est, $\sqrt{2vR}$ ad

ad $2R$ seu $\sqrt{4R^2}$; vel $\sqrt{v}$ ad $\sqrt{2R}$:) Sintque item eædem AV ad Aα in duplicata ratione curvarum Ab ad Aτ, (ut modo demonstratum est:) Eadem erit ratio Ab curvæ ad curvam Aτ, quæ est rectæ AB ad Aα rectam. Adeoque, ut Aτ curva ad rectam Aα, sic curva Ab ad AB rectam. Est autem (uti jam demonstravimus) curva Aτ dupla rectæ Aα; ergo & Ab curva, dupla est rectæ AB. Et sic ubique. Hoc est, Aτ, $= 2$ A$\alpha = 4R$; & Ab$=2$AB$=2c=2\sqrt{2vR}=\sqrt{8vR}$. Fig. 177, 178, 179.

Vel etiam; sic habetur, curvæ Aτ divisio in ratione datâ. Divisâ scilicet Aα in ratione datâ, in γ; aptetur AB$=$Aγ: Ductâque Bb rectæ AT parallelâ, in eâdem ratione dividetur Aτ in b. Ut ex dictis patet. Nempe $R . r :: A\alpha . A\gamma = AB :: A\tau$. Ab. Fig. 177, &c.

Porro; rectarum Vω, hoc est, BG, bg, vel GH, gh, hoc est, (in partibus infinite exiguis) bx, vel xd; à Tangente verticis TA, distantiæ, sunt ipsæ AV $= v$, respectivæ. Quæ itaque in magnitudines $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$ (modo inventas) ductæ; exhibent earundem respectu TA momenta, $B\sqrt{2vR}$ (seu cB.) Adeoque (sumptis v arithmetice proportionalibus) curvæ Aτ, vel Ab, momentum respectu AT; vel Semiquadrantalis Ungula superficialis ipsi Aτ vel Ab curvæ insistens, aciem habens TA; est aggregatum omnium $B\sqrt{2vR}$ eo spectantium; vel (omissis B) omnium $\sqrt{2vR}$, hoc est, omnium Vp rectarum, Semiparabolam AαP, vel AVp, fig. 178. complentium: (est enim B, ut ex ipsius origine patet, nihil aliud quam ipsius Aα vel AV pars infinitesima; quæ omnes simul sumptæ ipsam Aα vel AV conficiunt; atque hic nihil innuit aliud quam rectarum illarum, planum complentium, crassitiem.) Et propterea, superficialis Ungula ipsi Aτ vel Ab curvæ insistens, (aciem habens AT,) æquatur ipsi AαP, vel AVp, semiparabolæ; hoc est (propter latus rectum $2R$, axemque A$\alpha = 2R$, vel AV $= v$,) erit Ungula Aτ, $=$ AαP $= \frac{8}{3}R^2$; & Ungula Ab, $=$ AVp $= \frac{2}{3}v\sqrt{2vR} = \frac{2}{3}vc$. per prop. 1, vel 6. hujus. Adeoque quæ conversione curvæ Aτ vel Ab circa TA, describitur superficies; est $\frac{8}{3}RP$, vel $\frac{2P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{2vcP}{3R}$; & semiconversione, $\frac{4}{3}RP$, vel $\frac{P}{3R}v\sqrt{2vR} = \frac{vcP}{3R}$. D. Fig. 177.

Hindque

Fig. 177. Illudque momentum, $\frac{8}{3}R^2$, vel $\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}cv$, per ipsius curvæ A τ vel A b magnitudinem, $4R$ vel $2\sqrt{2vR}=2c$ (modò inventum,) divisum; exhibet, centri gravitatis à T A, distantiam; nempe, ipsius A τ, $\frac{2}{3}R$; ipsiusque A b, $\frac{1}{3}v$.

Adeoque; ipsius A τ distantia centri gravitatis à τα, erit $\frac{4}{3}R$; ejusque propterea respectu τα momentum, seu semiquadrantalis Ungula, $\frac{16}{3}R^2$: Ipsiusque A b, Distantia Centri gravitatis à bV, $\frac{2}{3}v$; & à τα, $b+\frac{2}{3}v=2R-\frac{1}{3}v$; adeoque ejusdem momentum (vel Semiquadrantalis Ungula) respectu b V, $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}vc$; & respectu τα, $2b\sqrt{2vR}+\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=2bc+\frac{4}{3}vc$, vel $4R\sqrt{2vR}-\frac{2}{3}v\sqrt{2vR}=4cR-\frac{2}{3}cv$. Et superficies conversione vel semiconversione factæ, ad hæc momenta; ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R.

E. Deinde: Eorundem omnium $\sqrt{2vR}$ (Ungulam A τ vel A b, aciem habentem T A, complentium,) distantiæ à T A, sunt $AV=v$ respectivè: Adeoque eorundem respectu T A momenta, sunt omnia $v\sqrt{2vR}$ seu $\sqrt{2v^3R}$ (vel vc;) hoc est, ipsa rectarum V p semiparabolam A α P vel A V p constituentium momenta respectu T A. Hoc est, (per prop. 1. vel 6. hujus,) Semiquadrantalis Ungulæ superficialis, ipsi A τ, vel A b, insistentis, aciem habentis T A, respectu ejusdem T A, momentum, est $\frac{16}{5}R^3$, vel $\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{5}cv^2$. Adeoque, superficiei semiconversione circa T A factæ momentum respectu ipsius T A, (quippe duplum momenti correspondentis Ungulæ Semiquadrantalis, propter magnitudinum rationem, ut $\frac{1}{2}P$ ad R, seu P ad $2R$, & distantiarum ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P; ut sæpe ostensum est;) $\frac{32}{5}R^3$, vel $\frac{4}{5}cv^2=\frac{4}{5}v^2\sqrt{2vR}$; prout de tota A τ, parteve A b, intelligitur.

Illudque Ungulæ Momentum $\frac{16}{5}R^3$ vel $\frac{2}{5}cv^2$, per magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ vel $\frac{2}{3}cv$ divisum; exhibet distantiam centri gravitatis istius A τ vel A b superficialis Ungulæ (aciem habentis T A) ab ipsa T A, $\frac{6}{5}R$ vel $\frac{3}{5}v$; (adeoque correspondentis Superficiei Semiconversione factæ, centri inde distantiam, $\frac{24R^2}{5P}$, vel $\frac{12vR}{5P}$; nempe, ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P.) Et propterea, distantiam centri gravitatis ejusdem Ungulæ A τ (aciem habentis T A) à τα, $\frac{4}{5}R$ (ejusque igitur respectu τα momentum $\frac{32}{15}R^3$;) Ungulæque A b (aciem item habentis T A) distantiam centri gravitatis à b V, $\frac{2}{5}v$; à τα, $b+\frac{2}{5}v=2R-\frac{3}{5}v$; adeoque ipsius, respectu b V, momentum, $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$; & respectu τα, $\frac{2}{3}vb\sqrt{2vR}+\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{2}{3}b^2c+\frac{4}{15}v^2c$, vel $\frac{4}{3}vR\sqrt{2vR}-\frac{2}{5}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$.

Sed

Sed & idem $\frac{32}{15}R^3$ (propter magnitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ superficialis A τ, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum respectu TA; quod itaque per magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (modo inventam) divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{2}{5}R$; adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{8}{5}R$, ejusque propterea respectu aciei suæ $\tau\alpha$ momentum, $\frac{128}{15}R^3$: Superficiei vero semiconversione circa $\tau\alpha$ descriptæ, respectu ipsius $\tau\alpha$, Momentum, (utpote Momenti Ungulæ duplum,) $\frac{256}{15}R^3$; Centrique gravitatis à $\tau\alpha$ distantiam, (utpote ad illam Ungulæ ut $4R$ ad P,) $\frac{32R^2}{5P}$. Fig. 177.

Item (propter eandem magnitudinum & distantiarum reciprocationem) $\frac{4}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{4}{15}cv^2$, momentum etiam erit Ungulæ Ab aciem habentis bV, respectu ipsius TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $\frac{4}{3}v\sqrt{2vR}=\frac{4}{3}cv$ divisum, exhibet distantiam centri gravitatis à TA, $\frac{1}{5}v$; adeoque à bV, $\frac{4}{5}v$; à $\tau\alpha$, $h+\frac{4}{5}v$ $=2R-\frac{1}{5}v$; ejusque propterea respectu ipsius bV (aciei suæ) momentum $\frac{16}{15}v^2\sqrt{2vR}=\frac{16}{15}cv^2$; & respectu $\tau\alpha$, $\frac{4}{3}chv+\frac{16}{15}cv^2$ $=\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione circa bV factæ, momentum respectu ipsius bV, $\frac{32}{15}cv^2$; ejusque inde distantiam centri gravitatis $\frac{16vR}{5P}$.

Itemque (ob eandem causam) $\frac{4}{3}cvR-\frac{2}{5}cv^2$, est etiam Momentum Ungulæ superficialis Ab, aciem habentis $\tau\alpha$, respectu TA: Quod itaque per magnitudinem modo inventam $4cR-\frac{2}{3}cv$ divisum, exhibet illius à TA distantiam centri gravitatis $\frac{10R-3v}{30R-5v}v$: Adeoque, à $\tau\alpha$, $\frac{60R^2-20vR+3v^2}{30R-5v}$; à bV, $\frac{20vR-2v^2}{30R-5v}$: Ejusque propterea momentum respectu $\tau\alpha$, $8cR^2-\frac{8}{3}cvR+\frac{2}{5}cv^2$; & respectu bV, $\frac{8}{3}cvR-\frac{4}{15}cv^2$: Superficiei vero semiconversione ipsius Ab circa $\tau\alpha$ descriptæ, momentum respectu ipsius $\tau\alpha$, $16cR^2-\frac{16}{3}cvR+\frac{4}{5}cv^2$; centrique gravitatis inde distantiam $\frac{240R^3-80vR^2+12v^2R}{30RP-5P}$.

Eadem etiam sic habentur. Sumptis Subtensis AB$=c$ (adeoque & curvis Ab$=2c$) arithmetice proportionalibus; adeoque (per 9 C.) divisâ Aτ curva in partes æquales; erit singulorum b punctorum F. Fig. 177, 181.

à

Fig. 177, 181. à T A diſtantiæ A V $(= v) = \frac{c^2}{2R}$; (hoc eſt, ut ſeries ſecundanorum, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento;) eorumque à $\tau\alpha$ diſtantiæ V$\alpha = 2R - \frac{c^2}{2R}$. Adeoque ſi intelligatur A b τ curva fig. 177. in rectam expandi, vel huic æqualem rectam ſumi A b τ, vel $\alpha\beta$ P, fig. 181; Ejuſque b punctis, æqualiter ab invicem diſtantibus, inſiſtentes rectæ b p ipſis A V reſpectivis æquales, figuram A P τ complentes: Exhibebunt hæ rectæ ſingulorum b punctorum, ſeu particularum minutarum, momenta reſpectu ipſius T A fig. 177. (ſicut & reſiduæ p β, earundem momenta reſpectu $\tau\alpha$; nam propter b p = A V, erit pβ = Vα:) Et propterea, tum planum A τ P, totius A τ curvæ; tum planum A b p, curvæ A b, momentum reſpectu T A: Et ſimiliter planum A P α, curvæ A τ; & A p $\beta\alpha$, curvæ A b momentum exhibebit, reſpectu $\tau\alpha$; & A p V, ejuſdem A b momentum reſpectu b V. Eſt autem, (propter ordinatas b p $= \frac{c^2}{2R}$, in duplicatâ ratione diametrorum A b $= 2c$,) Trilineum A P τ ſemiparabolæ complementum; ipſumque A P α, Parabola: Adeoque (propter A $\tau = 4R$, & τ P $= 2R$,) A P $\tau = \frac{8}{3}R^2$; & A P $\alpha = \frac{16}{3}R^2$; (per prop. 6. hujus:) Quæ itaque ſunt curvæ A τ momenta reſpectu T A & $\tau\alpha$. Similiter; propter A b $= 2c$, & b p $= \frac{c^2}{2R}$; erit curvæ A b momentum reſpectu T A, $\frac{c^3}{3R}$; & reſpectu b V, $\frac{2c^3}{3R}$; & A p $\beta\alpha$ (= A b $\beta\alpha$ — A p b) $= 4cR - \frac{c^3}{3R}$ ejuſdem, reſpectu $\tau\alpha$, momentum. Hoc eſt, (propter $c^2 = 2vR$) $\frac{2}{3}cv$, & $\frac{4}{3}cv$, & $4cR - \frac{2}{3}cv$. Ut prius. Quæ quidem momenta, eadem ſunt atque correſpondentes Ungulæ; ut ſæpius dictum eſt.

Cumque quæ has ſuperficiales Ungulas conſtituunt rectæ, ſunt ipſarum ab aciebus ſuis diſtantiis æquales; adeoque momenta, ut ipſarum quadrata: Erit ſuperficialis Ungulæ A τ aciem habentis T A, momentum reſpectu T A, omnia rectarum b p quadrata, hoc eſt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ uſque ad eorum maximum, hoc eſt quadratum τ P $= \frac{16R^4}{4R^2} = 4R^2$; adeoque ad maximum toties ſumptum, ut 1 ad 5:

hoc

hoc est (propter $A\tau = 4R$,) $\frac{1}{5} \times 4R \times 4R^2 = \frac{16}{5}R^3$ per prop. 1. hujus. Fig. 177, 181.

Et similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem item habentis T A, (fig. 177.) respectu ejusdem T A momentum; erunt omnia $\frac{c^4}{4R^2}$ usque ad eorum maximum, puta $\frac{C^4}{4R^2}$; adeoque (propter A b $= 2C$,) momentum illud erit $\frac{1}{5} \times 2C \times \frac{C^4}{4R^2} = \frac{C^5}{10R^2}$; vel (restituendo c minusculam) $\frac{c^5}{10R^2}$; hoc est, (propter $c^2 = 2vR$, adeoque $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{2}{5}cv^2$.

Similiter, Superficialis Ungulæ A b, aciem habentis b V, fig. 177. momentum respectu ejusdem b V; erunt omnia quadrata rectarum, ipsi A V parallelarum, semiparabolam A p V complentium; hoc est, quadrata rectarum $\frac{C^2}{2R} - \frac{c^2}{2R}$; hoc est, omnia $\frac{C^4 - 2c^2C^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus, (propter Ab $= 2C$, & quadratum b p, $= \frac{C^4}{4R^2}$,) $\frac{2C^5 - \frac{4}{3}C^5 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2} = \frac{\frac{16}{15}C^5}{4R^2}$; vel (restituto valore c minusculæ) $\frac{4c^5}{15R^2}$; hoc est, (propter $c^4 = 4v^2R^2$,) $\frac{16cv^2}{15}$; ut prius.

Item; Superficialis Ungulæ A b aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu $\tau\alpha$, sunt omnia quadrata p β eo spectantia; hoc est, quadrata rectarum pβ, parabolæ portionem A p$\beta\alpha$ complentium; hoc est, omnium bβ - bp; h.e. omn. $2R - \frac{c^2}{2R}$, seu $\frac{4R^2 - c^2}{2R}$; hoc est, omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{4R^2}$; hoc est, per prop. 1. hujus (propter Ab $= \alpha\beta = 2C$,) $\frac{32CR^4 - \frac{16}{3}C^3R^2 + \frac{2}{5}C^5}{4R^2}$; hoc est, (propter $c^2 = 2vR$, & $c^4 = 4v^2R^2$; item, restituta c minuscula;) $8cR^2 - \frac{8}{3}cvR + \frac{2}{5}cv^2$: Ut prius.

Atque hinc, centrorum gravitatis à T A, b V, $\tau\alpha$, distantiæ; reliquaque deducentur; eadem quæ prius.

G. Porro; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in minutas partes æquales (ut prius) dividi; Erit singulorum b punctorum, seu partium minutarum, ab $A\alpha$, distantia $bV = bB + BV = a + s$: Sumptis $AB = c$ (adeoque & $Ab = 2c$) arithmetice proportionalibus.

Fig. 177, 182, 183.

Adeoque; si intelligatur curva $A\tau$ fig. 177. in rectam $A\tau$ fig. 182. expandi; cui ordinatim-applicentur, (in singulis b punctis,) ex una parte, rectæ bB (trilineum $A\tau\alpha$ fig. 182. complentes) ipsis bB fig. 177. æquales; &, ex altera parte, rectæ $b\upsilon$ (complentes bilineum $A\tau\upsilon$) æquales ipsis BV fig. 177. singulæ Rectæ $Bb\upsilon$ fig. 182. singulorum b punctorum, seu minutarum partium, momenta respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; adeoque & omnes omnium; sive quæ totam $A\tau$, sive quæ ipsius partem Ab spectant. Hoc est, Tota $A\alpha\tau\upsilon$, totius $A\tau$ curvæ; ejusque pars $ABb\upsilon$, partis Ab; momentum respectu rectæ $A\alpha$ fig. 177. exhibebunt; vel correspondentem Ungulam Semiquadrantalem.

Sunt utique rectæ Bb, trilineum $A\alpha\tau$ fig. 182. complentes; hoc est, rectæ Bb fig 177. ut arcus chordarum in semicirculo, vel sinuum rectorum in Quadrante, arithmetice proportionalium; hoc est, ut rectæ γo fig. 170, complentes trilineum $\alpha\kappa\Gamma$; (quod est, figuræ sinuum rectorum unius quadrantis $\alpha\kappa\delta$, complementum ad parallelogrammum)

Quippe sumptis $\alpha\gamma$, seu ξo, sinibus rectis arithmetice proportionalibus; erunt, quæ his respondent, γo, seu $\alpha\xi$, eorundem arcubus æquales: quorum duplis, æquantur, chordarum in semicirculo respondentium arcus; seu rectæ Bb, fig. 182. Puta, rectis γo complentibus $A\kappa\alpha$ trilineum fig. 183. ipsi $\alpha\kappa\Gamma$ fig. 170. simile. Neque aliter differt trilineum $A\tau\alpha$ fig 182. ab $A\alpha\kappa$ fig. 183. quam quod (retentis eisdem latitudinibus $bB = \gamma o$) altitudinem duplum habeat, nempe $A\tau = 2A\alpha$. Adeoque cum trilineo $\alpha\kappa\Gamma$, fig. 170. comparatum, latitudinem habet duplam ($bB = 2\gamma o$) altitudinem quadruplam, $A\tau = 4\alpha\Gamma$. Cum itaque Latitudo Dupla sit, & Altitudo Quadrupla; Figura figuræ est Octupla: Nempe $A\tau\alpha$ fig. 182. $= 8\alpha\Gamma\kappa$ fig. 170. Et $ABb = 8\alpha o\gamma$; similiter divisis $A\tau$ in b, & $\alpha\Gamma$ in γ.

Est autem $\alpha\delta\kappa\Gamma = \frac{1}{4}R\mathcal{P}$ (propter $\alpha\delta = \frac{1}{4}P$, & $\alpha\Gamma = R$;) & $\alpha\kappa\delta = R^2$, (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha\kappa\Gamma = \frac{1}{4}RP - R^2$. Adeoque $A\alpha\tau$ (fig. 182.) $= 2RP - 8R^2$.

Similiter, (in partibus,) $\alpha\xi o\gamma = as$, (positis $\alpha\xi = a$; &

$\xi o = s$;) & $\alpha o \xi = vR$ (per § Q. prop. 17.) ergo $\alpha o \gamma = as - vR$. Adeoque A B b (fig. 182.) $= 8as - 8vR$, Hoc est, Octuplum facti ex s semisubtensa, seu sinu semiarcus, in ejusdem sinus arcum, seu semiarcum subtensæ; minus, octuplo sinus versi ejusdem semiarcûs, in Radium ducti. Hoc est (fig. 179.) 8 A N × A M − 8 M N × N C: Hoc est, 2 A N B × A M B − 8 M N × N C: Hoc est (propter M N $=$ C N $- \frac{1}{2} \alpha$ B) 2 A N B × A M B − 8 N C × N C + 4 α B × N C: Hoc est (positis A N B $= a$, A M B $= c$, αB $= \chi$, & N C $= R$,) $2ac - 8R^2 + 4\chi R$. Fig. 177, 182, 183.

Deinde; rectæ b v fig. 182. (Bilineum A τv complentes,) hoc est B V fig. 177. (sumptis AB $= c$, adeoque & Ab $= 2c$, arithmetice proportionalibus,) sunt sinus recti Arcuum quorum subtensæ sunt arithmetice proportionales. Est autem (propter similia Triangula fig. 177.) ut A $\alpha = 2R$ ad A B $= c$; sic α B $= \surd : 4R^2 - c^2 : = \chi$, ad BV $= s = \frac{c\surd : 4R^2 - c^2 :}{2R} = \frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omnes b v complentes vel totam A τv, vel ipsius partem A b v, sunt Omnia $\frac{c\surd : 4R^2 - c^2 :}{2R}$ vel $\frac{c\chi}{2R}$, eo spectantia; sumptis c arithmetice proportionalibus. Quarum aggregatum sic colligitur.

Si intelligatur A α Q (fig 183.) Circuli quadrans; qui Radium habeat A $\alpha = 2R$ æqualem circuli genitoris Diametro; in quo sumantur A $\gamma = c$ arithmetice proportionales; rectæque γ q, ipsi A Q parallelæ. Erit ubique γ q $= \surd : 4R^2 - c^2 : = \chi$. (Nam quadratum q A, hoc est A α, dempto quadrato A γ, æquatur quadrato γ q.) Adeoque Omnes γ q, sive quæ totam A α Q quadrantem, sive quæ ipsius partem A γ q Q complent, sunt Omnes $\surd : 4R^2 - c^2$: (seu omnes χ) eo spectantes. Cumque harum ab A Q distantia sit A $\gamma = c$ respective: Erunt Omnia $c\surd : 2R^2 - c^2$: (seu Omn. $c\chi$,) idem atque istius A α Q quadrantis, ejusve A γ q Q segmenti, momentum respectu A Q rectæ.

Quadrantis autem A α Q, si poneretur radius $= R$, momentum respectu A Q, esset $\frac{1}{3}R^3$ (per § Q. prop. 15.) ergo, posito radio A$\alpha = 2R$, erit $\frac{8}{3}R^3$: Quod itaque est aggregatum omnium $c\surd : 4R^2 - c^2$: eo spectantium. Adeoque $\frac{4}{3}R^2 = Omn. \frac{c\surd : 4R^2 - c^2 :}{2R}$ ipsum A αv Bilineum fig. 183. (sumptis ubique, ut A α ad A γ, sic γ q ad τv.) Ejusque duplum (propter duplam altitudinem) $\frac{8}{3}R^2$, est Bilineum A τv fig. 182. Quod ab A αv fig. 183. non aliter differt,

Fig. 177, 182, 183. differt, quam quod (retentis eisdem latitudinibus respectivis $b\,\upsilon = \gamma\,\upsilon$) altitudinem duplam habeat, $A\,\tau = 2\,A\,\alpha$.

Item, Sectoris q A Q, momentum respectu A Q, posito Radio $= R$, esset (per § Q. prop. 15.) $\frac{1}{3}vR^2$; hoc est, Triens facti ex arcus sinu verso in quadratum Radii; hoc est, in præsenti casu, ex $QV = AQ - \gamma q = 2R - \sqrt{:4R^2 - c^2:} = 2R - \chi$, in quadratum $A\alpha, = 4R^2$: Hoc est, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} = \frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2$. Cui si addatur Momentum (respectu ejusdem A Q) Trianguli $A q \gamma$; hoc est (propter $\gamma q = \sqrt{:4R^2 - c^2:} = \chi$, & $A\gamma = c$; centrique gravitatis ab A Q distantiam $\frac{1}{3}c$;) $\frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} = \frac{1}{3}c^2\chi$. Habetur totius $A\gamma q Q$ momentum respectu A Q, $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}R^2\sqrt{:4R^2 - c^2:} + \frac{1}{3}c^2\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ vel $\frac{8}{3}R^3 - \frac{4}{3}\chi R^2 + \frac{1}{3}\chi c^2$: Hoc est (propter $4R^2 - c^2 = \chi^2$,) $\frac{8}{3}R^3 - \frac{1}{3}\chi^3$. Quod itaque est Omnium $c\sqrt{:4R^2 - c^2:}$ eo spectantium aggregatum: Adeoque $\frac{4}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{6R} = Omn. \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$ est ipsum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. Ejusque duplum $\frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, (propter duplam altitudinem) est ipsum $A b \upsilon$ fig. 182.

Est itaque (propter $A\alpha\tau = 2RP - 8R^2$, & $A\tau\upsilon = \frac{8}{3}R^2$,) totum $A\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. $= 2RP - \frac{16}{3}R^2$. Quod itaque est curvæ Semicycloidis $A\tau$ fig. 177. momentum respectu rectæ $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens aciem habens $A\alpha$. (Adeoque superficies curva ejusdem circa $A\alpha$ conversione descripta, $2P^2 - \frac{16}{3}RP$; &, semiconversione, $P^2 - \frac{8}{3}RP$.) Illudque curvæ $A\tau$ momentum, per magnitudinem $(4R)$ divisum; exhibet ejusdem $A\tau$ curvæ distantiam centri gravitatis ab $A\alpha$, $\frac{1}{2}P - \frac{4}{3}R$: Adeoque à $T\tau$, $\frac{4}{3}R$, tantundem scilicet quantum à $\tau\alpha$ (§ D.) atque tantundem est ejusdem respectu utriusvis Momentum, nempe $\frac{16}{3}R^2$; & æquales utrobique superficies conversione exhibet, $\frac{16}{3}RP$; & semiconversione $\frac{8}{3}RP$.

Item (propter $A b B = 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; & $A b\upsilon = \frac{8}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$,) totum $ABb\upsilon$ fig. 182. $= 2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{\chi^3}{3R}$; vel (propter $\chi^2 = 2hR$; cum sint αA, αB, αV; hoc est, $2R, \chi, h$, continue proportionales;) $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}h\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$. Quod itaque, est ipsius Ab curvæ momentum respectu $A\alpha$; vel Semiquadrantalis Ungula eidem insistens,

inſiſtens, aciem habens A α. (Adeoque ſuperficies curva ejuſdem circa Fig. 177,
Aα converſione facta, $\frac{2acP}{R} - \frac{16}{3}RP + (\frac{8}{3}\chi P + \frac{2v\chi P}{3R} =)$ 182,
$\frac{4}{3}\chi P - \frac{2b\chi P}{3R}$: Et, ſemiconverſione facta, hujus ſemiſſis.) 183.
Illudque momentum, per magnitudinem ($2c$) diviſum; exhibet, ejuſdem A b curvæ, diſtantiam centri gravitatis ab A α, $a - \frac{8R^2}{3c} + \frac{2\chi R}{c} - \frac{b\chi}{3c} = a - \frac{8R^2 + b\chi - 6\chi R}{3c}$.

Deinde; (Diviſâ ut prius A τ, curvâ fig. 177, 180. in minutas partes æquales:) Cum quæ ſingulis b punctis (ſeu minutis particulis) inſiſtunt, ſemiquadrantalem ungulam, cujus acies T A, complentes, ſint (per § F.) $\frac{c^2}{2R}$; ſintque illarum ab A α diſtantiæ (per § G.) $a + s$; erunt ſingularum momenta $\frac{a+s}{2R}c^2 = \frac{f}{2R}c^2$, (ſumptis c arithmetice proportionalibus.) Adeoque momentum ſimul omnium, (ſive quæ totam A τ, ſive quæ partem A b ſpectant,) eſt Aggregatum omnium $\frac{fc^2}{2R}$ eo ſpectantium; hoc eſt, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R} + \frac{sc^2}{2R}$. H. Fig. 177, 180.

Sunt autem *Omnes* a (ſumptis c arithmetice proportionalibus) æquales reſpectivis rectis b B fig. 182. vel γo fig. 183. (ut § G. oſtenſum eſt) harumque ab A δ diſtantiæ ſunt ipſæ A $\gamma = c$ reſpectivæ; adeoque quæ illis inſiſtunt plana Ungulam Semiquadrantalem complentia (aciem habentem A δ) ſunt *Omn.* ac: Horumque planorum ab A δ diſtantiæ ſunt itidem A$\gamma = c$: Ergo eorum omnium momenta ſunt *Omn.* ac^2. Fig. 179, 182. 183.

Sunt itaque *Omnia* ac^2 eo ſpectantia, idem atque Momentum Ungulæ Semiquadrantalis A $\kappa\alpha$, vel A $o\gamma$, (aciem habentis A δ,) reſpectu ipſius A δ. Hoc eſt, *Sexdecuplum* momenti ſimilis Ungulæ $\alpha\kappa\Gamma$, vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. (aciem habentis $\alpha\delta$,) reſpectu ipſius $\alpha\delta$. Nempe in ratione *Quadruplicata* laterum homologorum, Aα ad $\alpha\Gamma$, (quæ dupla eſt;) propter tum ſingulas trium ſolidi dimenſionum, tum diſtantiam ab axe converſionis; Duplas in A $\kappa\alpha$, earum quæ in $\alpha\kappa\Gamma$.

Fig. 170, 182, 183. Est autem Momentum Ungulæ $\alpha \varkappa \Gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha \delta$, idem atque Momentum Ungulæ $\alpha \delta \varkappa \Gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha \varkappa \delta$ respectu communis aciei $\alpha \delta$. Hoc est, $\frac{1}{12} R^3 P$ (propter $\alpha \Gamma = R$, & $\alpha \delta = \frac{1}{4} P$,) dempto $\frac{2}{9} R^4$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{12} R^3 P - \frac{2}{9} R^4$. Adeoque Momentum similis Ungulæ A $\varkappa$ α fig. 183. respectu aciei A δ, (utpote illius Sedecuplum) $\frac{4}{3} R^3 P - \frac{32}{9} R^4$. Quod itaque est aggregatum omnium ac^2 totam A α fig. 183. spectantium. Adeoque $\frac{2}{3} R^2 P - \frac{16}{9} R^3$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter A τ fig. 182. = 2 A α, fig. 183.) ejusdem duplum $\frac{4}{3} R^2 P - \frac{32}{9} R^3$ est aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, spectantium A τ rectam fig. 182. curvamve A τ fig. 177.

Item Momentum Ungulæ $\alpha o \gamma$ fig. 170. respectu aciei suæ $\alpha \xi$; idem est atque Momentum Ungulæ $\alpha \xi o \gamma$, dempto momento Ungulæ $\alpha o \xi$, respectu communis aciei $\alpha \xi$. Hoc est, $\frac{1}{3} a s^3$ (positis $\alpha \xi = a$, & $\alpha \gamma = \xi o = s$,) dempto $\frac{1}{9} v^2 R^2 + \frac{1}{9} s^2 v R$ (per § N. prop. 19.) Hoc est, $\frac{1}{3} a s^3 - \frac{1}{9} v^2 R^2 - \frac{1}{9} s^2 v R$; (sumptis s, pro semisubtensa, seu sinu dimidii arcus; & a, v, pro illo arcu dimidio ejusque sinu verso; hoc est, $a =$ AN, $s =$ AM, $v =$ MN, fig. 179. Adeoque Momentum similis Ungulæ A $o \gamma$ fig. 183. (utpote illius sexdecuplum,) $\frac{16}{3} a s^3 - \frac{16}{9} v^2 R^2 - \frac{16}{9} s^2 v R$ (sumptis a, s, v, eodem sensu;) Hoc est (sumptis $a =$ ANB, $c = 2s =$ AMB, $v =$ MN $=$ CN $-$ CM $=$ CN $- \frac{1}{2} \alpha$B $= R - \frac{1}{2} \chi$, adeoque & $v^2 = R^2 - \chi R + \frac{1}{4} \chi^2 = R^2 - \chi R + R^2 - \frac{1}{4} c^2 = 2R^2 - \chi R - \frac{1}{4} c^2$;) $\frac{1}{3} a c^3 - \frac{32}{9} R^4 + \frac{16}{9} \chi R^3 + \frac{4}{9} c^2 R^2 - \frac{4}{9} c^2 R^2 + \frac{2}{9} c^2 \chi R$, $= \frac{1}{3} a c^3 - \frac{32}{9} R^4 + \frac{16}{9} \chi R^3 + \frac{2}{9} c^2 \chi R$. Quod itaque est aggregatum *Omnium* ac^2 rectam A γ spectantium. Adeoque $\frac{ac^3}{6R} - \frac{16}{9} R^3 + \frac{8}{9} \chi R^2 + \frac{1}{9} c^2 \chi$, aggregatum *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, eo spectantium. Et (propter A γ fig. 182. figuræ altitudinem, duplam altitudinis A α fig. 183.) ejusdem duplum, nempe $\frac{ac^3}{3R} - \frac{32}{9} R^3 + \frac{16}{9} \chi R^2 + \frac{2}{9} c^2 \chi$, est aggregatum *Omnium* $\frac{ac^2}{2R}$, rectam A b fig. 182, curvamque A b fig. 177. spectantium.

Insuper Omnes s (sumptis c arithmetice proportionalibus) sunt idem atque omnes b v fig 182. seu duplum *Omnium* $s = \gamma v$ fig 183. ut § G. ostensum

ostensum est.) Sed Omn. s (= Omn. γv) sunt Omn. $\frac{c\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$ Fig. 177, 180, 182, 183.

seu Omn. $\frac{c\chi}{2R}$. Adeoque Omn. sc, (seu ipsius $A\alpha v$, vel $A\gamma v$, momentum respectu AQ, vel correspondens Ungula) sunt Omn. $\frac{c^2\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$ (Idem atque Ungulæ AQqα vel AQqγ, aciem habentis AQ, momentum respectu AQ, per $2R$ divisum:) Et Omn. sc^2; (hoc est, momentum Ungulæ $A\alpha v$, vel $A\gamma v$, fig. 183. aciem habentis AQ, respectu ejusdem AQ,) sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{2R}$ seu Omn. $\frac{c^3\chi}{2R}$. Et propterea Omn. $\frac{sc^2}{2R}$, sunt Omn. $\frac{c^3\sqrt{:4R-c^2:}}{4R^2}$, seu Omn. $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Sunt autem Omnes $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ seu Omnes χ; (sumptis c arithmetice proportionalibus,) sigillatim æquales rectis γq, complentibus quadrantem AαQ fig. 183. (per § G.) Quibus æquales intelligantur rectæ γq quadrantem AαQ fig. 184. similiter complentes. Cui adjacere intelligatur Semiparaboloidis Cubicalis complementum APα, quadrato AαPD inscriptum; verticem habens A. Cujus itaque Paraboloideos Latus rectum erit $4R^2$ (quod utique in diametrum AD = $2R$, ductum, efficiat $8R^3$ Cubum ordinatim in Paraboloide applicatæ DP = $2R$;) per quod itaque $4R^2$, si dividatur rectæ DP = Aα = $2R$, cubus $8R^3$; habebitur Diameter in Paraboloide vel Ordinatim in Complemento applicata AD = αP $= \frac{8R^3}{4R^2} = 2R$: Et similiter, si per idem $4R^2$, dividatur, rectæ pd = Aγ = c, Cubus c^3; habebitur diameter in Paraboloide, vel ordinatim applicata in complemento Ad = γp $= \frac{c^3}{4R^2}$; & sic ubique. (Sunt utique Ordinatim-applicatæ in Semiparaboloidis hujus complemento, in diametrorum interceptarum complementi ratione triplicata, seu ut earum Cubi.) Fig. 184.

Cum itaque quæ quadrantem AαQ fig. 184. complent rectæ γq, sint ipsæ, $\chi = \sqrt{:4R^2-c^2:}$ quæque Semiparaboloideos Cubicalis complementum AαP, complent rectæ γp, sint ipsæ $\frac{c^3}{4R^2}$; quæ ex his fiunt rectangula, sunt ipsa $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ seu $\frac{c^3\chi}{4R^2}$.

Si

Fig. 177, 184. Si itaque intelligatur ex hujusmodi rectangulis compleri Solidum, ipsi A α Q quadranti incumbens, altitudinem habens, in singulis γ q rectis, æqualem respectivis rectis γ p; Solidum hoc integrum AαQ, ejusve segmentum A γ q; erit aggregatum omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ quæ vel totam A α, vel ipsius partem A γ, spectant. Vel etiam (quod eodem recidet) si intelligatur A α P complementi Semiparaboloidis planum, super circuli plano, in A α, ad angulos rectos erectum, moveri (invariato angulo) ab A α ad Q τ, motu suo describens solidum Prismaticum seu columnare, circuli plano incumbens, duobus Trilineis ipsi A α P similibus & æqualibus interjectum; quod secet Cylindri recti superficies arcui Q q α insistens, solidum inde abscindens A Q q α: Solidum sic abscissum, complebunt istiusmodi rectangula. Quippe γ p recta, sic mota, super γ q rectam describet q γ p rectangulum. Et sic ubique.

Idemque Solidum, alia adhuc complebunt plana, rectis κ q, (ipsi A α parallelis, & æqualiter ab invicem dissitis,) insistentia; ipsis A χ p respectivis similia & æqualia. Quippe, dum A α P, motu jam dicto latum, ad κ q pervenit, ejusdem pars A χ p, eidem κ q, insistens, plano solidi sic descripti, eidem κ q insistenti, congruit. Et sic ubique. Adeoque, Omnia A χ p plana, totidem κ q rectis insistentia totum A Q q α solidum complent.

Sumptis autem in A Q ($=2R$,) rectis A κ ($=c$) arithmetice proportionalibus; quæ his respondent κ q, sunt totidem $\sqrt{:4R^2-c^2:}$ hoc est, totidem χ. Ductisque q χ p (ipsi Q A parallelis,) rectæ in complemento Paraboloidis eisdem κ q, seu A χ, respondentes χ p, sunt totidem $\frac{\chi^3}{4R^2}$; (sunt utique in Paraboloidis cubicalis complemento, Ordinatim-applicatæ, in triplicata ratione diametrorum; puta, χ p recta, ad rectam α P, ut cubus A χ ad cubum A α; & sic ubique.) Adeoque A χ p d rectangulum, (utpote factum ex A χ $=$ κ q $=\chi$, in χ p $=\frac{\chi^3}{4R^2}$,) est $\frac{\chi^4}{4R^2}$; hoc est (propter $\chi=\sqrt{:4R^2-c^2:}$) $\frac{16R^4-8c^2R^2+c^4}{4R^2}$. Adeoque A χ p paraboloidis Cubicalis complementum (utpote ad circumscriptum parallelogrammum ut 1 ad 4, per prop. 6. hujus;) est $\frac{\chi^4}{16R^2}=$

16R⁴

$\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2}$. Et sic ubique. Adeoque omnia Aχp Trilinea, hoc est, Omnia κq plana, solidum complentia, sunt Omnia $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^4}$ eo spectantia; sive totum AQqα solidum spectemus, sive ipsius portionem aliquam ut AVqα. Fig. 177, 184.

Sunt autem (per prop. 1. hujus) si totum AQqα spectemus, (propter AQ $= 2R$,) *Omn.* $c^2, = \frac{8}{3}R^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{32}{5}R^5$. Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 :, = 32R^5 - \frac{64}{3}R^5 + \frac{32}{5}R^5 = \frac{256}{15}R^5$, & *Omn.* $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} : = \frac{16}{15}R^3$. Hoc est, Omnia $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{4R^2}$ seu Omnia $\frac{sc^2}{2R}$, rectam Aα fig. 184. vel planum A$\kappa\upsilon$ fig. 183. spectantia. Adeoque (propter Aτ fig. 182. $=$ 2Aα fig. 183.) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3$, erit Aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$ spectantium planum A$\tau\upsilon$, vel rectam Aτ fig. 182. vel curvam Aτ fig. 177.

Si vero solidi portionem AVqα spectemus; ut sit rectarum A$\kappa = c$, maxima AV $= \gamma$q $= X$; erunt (per eandem prop. 1. hujus) *Omn.* $c^2, = \frac{1}{3}X^3$; & *Omn.* $c^4, = \frac{1}{5}X^5$: Adeoque *Omn.* $16R^4 - 8c^2R^2 + c^4 : = 16XR^4 - \frac{8}{3}X^3R^2 + \frac{1}{5}X^5$ & *Omn.* $\frac{16R^4 - 8c^2R^2 + c^4}{16R^2} : = XR^2 - \frac{1}{6}X^3 + \frac{X^5}{80R^2}$.

Hoc autem AVqα solidum, ex solido AQq$\alpha = \frac{16}{15}R^3$ (modo reperto) subductum; relinquit solidum VqQ, $= \frac{16}{15}R^3 - XR^2 + \frac{1}{6}X^3 - \frac{X^5}{80R^2}$.

Huic vero VqQ solido; si addatur solidum AVqγ; hoc est (propter planum Vq $=$ Aγp $= \frac{C^4}{16R^2}$, & AV $= x$,) $\frac{xC^4}{16R^2}$ (posito A$\gamma = C$:) Habetur solidum AγqQ $= \frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{x^5}{80R^2}$: Hoc est, (propter $x^2 = 4R^2 - C^2$, adeoque $x^4 = 16R^4 - 8C^2R^2 + C^4$;) $\frac{16}{15}R^3 - xR^2 + \frac{2}{3}xR^2 - \frac{1}{6}xC^2 + \frac{xC^4}{16R^2} - \frac{1}{5}xR^2 + \frac{1}{10}xC^2 - \frac{xC^4}{80R^2} = \frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}xR^2$

Fig. 177, 184. $-\frac{4}{15}XC^2 + \frac{XC^4}{20R^2}$: Vel (restituto valore minuscularum, $A\gamma = c$, & $AV = \gamma q = \chi = \sqrt{:4R^2 - c^2:}$) $\frac{16}{15}R^3 - \frac{8}{15}\chi R^2 - \frac{4}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{20R^2}$. Quod itaque est aggregatum Omnium $\frac{c^3\sqrt{:4R^2-c^2:}}{4R^2}$ seu Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, rectam $A\gamma$ fig. 184. vel planum $A\gamma\upsilon$ fig. 183. spectantium. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2\,A\alpha$ fig. 183. & consequenter $Ab = 2\,A\gamma$;) hujus duplum, $\frac{32}{15}R^3 - \frac{16}{15}\chi R^2 - \frac{8}{15}c^2\chi + \frac{c^4\chi}{10R^2}$; aggregatum Omnium $\frac{sc^2}{2R}$, spectantium planum $Ab\upsilon$, vel rectam Ab fig. 182. vel curvam Ab fig. 177. vel (propter $c^2 = 4R^2 - \chi^2$,) $\frac{32}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$.

Fig. 177. Cum itaque sint, quæ totam $A\tau$ spectant, *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, $= \frac{4}{3}R^2P - \frac{32}{9}R^3$, (ut modò ostensum erat;) & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}$, $= \frac{32}{15}R^3$, (ut jam ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2$: $= \frac{4}{3}R^2P - \frac{64}{45}R^3$. Quod itaque (per modo demonstrata) est semiquadrantalis Ungulæ superficialis, toti $A\tau$ fig. 177. insistentis, aciem habentis AT, momentum respectu $A\alpha$; Aut etiam (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem,) aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu T A.

Hoc itaque Momentum, per Ungulæ $A\tau$, aciem habentis TA, magnitudinem $\frac{8}{3}R^2$ (§ D, F. ostensam,) divisum; exhibet ejusdem Centri gravitatis ab $A\alpha$ distantiam, $\frac{1}{2}P - \frac{8}{15}R$. (Eademque erit inde distantia centri gravitatis correspondentis superficiei conversione vel semiconversione circa T A factæ; eadem utique quæ superficialis Ungulæ: Momentorum vero ratio, eadem quæ magnitudinum; nempe ad illud Ungulæ, ut P vel $\frac{1}{2}P$ ad R. Et sic alibi; nempe quoties axis libræ est, ad axem conversionis, ad angulos rectos: Ut sæpius insinuatum est:) Adeoque ejusdem à $T\tau$ distantia, est $\frac{8}{15}R$; Ejusque propterea, respectu $T\tau$, momentum, $\frac{64}{45}R^3$.

Quod itidem est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $T\tau$, momentum respectu T A. Hoc itaque per magnitudinem (§ G. traditam) $\frac{16}{3}R^3$, divisum; exhibet hujus, à TA, distantiam centri gravitatis $\frac{4}{15}R$:

Adeoque

Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{26}{15}R$; ipsiusque respectu $\tau\alpha$ momentum, $\frac{416}{45}R^3$. Fig. 177.
Atque hoc itidem est Ungulæ A τ, aciem habentis $\tau\alpha$ momentum, respectu T τ. Quod itaque per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$, divisum; exhibet centri gravitatis à T τ distantiam, item $\frac{26}{15}R$: Adeoque ab A α, $\frac{1}{2}P-\frac{26}{15}R$; ejusque respectu A α momentum $\frac{8}{3}R^2P-\frac{416}{45}R^3$.

Idemque (quod modo dictum est) momentum $\frac{4}{3}R^2P-\frac{64}{45}R^3$, per Ungulæ A τ aciem habentis A α, magnitudinem, $2RP-\frac{16}{3}R^2$, (§ G. ostensum,) divisum; exhibet ejusdem distantiam centri grav. à TA, $\frac{30P-32R}{45P-120R}R$: Adeoque à $\tau\alpha$, $\frac{60P-208R}{45P-120R}R$. Et propterea ejusdem respectu $\tau\alpha$ Momentum $\frac{8}{3}R^2P-\frac{416}{45}R^3$.

Sed & hoc ipsum (propter Altitudinum & Distantiarum reciprocationem) est etiam Ungulæ A τ, aciem habentis $\tau\alpha$, momentum respectu A α. Per hujus itaque magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis ab A α, $\frac{1}{2}P-\frac{26}{15}R$. Ut modo dictum est.

Similiter; Cum quæ portionem A b spectant, sint *Omn.* $\frac{ac^2}{2R}$, $=\frac{ac^3}{3R}-\frac{32}{9}R^3+\frac{16}{9}\chi R^2+\frac{2}{9}c^2\chi$; & *Omn.* $\frac{sc^2}{2R}:=\frac{32}{15}R^3-\frac{16}{15}\chi R^2-\frac{2}{15}c^2\chi+\frac{c^4\chi}{10R^2}$; (ut modo ostensum est:) Erunt *Omn.* $\frac{a+s}{2R}c^2:=\frac{ac^3}{3R}-\frac{64}{45}R^3+\frac{32}{45}\chi R^2+\frac{4}{45}c^2\chi+\frac{c^4\chi}{10R^2}=\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{90R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b, aciem habentis T A, respectu A α; vel etiam (ob altitudinum & distantiarum reciprocationem) aciem habentis A α, Momentum respectu T A.

Hoc itaque Momentum; per Ungulæ A b, aciem habentis T A, magnitudinem $\frac{2}{3}cv$ (§ D, F. inventam) divisum; exhibet ejusdem ab A α distantiam centri gravitatis $\frac{ac^2}{2vR}-\frac{32R^3}{15cv}+\frac{16\chi R^2}{15cv}+\frac{2c\chi}{15v}+\frac{3c^3\chi}{20vR^2}$; vel (propter $2vR=c^2$,) $a-\frac{32R^3}{15cv}+\frac{16\chi R^2}{15cv}+\frac{2c\chi}{15v}+\frac{3c\chi}{10R}$: Hoc est, $\frac{30ac^3R-128R^5+64\chi R^4+8c^2\chi R^2+9c^4\chi}{60cvR^2=30c^3R}$.

Fig. 177. Idemque Momentum, per Ungulæ A b, aciem habentis A α, magnitudinem, $2ac - \frac{16}{3}R^2 + 4\chi R - \frac{2}{3}b\chi = 2ac - \frac{16}{3}R^2 + \frac{8}{3}\chi R + \frac{2}{3}v\chi$ (§ G. inventam) divisum; exhibet hujus distantiam centri gravitatis à T A,

$$\frac{30ac^3R - 128R^5 + 64\chi R^4 + 8c^2\chi R^2 + 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =) 30c^2\chi R.}$$

Adeoque à τ α, $$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Et à b V (subducendo ex A V = v ejusdem à T A distantiam,)

$$\frac{180acvR^2 - 480vR^4 + 240v\chi R^3 + 30c^2v\chi R - 30ac^3R + 128R^5 - 64\chi R^4 - 8c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R,}$$

vel (propter $2vR = c^2$,)

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{180acR^2 - 480R^4 + 240\chi R^3 + 30c^2\chi R.}$$

Et consequenter, ejusdem momentum respectu τ α, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{90R^2.}$$

Quod etiam (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est momentum Ungulæ A b aciem habentis τ α, respectu A α: Adeoque (momentum illud per hujus magnitudinem dividendo; hoc est, per $4cR - \frac{2}{3}cv$, ut § D, F. ostenditur,) hujus distantia centri gravitatis ab A α, est

$$\frac{360acR^3 - 30ac^3R - 832R^5 + 416\chi R^4 + 52c^2\chi R^2 - 9c^4\chi}{360cR^3 - (60cvR^2 =) 30c^3R.}$$

Similiter, ejusdem Ungulæ A b aciem habentis A α, momentum respectu b V, (magnitudine in distantiam ducta) erit

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{90R^2.}$$

Quod itaque (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) est etiam Momentum Ungulæ A b aciem habentis b V, respectu A α.

$A\alpha$. Adeoque (per magnitudinem $\frac{4}{3}cv$, § D, F. inventam, dividendo;) erit hujus distantia centri gravitatis ab $A\alpha$,

$$\frac{60ac^3R - 240c^2R^3 + 112c^2\chi R^2 + 6c^4\chi - 64\chi R^4 + 128R^5}{120cvR^2 = 60c^3R.}$$

Superest tandem, ut superficialis Ungulæ $A\tau$ vel Ab, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$ investigemus. I. Fig. 177, 182, 183, 170.

Divisâ itaque, ut prius, $A\tau$ in minutas partes æquales: Adeoque sumptis $Ab = 2c$ fig. 177, 182. arithmetice proportionalibus: Erit cujusque b puncti, seu partis minutæ, ab $A\alpha$ distantia, bBV fig. 177. hoc est $Bb\upsilon$ fig. 182. Adeoque omnes rectæ punctis b insistentes, Ungulam complentes, sunt totidem $Bb\upsilon$ rectæ, trilineum $A\alpha\tau\upsilon$ fig. 182. complentes; hoc est, bis Omnes $o\gamma\upsilon$ fig. 183. hoc est, totidem $a+s$, subtensis c arithmetice proportionalibus respondentes. Quæ itidem in $a+s$ distantiam ductæ, exhibent earum respectu $A\alpha$ momenta, totidem $a^2+2as+s^2$.

Sunt autem, Omnia a^2; seu omnia quadrata γo fig. 183. *Duplum* Semiquadrantalis Ungulæ, seu momenti trilinei $A\varkappa\alpha$, seu $Ao\gamma$, (prout vel totum vel pars consideratur,) respectu $A\alpha$ fig. 183. Hoc est (propter figuras similes $A\varkappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\varkappa\Gamma$ fig. 170.) *Sexdecuplum* momenti trilinei $\alpha\varkappa\Gamma$ vel $\alpha o\gamma$, fig. 170. respectu rectæ $\alpha\Gamma$, (nempe in triplicata ratione laterum Homologorum, $A\alpha = 2R$, ad $\alpha\Gamma = R$.)

Est autem, Momentum Trilinei $\alpha o\gamma$, fig. 170. hoc est, $\alpha\xi o\gamma - \xi o\alpha$, (respectu $\alpha\Gamma$,) $\frac{1}{2}a^2s$, minus, $-eR^2 + avR$; (per § O. prop. 19.) seu $\frac{1}{2}a^2s + eR^2 - avR$, hoc est $\frac{1}{2}a^2s + aR^2 - sR^2 - avR$, (posito $a = \alpha\xi$ fig. 170. pro arcu AN fig. 179. semisse arcus AB; adeoque $s = AM$, & $v = MN = CN - \frac{1}{2}\alpha B = R - \frac{1}{2}\chi$:) Adeoque Momentum trilinei $Ao\gamma$ fig. 183. (utpote istius Octuplum,) $4a^2s + 8aR^2 - 8sR^2 - 8avR$, (sumptis a, s, v, eodem sensu:) Hoc est, (posito $a = AB$, $= 2AN$; & $c = 2s$; & $R - \frac{1}{2}\chi = v$;) $\frac{1}{2}a^2c + 4aR^2 - 4cR^2 - 4aR^2 + 2a\chi R = \frac{1}{2}a^2c - 4cR^2 + 2a\chi R$: Adeoque Omnia a^2 eo spectantia (utpote momenti duplum) $a^2c - 8cR^2 + 4a\chi R$; hoc est Omnia quadrata γo fig. 183. Adeoque (propter $A\tau$ fig. 182. $= 2A\alpha$ fig. 183.) Omnia quadrata Bb fig. 182. seu *Omnia* a^2, (eo spectantia) $= 2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$. Et propterea, si totam $A\tau$ spectemus; (propter $a = \frac{1}{2}P$, $c = 2R$, & $\chi = 0$,) erit $RP^2 - 32R^3 = Omn.\, a^2$.

Item,

Fig. 177, 182, 183, 170.

Item, omnia s^2, hoc eſt, omnia quadrata $b\upsilon$ fig. 182. ſeu, bis Omnia quadrata $\gamma\upsilon$ fig. 183. Idem ſunt (propter $\gamma\upsilon = b\upsilon = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$) atque totidem $\frac{4c^2R^2 - c^4}{4R^2}$. Sunt autem (ſumptis c arithmetice proportionalibus, uſque ad maximam $C = AB$,) $Omn.\ c^2 := \frac{1}{3}C^3$; & $Omn.\ c^4 := \frac{1}{5}C^5$ (per prop. 1. hujus.) Ergo $Omn.\ \frac{4c^2R^2 - c^4}{4R^2} := Omn.\ c^2 - \frac{c^4}{4R^2} := \frac{1}{3}C^3 - \frac{C^5}{20R^2}$: Nempe Omnia quadrata $\gamma\upsilon$, ſeu Omn. s^2: fig. 183. Ergo (propter $A\tau = 2A\alpha$,) Omnia quadrata $b\upsilon$ fig. 182. $Omn.\ s^2 = \frac{2}{3}C^3 - \frac{C^5}{10R^2}$. Et propterea, ſi totam $A\tau$ ſpectemus, (propter $C = 2R$,) $Omn.\ s^2 := \frac{16}{3}R^3 - \frac{16}{5}R^3 = \frac{32}{15}R^3$.

Item, (propter $s = \frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$,) Omnia as, ſunt totidem $\frac{ac\sqrt{:4R^2 - c^2:}}{2R}$: Adeoque (propter $o\gamma = a$, & $q\gamma = \sqrt{:}4R^2 - c^2$: & $A\gamma = c$:) *Omnia* as; hoc eſt, Omnia Rectangula $o\gamma\upsilon$ fig. 183. ſunt Momentum, reſpectu $A\delta$, omnium $q\gamma\upsilon$ rectangulorum, (ſolidive ex his conflati,) per $2R$ diviſum. Hoc eſt (propter figuras ſimiles $A\kappa\alpha$ fig. 183. & $\alpha\kappa\Gamma$ ſeu $d\tau\delta$, fig. 170. item $AQq\alpha$ fig. 183. & $CDE\alpha$ fig. 169. rationemque laterum homologorum $A\alpha$ ad $\alpha\Gamma$, ut 2 ad 1;) *Sexdecuplum* Momenti (per $2R$ diviſi) ſolidi $\alpha o\gamma$ vel deg fig. 170. altitudines habentis reſpectivis $E\Sigma$ fig. 169. æquales, reſpectu rectarum $\alpha\delta$ vel dc.

Eſt autem portio ſolidi hujuſmodi $b\tau\beta$, ſeu $e\tau s$, $= \frac{1}{4}a^2R - \frac{1}{4}s^2R$, per § K. prop. 18. (poſito $\tau\epsilon = \alpha$;) Hoc eſt (poſito eg ſeu $\epsilon\delta = \xi$, adeoque $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$;) $\frac{1}{64}P^2R - \frac{1}{8}\xi PR + \frac{1}{4}\xi^2R - \frac{1}{4}s^2R$: Adeoque $d\tau\delta$ (propter $\xi = 0$, & $s = R$,) $= \frac{1}{64}P^2R - \frac{1}{4}R^3$. Et propterea $de\epsilon\delta$ ($d\tau\delta - e\tau s$) $= \frac{1}{8}\xi PR - \frac{1}{4}\xi^2R + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$. Unde ſi ſubducatur portio $e\epsilon\delta g$; hoc eſt, factum ex $eg = \xi$, in $E\Sigma\alpha$ (fig. 169.) hoc eſt, (per § F. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sh$ (poſito $\alpha = \tau\epsilon = \alpha E$, & $h = \alpha\Sigma = es$;) hoc eſt (poſito $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R - x$;) in $\frac{1}{8}PR - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sR + \frac{1}{2}sR - \frac{1}{2}sx$; hoc eſt, in $\frac{1}{8}PR - \frac{1}{2}\xi R - \frac{1}{2}sx$; Nempe, $\frac{1}{8}\xi PR - \frac{1}{2}\xi^2R - \frac{1}{2}\xi sx$: Relinquitur portio $deg = \frac{1}{4}\xi^2R + \frac{1}{2}\xi sx + \frac{1}{4}s^2R - \frac{1}{4}R^3$.

Et portionis ſolidi $b\tau\beta$ ſeu $e\tau\epsilon$, reſpectu $\tau\alpha$, momentum eſt, $\frac{1}{4}a^2R^2$

$\frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}hR^3 - \frac{1}{9}s^2hR$, per § Q. prop. 18. (posito Fig. 177,
$\tau\iota = \alpha$, & $\alpha\Sigma = h$;) Hoc est, (positis $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R$ 182,
$-x$,) $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{8}\xi PR^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{5}{36}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2R^2$ 183,
$+\frac{1}{9}s^2xR$; seu $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{8}\xi PR^2 + \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}R^4 + \frac{2}{9}xR^3$ 170.
$+\frac{1}{9}s^2xR$. Adeoque Momentum solidi $d\tau\delta$ (propter $\xi = 0$, & $x = 0$, & $s = R$,) $\frac{1}{64}P^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 - \frac{2}{9}R^4$, seu $\frac{1}{64}R^2P^2 - \frac{17}{36}R^4$. Et propterea, Momentum portionis $de\varepsilon\delta$ (respectu ejusdem $\tau\alpha$) est $\frac{1}{8}\xi PR^2 - \frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR$. Unde si auferatur momentum portionis $e\varepsilon\delta g$; hoc est, factum ex $eg = \xi$, in momentum segmenti semicirculi $E\Sigma\alpha$ (fig. 169.) respectu ipsius $\tau\alpha$; hoc est (per § L. prop. 15.) in $\frac{1}{2}\alpha R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}shR - \frac{1}{3}s^3$ (posito $\tau\iota = \alpha$, & $\alpha\Sigma = h$;) hoc est, (posito $\alpha = \frac{1}{4}P - \xi$, & $h = R - x$,) in $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sR^2 + \frac{1}{2}sR^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$, seu, in $\frac{1}{8}PR^2 - \frac{1}{2}\xi R^2 - \frac{1}{2}sxR - \frac{1}{3}s^3$; Nempe $\frac{1}{8}\xi R^2P - \frac{1}{2}\xi^2R^2 - \frac{1}{2}\xi sxR - \frac{1}{3}\xi s^3$: Relinquitur portionis deg, Momentum (respectu ejusdem $\tau\alpha$) $\frac{1}{4}\xi^2R^2 - \frac{1}{4}R^4 + \frac{1}{4}s^2R^2 - \frac{2}{9}xR^3 - \frac{1}{9}s^2xR + \frac{1}{2}\xi sxR + \frac{1}{3}\xi s^3$.

Hoc itaque, per magnitudinem, (modo inventam,) divisum; Fig. 170.
exhibet ipsius deg (portionis solidi) distantiam centri gravitatis à $\tau\alpha$,

$$\frac{9\xi^2R^2 - 9R^4 + 9s^2R^2 - 8xR^3 - 4s^2xR + 18\xi sxR + 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}$$

$$= R - \frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}$$: Adeoque à cd,

$$\frac{8xR^3 + 4s^2xR - 12\xi s^3}{9\xi^2R + 18\xi sx + 9s^2R - 9R^3}.$$ Quod in magnitudinem ductum, exhibet solidi deg momentum respectu cd, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}s^2xR - \frac{1}{3}\xi s^3$ (positis, $\xi = DE$ fig. 169. $= eg = o\gamma = \alpha\xi$ fig. 170. & $x = C\Sigma = \xi o = \alpha\gamma$; & $s = E\Sigma$;) Vel (substituto σ pro s, qui sit sinus arcus $B\alpha$ fig. 169. $= \beta\delta$ fig. 170.) momentum similis solidi $\alpha o\gamma$ respectu $\alpha\delta$, $\frac{2}{9}xR^3 + \frac{1}{9}\sigma^2xR - \frac{1}{3}\xi\sigma^3$.

Et consequenter; similis solidi $Ao\gamma$ fig. 183. (ex ductu recta- Fig. 182,
rum $o\gamma$ in γq respective) momentum respectu $A\delta$, (utpote prio- 183.
ris sexdecuplum, propter tum singulas dimensiones, tum distantiam, ut 2 ad 1,) $\frac{32}{9}xR^3 + \frac{16}{9}\sigma^2xR - \frac{16}{3}\xi\sigma^3$: Hoc est (posito $\iota = 2\xi$, propter arcum semicirculi duplum respectivi arcus in quadrante; & $c = 2x$, propter chordam arcus a, duplam sinus recti dimidii arcus; & $\chi = 2\sigma$, propter subtensam complementi arcus a ad semicirculum, duplum sinus complementi dimidii arcus ad quadrantem;) $\frac{16}{9}cR^3 + \frac{2}{9}\chi^2cR - \frac{1}{3}a\chi^3$: Hoc itaque per $2R$ divisum;

hoc

Fig. 177, 182, 183. hoc est, $\frac{8}{9}cR^2 + \frac{1}{9}c\chi^2 - \frac{a\chi^3}{6R}$; exhibet (ut jam ostensum est) aggregatum omnium as, seu rectangulorum $o\gamma v$ fig. 183. adeoque (propter $A\tau = 2 A\alpha$) hujus duplum, est aggregatum omnium as, seu rectangulorum $B b v$ fig. 182. Et propterea hujus duplum, seu illius quadruplum, $\frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R} =$ *Omn.* $2as$: fig. 182. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus (propter $c = 2R$, & $\chi = 0$) erunt (quæ eo spectant) *Omn.* $2as: = \frac{64}{9}R^3$.

Fig. 177. Ergo (propter *Omn.* $a^2: = 2a^2c - 16cR^2 + 8a\chi R$; & *Omn.* $s^2: = \frac{2}{3}c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$; & *Omn.* $2as: = \frac{32}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 - \frac{2a\chi^3}{3R}$; ut jam ostensum est:) *Omn.* $a^2 + 2as + s^2: = 2a^2c + \frac{2}{3}c^3 - \frac{112}{9}cR^2 + \frac{4}{9}c\chi^2 + 8a\chi R - \frac{2a\chi^3}{3R} - \frac{c^5}{10R^2}$. Quod itaque est Momentum Ungulæ A b fig. 177. aciem habentis $A\alpha$, respectu $A\alpha$: Hujusque Duplum (ut sæpius dictum) Superficiei semiconversione factæ momentum respectu axis conversionis $A\alpha$. Adeoque, si totam $A\tau$ spectemus, (propter $a = \frac{1}{2}P$, & $c = 2R$, & $\chi = 0$,) erunt *Omn.* $a^2 + s^2 + 2as: = P^2R + \frac{16}{3}R^3 - \frac{224}{9}R^3 - \frac{16}{5}R^3 = P^2R - \frac{1024}{45}R^3$. Quod itaque est Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $A\alpha$, momentum respectu $A\alpha$: Hujusque Duplum, est correspondentis superficiei semiconversione circa $A\alpha$ descriptæ momentum respectu ejusdem $A\alpha$.

Momento itaque per magnitudinem (§ G. inventam,) diviso; habetur Ungulæ A b, aciem habentis $A\alpha$, distantia centri gravitatis ab ipsa $A\alpha$,

$$\frac{180a^2cR^2 + 60c^3R^2 - 1120cR^4 + 40c\chi^2R^2 + 720a\chi R^3 - 60a\chi^3R - 9c^5}{180acR^2 - 48cR^4 + 240\chi R^3 + (60v\chi R^2 =)\ 30c^2\chi R};$$

& superficiei semiconversione circa $A\alpha$ factæ, distantia centri gravitatis à conversionis axe $A\alpha$, erit ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P; ut alibi: Nempe quoties idem est Axis Conversionis & Axis Libræ.

Totiusque $A\tau$ Ungulæ, aciem eandem $A\alpha$ habentis, distantia ab $A\alpha$, similiter habebitur, $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; (& superficiei semiconversione factæ, ad hanc Ungulæ, ut $4R$ ad P;) Ungulæque propterea distantia centri gravitatis à $T\tau$, $\frac{1}{2}P -$

45 P^2

$\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R} = \frac{1024R^2 - 120RP}{90P - 240R} = \frac{512R - 60P}{45P - 120R}R$. Et propterea, ejusdem respectu $T\tau$ momentum $\frac{1024R^3 - 120R^2P}{45} = \frac{1024}{45}R^3 - \frac{8}{3}R^2P$. Quod itidem est (propter altitudinum & distantiarum reciprocationem) Momentum Ungulæ $A\tau$, aciem habentis $T\tau$, respectu $A\alpha$. Adeoque, per hujus magnitudinem $\frac{16}{3}R^2$ (per § G.) divisum; exhibet hujus, ab $A\alpha$, distantiam centri gravitatis, $\frac{64}{15}R - \frac{1}{2}P$: &, ab acie sua $T\tau$, $P - \frac{64}{15}R$: & propterea momentum respectu aciei suæ $T\tau$, $\frac{16}{3}R^2P - \frac{1024}{45}R^3$. Fig. 177.

His ita peractis; ea quæ jam exhibuimus (§ G, H, I.) divisâ $A\tau$ curvâ in partes æquales; adeóque sumptis subtensis $AB = c$, arithmetice proportionalibus; non erit inutile, aliquatenus prosequi secundum alteram methodum (qua § B, C, D, E, usi sumus,) divisâ $A\alpha$ in partes æquales; adeoque sumptis sinibus versis $AV = v$ arithmetice proportionalibus. K. Fig. 177.

Si itaque intelligatur recta $A\alpha$ fig. 177. in exiguas partes æquales numero infinitas dividi; quarum una intelligatur $VO = B$: Quæ his respondent bg tangentes, seu (quod in partibus infinite exiguis pro eodem reputabitur) bx curvæ, sunt ut totidem $V\omega = B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $\frac{B\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$, (per § B, C.) Harumque ab $A\alpha$ distantiæ, sunt $bV = a + s$, (sinibus versis arithmetice proportionalibus respondentes,) ipsam $A\tau\alpha$ semicycloidem complentes, (vel etiam, tum figuram Arcuum $A\tau\alpha$ fig. 170, 185. tum semicirculum $AB\alpha$ fig. 169, 185. complentes; quippe illam complent *omnes a*; semicirculum, *omnes s*.) Adeoque particularum curvæ $A\tau$ fig. 177. momenta respectu $A\alpha$; sunt ut totidem rectangula $bV\omega$ fig. 177. hoc est totidem $\frac{a+s}{\sqrt{v}}B\sqrt{2R}$; seu totidem $bV\omega + BV\omega$ fig. 185. hoc est, totidem $\frac{aB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}} + \frac{sB\sqrt{2R}}{\sqrt{v}}$; vel (omissa B, quæ nonnisi infinitesimam partem ipsius $A\alpha$ significat, seu rectarum crassitiem planum complentium,) totidem $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R} + \frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$.

Fig. 177. Et quidem, Aggregatum *omnium* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{:2R}$ facile habetur: Cum enim sit $s^2 = vh$, adeoque $s = \sqrt{vh}$, erit $\frac{s}{\sqrt{v}} = \sqrt{h}$; & *Omnes* $\frac{s}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, idem atque *Omnes* $\sqrt{:2hR}$, hoc est ipsæ π V, fig. 179. Adeoque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$ curvam A b fig. 177. spectantes æquantur ipsi portioni parabolæ A Π π V fig. 179. hoc est, $\frac{4}{3}R^2 - \frac{2}{3}h\sqrt{:2hR}$, per prop. 6. hujus. Quod (propter $2hR = \chi^2$, & $h = \frac{\chi^2}{2R}$,) tantundem est atque $\frac{4}{3}R^2 - \frac{\chi^3}{3R}$, in §G. repertum, seu *Omnes* s, (vel *Omn.* $\frac{c\sqrt{:4R^2 - c^2}}{2R}$,) sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus. Nempe Π A V π fig. 179. = A b υ fig. 182. (similiter divisis A τ, A τ, fig. 177, 182. in punctis b;) Hoc est, *Omn.* s, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $s\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis A V $= v$ arithmetice proportionalibus. Utrumvis enim est ipsius A b momentum, quantum ad distantias B V.

At, *Omnia* $\frac{a}{\sqrt{v}}\sqrt{2R}$, seu *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; puta solidum A b V ω fig. 185. (ex rectangulis b V ω conflatum) per B, hoc est α O, vel V O, divisum; tantundem est atque planum A b B fig. 182. seu *Omn.* a, sumptis A b $= 2c$ arithmetice proportionalibus: (Utrumvis utique est momentum A b fig. 177. quantum ad distantias b B.) Adeoque cum horum aggregatum deprehensum est (§G.) $= 2ac - 8R^2 + 4\chi R$; tantundem erit & Aggregatum *Omn.* $a\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis A b $= v$, arithmetice proportionalibus. Quod quum ibidem deprehensum sit, non opus erit ut hic solicite investigemus. Atque hinc reliqua deducentur, ut ad § G.

Sed & idem solidum A b V ω fig. 185. (quod complent omnia b V ω rectangula, seu Omnia $aB\sqrt{\frac{2R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;

portionalibus;) complent etiam alia plana rectis x r (æqualiter ab invicem distantibus) trilineum A b V complentibus insistentia, hoc est, totidem rectis, q r — q x. Sunt autem quæ singulis b K, seu q r insistunt plana solidum complentia, respectivis A V $\omega\,\omega$ æqualia; (ut ex constructione figuræ patet, si intelligatur A α O ω planum, super plano A $\tau\,\alpha$ ad angulos rectos erectum, motu suo versus τ, solidum describere.) Adeoque omnia q r plana; tantundem sunt atque, b V $= a$, in planum A V $\omega\,\omega$; hoc est, in duplum rectanguli A V ω; hoc est (per § B, C.) in $2\,v \times B\sqrt{\frac{2\,R}{v}} = 2\,B\sqrt{2vR}$; hoc est $2\,AV \times B\sqrt{\frac{2\,R}{V}}$ (posito A K $= A$, & A V $= V$;) seu $2\,A \times B\sqrt{2VR}$; seu bVp rectangulum, in altitudinem $2\,B$ ductum; vel Duplum rectanguli b V p, in B ductum. Et, eadem ratione, Omnia x q plana; sunt totidem A o ω planis æqualia; hoc est, totidem $2\,v \times B\sqrt{\frac{2\,R}{v}}$, seu $2\,B\sqrt{2\,v\,R}$, (sumptis a arithmetice proportionalibus,) usque ad maximum $V =$ b K. Adeoque $2\,A\,B\sqrt{2VR}$, demptis *Omn.* $2\,B\sqrt{2\,v\,R}$, sumptis a arithmetice proportionalibus; idem est atque *Omn.* $a\,B\sqrt{\frac{2\,R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus. (Nempe idem solidum A b V:) Et (dividendo per B,) $2\,A\sqrt{2\,V\,R}$ — *Omn.* $2\sqrt{2\,v\,R}$: sumptis a arithmetice proportionalibus; idem atque *Omn.* $a\sqrt{\frac{2\,R}{v}}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; seu *Omn.* a, sumptis A b $= 2\,c$ arithmetice proportionalibus; hoc est, Trilineum A b B fig. 182. Fig. 177, 185.

Poteſtque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis ipsi A b V parallelis conflatum. Et sic alibi.

Similiter; Divisâ, ut prius, A α in minutas partes æquales; cum quæ his respondent particularum b x momenta respectu A α, fig. 177. seu Ungulæ (aciem habentis A α) particulæ, sint (ut dictum est) ut totidem $\frac{a + s}{\sqrt{v}}\sqrt{2\,R}$, seu $a\sqrt{\frac{2\,R}{v}} + s\sqrt{\frac{2\,R}{v}}$; sintque ipsarum à T A distantiæ, A V $= v$ respectivæ; erit omnium respectu T A momentum, totidem $a\sqrt{2\,v\,R} + s\sqrt{2\,v\,R}$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem aggregatum *Omn.* $s\sqrt{2\,v\,R}$, (hoc est, omnium rectan-

 gulorum

gulorum BVp fig. 185.) facile habetur. Cum enim sint $Omn.\ s\sqrt{\frac{2R}{v}}$,
Fig. 179. idem atque totidem π V fig. 179. erunt $Omn.\ s\sqrt{:vR}$, hoc est $Omn.\ v\,s\sqrt{\frac{2R}{v}}$; vel etiam (propter $s = \sqrt{2h}$,) $Omn.\ v\sqrt{:hR}$; idem atque earundem π V momenta respectu ΠA rectæ. Est autem (per prop. ... hujus, (semiparabolæ α ΠA distantia centri gravitatis ab απ, $\frac{3}{5}\alpha A = \frac{6}{5}R$; adeoque ab AT, $\frac{4}{5}R$; & (propter magnitudinem $\frac{4}{3}R^2$) momentum ejus respectu AT, $\frac{16}{15}R^3$. Et semiparabolæ απV, distantia centri gravitatis ab απ, $\frac{3}{5}\pi V - \frac{3}{5}h$; adeoque ab AT, $2R - \frac{3}{5}h$; & (propter magnitudinem $\frac{2}{3}h\sqrt{:hR}$,) momentum respectu AT, $\frac{4}{3}hR\sqrt{:hR} - \frac{2}{5}h^2\sqrt{2hR}$. Ergo (subductione factâ) Momentum portionis ΠAVπ respectu TA, est $\frac{16}{15}R^3 - \frac{4}{3}hR\sqrt{2bR} + \frac{2}{5}h^2\sqrt{:hR}$. Hoc est (propter $2hR = \chi^2$, & $\sqrt{:hR} = \chi$, & $h = \frac{\chi^2}{2R}$,) $\frac{16}{15}R^3 - \frac{2}{3}\chi^3 + \frac{\chi^5}{10R^2}$. Tantundem scilicet atque $Omn.\ \frac{sc^2}{2R}$, sumptis Ab = 2c arithmetice proportionalibus; ut § H. ostensum est.

Fig. 177, 185. Suntque $Omn.\ a\sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice proportionalibus; (hoc est, omnia rectangula bVp fig. 185.) idem atque $Omn.\ \frac{ac^2}{2R}$, sumptis Ab = 2c arithmetice proportionalibus. (Utrumvis utique est Ungulæ Ab fig. 177. quantum ad altitudines bB, momentum respectu TA; ungulæve Ab aciem habentis TA momentum quantum ad distantias bB.) Quod § H. deprehendimus $\frac{ac^3}{3R} - \frac{11}{5}R^3 + \frac{16}{9}\chi R^2 + \frac{2}{9}c^2\chi$. Atque hinc reliqua deducentur ut ad § H.

Sed & idem solidum AbVp fig 185. (quod complent omnia bVp rectangula, seu omnia $a\sqrt{2vR}$, sumptis v arithmetice proportionalibus;) complent etiam alia plana rectis xr insistentia; hoc est (ut ex constructione patebit, si intelligatur AαP semiparabola, ad angulos rectos erecta, & super Aατ plano mota, solidum describere,) totidem semiparabolæ AVp, demptis omnibus Aop, quarum altitudines Ao = qx sint sinus versi arcuum arithmetice proportionalium: Hoc est (posito AK = bV = A, & AV=V,) $\frac{2}{3}A\sqrt{2V^3R}$ demptis *omnibus* $\frac{2}{3}\sqrt{2v^3R}$, sumptis a arithmetice proportionalibus. Quod itaque tantundem etiam valet atque $Omn.\ \frac{ac^2}{2R}$, sumptis Ab = 2c arithmetice proportionalibus.

Po-

Potestque idem solidum (si opus est) considerari tanquam ex planis ipsi A b V parallelis conflatum: Ut ante monitum est.

Similiter; cum, divisâ ut prius $A\alpha$ in minutas partes æquales, M.
sint, quæ his respondent, curvæ $A\tau$ particulæ b x, ut totidem $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, ut ostensum est; erit Ungulæ aciem habentis $A\alpha$ momentum Fig. 177, 185.
respectu $A\alpha$, ut Omnia, $B\sqrt{\frac{2R}{v}}$, in respectiva quadrata b V, hoc est, in respectiva $a^2 + 2as + s^2$, sumptis v arithmetice proportionalibus. Hoc est (omisso B, ut prius,) $Omn.\, a^2\sqrt{\frac{2R}{v}} + 2as\sqrt{\frac{2R}{v}} + s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$; sumptis v arithmetice proportionalibus.

Et quidem Aggregatum *Omnium* $s^2\sqrt{\frac{2R}{v}}$, hoc est (propter $s^2 = vh$,) $Omn.\, s\sqrt{2hR}$; vel $Omn.\, vh\sqrt{\frac{2R}{v}}$, seu $Omn.\, h\sqrt{2vR}$; facile habetur. Est utique Semiparabolæ A p V fig. 178. Momentum respectu $P\alpha$ seu $\tau\alpha$. Hoc est (propter distantiam centri gravitatis a T A, $\frac{1}{3} AV = \frac{1}{5} v$; adeoque a $\tau\alpha$, $2R - \frac{1}{5} v$; & magnitudinem $\frac{2}{3} v\sqrt{2vR}$; per prop. 6. hujus;) $\frac{4}{3} vR\sqrt{2vR} - \frac{2}{5} v^2\sqrt{2vR}$. Hoc est (propter $2vR = c^2$, & $\sqrt{2vR} = c$, & $v = \frac{c^2}{2R}$,) $\frac{2}{3} c^3 - \frac{c^5}{10R^2}$. Tantundem scilicet atque Omn. s^2, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus; quod § I. repertum est.

Suntque $Omn.\, as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; hoc est (propter $s = \sqrt{vh}$;) $Omn.\, a\sqrt{2hR}$, idem atque solidum ex ductu rectarum b V fig. 185. (figuram Arcuum complentium) in respectivas πV fig. 179, 185. Adeoque $Omn.\, 2as\sqrt{\frac{2R}{v}}$; est istiusmodi solidi Duplum. Estque tantundem atque $Omn.\, 2as$, sumptis $Ab = 2c$ arithmetice proportionalibus. Quod § I. repertum est.

Potestque idem (si opus est) solidum considerari tanquam ex planis quæ rectis $x\tau$ insistant conflatum: Aut etiam ex planis ipsi A b V parallelis; ut in præcedentibus monitum est, atque alibi etiam intelligendum erit.

Et

Fig. 177, 185. Et *Omn.* $a^2 \sqrt{\frac{2R}{v}}$, (sumptis v arithmetice proportionalibus,) tantundem est atque *Omn.* a^2, sumptis A b = 2 c arithmetice proportionalibus; quod § I. itidem repertum est. (Est autem, idem atque solidum ex ductu quadratorum rectarum b V fig. 185. in respectivas V α, per V O divisas.) Atque hinc reliqua habentur quæ § I. traduntur.

Quodque, de eodem solido aliis adhuc planis (puta quæ rectis $x\tau$ insistant, vel ipsi A b V sint parallela,) conflando, in præcedentibus monitum est; etiam hic locum habet.

N. Exhibuimus itaque non modo rectas Cycloidem (Primariam intellige) tangentes; sed & ipsius Curvæ Semicycloidis, ejusque partium longitudinem, (exhibendo scilicet curvis illis æquales rectas,) ejusque in data ratione divisionem: Sed & curvæ semicycloidis, partiumque ipsius, centra gravitatis, (per horum scilicet à duabus saltem in eodem plano rectis, non invicem parallelis, distantiam;) earúmque momenta respectu expositarum aliquot rectarum, (quæ ad alias item rectas facile transferentur:) Ungularum item superficialium, & Superficierum conversione factarum, momentis illis respondentium, tum magnitudines, tum momenta, ipsaque Centra gravitatis; exhibitis scilicet horum distantiis à duobus saltem planis, plano Cycloidis ad angulos rectos, non invicem parallelis; dummodo etiam in quo tertio per Ungulæ aciem, seu axem conversionis plano situm sit, per § G. prop. 12. constet; eo nempe, per conversionis axem quod conversionis arcum bisecat; eoque per aciem Ungulæ, quod bisecat Ungulæ altitudinem; unde (per prop. 26. cap. præced.) ipsa gravitatis Centra determinantur. Quæque de expositis dicta sunt, ad alia transferentur; ut ad propositiones præcedentes aliquot ostensum est.

Atque de Cycloide primariâ, hactenus.

O. Fig. 176, 187, 188. Cycloides verò Secundarias quod attinet; *Protractam* scilicet & *Contractam*; (quarum illa quidem basin habet *Majorem*, Hæc *Minorem*, quam est Peripheria Circuli Generantis:) Differunt quidem illæ, à Primariâ, in hoc potissimum; quod recta $c\beta$ (curvis Semicycloidis, & Semicirculi Generantis circa Cycloidis axem constituti, interjectæ,) sint respectivis Arcubus β I (in protractâ) seu β E (in contractâ) non quidem Æquales, (ut, in primaria, b B rectæ Arcubus B A,) sed Proportionales; (Majores quidem in Pro-

Protractâ, Minores in Contractâ, & in eâ utrobique ratione, quam habet Cycloidis illius vel Semicycloidis Basis, ad Peripheriam vel Semiperipheriam Circuli generantis;) Æquales autem respectivis arcubus istius Circuli, cujus Peripheria vel Semiperipheria sit hujus Cycloidis vel Semicycloidis Basi æqualis. Puta, recta $\zeta\beta$ (fig. 176.) sive quæ Protractam $\tau\zeta$ I; sive quæ contractam $\tau\zeta$ E, spectat; æqualis rectæ b B, hoc est arcui B A, circuli A B α Genitoris primariæ τ b A; cujus utique Semiperipheria A B α, æquatur Semicycloidis suæ Basi $\tau\alpha$, (adeoque & ipsis $\tau\iota$, $\tau\epsilon$,) seu promotioni Centri c C. Sunt enim rectæ b B, $\zeta\beta$, fig. 176. (seu b B, $\beta\alpha$ fig. 166.) mensura distantiæ centri circuli Genitoris ab axe A α, dum respectiva puncta b (in Cycloide primaria,) seu ζ (in secundariis) motu circuli generantis designantur: (ut ex constructione patet.) Adeoque, dummodo æquales sint $\tau\alpha$, $\tau\iota$, $\tau\epsilon$, seu c C in omnibus eadem; æquales item erunt b B, $\zeta\beta$, utpote æqualium eædem partes vel proportionales. Fig. 176, 187, 188.

Quæ autem Cycloides secundarias ($\tau\zeta$ I protractam, vel contractam $\tau\zeta$ E,) in dato quovis puncto ζ, contingunt rectæ $\gamma\zeta\eta$, sic habentur. Semicirculo Genitori I $\beta\iota$ vel E $\beta\epsilon$, circa axem I ι, E ϵ, constituto; Concentricus fiat (circa idem C centrum) A B α, semiperipheriam habens A B α æqualem expositæ Semicycloidis basi $\tau\iota$, $\tau\epsilon$. Ductâque $\zeta\beta$ basi parallelâ (circulo genitori circa axem constituto occurrens in β, & semicycloidi suæ in ζ,) jungatur β C, peripheriæ A B α occurrens in B; (arcum B A, ipsi β I, vel β E, similem abscindens.) Atque à peripheriæ A B α puncto axis infimo α, ad peripheriæ genitoris punctum β, ducatur $\alpha\beta$ recta; & huic ad angulos rectos $\beta\Gamma$. Quæ huic parallela (per assignatum Semicycloidis punctum ζ) recta ducitur $\gamma\zeta\eta$, Semicycloidem illam in ζ contingit. (Excepto casu, de quo mox dicetur.)

Et quidem si intelligatur β punctum, in ipsis E, ϵ, I, ι; rectæ $\gamma\zeta\eta$ tangentes erunt ipsi c C, vel $\tau\alpha$ (Cycloidis primariæ Genitori A b α correspondentis basi) parallelæ.

In Cycloide autem Contracta E $\zeta\tau$, si β intelligatur in ipsa $\alpha\tau$, (ubi scilicet hæc peripheriam E $\beta\epsilon$ secat,) quæ huic respondet tangens $\gamma\zeta\eta$ est axi E ϵ parallela; si vero β sit alibi supra $\alpha\tau$, tangens $\gamma\zeta\eta$ (sicut & $\beta\Gamma$ recta) axi E ϵ, occurret supra E; sed infra ϵ, si β sit alibi infra $\alpha\tau$.

In Cycloide verò Protracta I $\zeta\tau$, si ita sumi intelligatur, in I $\beta\iota$ peripheria, punctum β, ut $\alpha\beta$ recta peripheriam illam in β tangat; quod huic respondet punctum ζ, (cum illud ipsum sit in quo Cyclois illa

illa recurvari incipit,) tangentem nullam habet, (sed quæ ipsam Tangere deberet, illam ibidem secat;) quæ vero supra hoc punctum sunt tangentes, exterius tangunt; quæ infra, interius: Axique I ι (continuato) occurrunt, illæ quidem supra I; hæ vero, supra ι; (saltem non infra:) Rectæque β Γ correspondentes, ipsi I ι axi occurrunt; illic quidem supra C centrum; hic, infra.

Fig. 175. Ipsæ autem Cycloidum harum Curvæ, Curvis semiellipsium æquantur: Et partes partibus respective sumptis. Puta, Cycloidis Contractæ Curva τ E τ, Fig 175. Semiellipseos curvæ æquatur, cujus Axium alter, quem quidem (sed, propter curvaturam, contractum,) repræsentat τ A τ curva, sit = 2 A α + A E, (cujus ordinatim-applicatæ sint ipsæ b c;) alter vero = 2 A E; quippe cujus semissis sit ipsa A E recta.

Cycloidis vero Protractæ curva τ I τ fig. 175. æquatur Curvæ Semiellipseos, axium habentis alterum (quem, propter curvaturam, protractum repræsentat τ A τ curva,) æqualem 2 A α − A I; (cujus ordinatim-applicatæ sunt ipsæ b p;) alterum, = 2 A I.

Et quidem tota τ E τ I τ figura (sumptis A E = A I,) alia non est quam ellipsis quædam distorta; cujus quidem, si axium alter intelligatur τ A τ, suam retinens longitudinem, semiellipsis superior, (propter curvaturam,) protrahitur; inferior, contrahitur: eique Axi ordinatim-applicatæ sunt c b p rectæ.

De his autem, quæ Cycloides Secundarias spectant, (quarum considerationem ultra non prosequimur,) videatur Appendix ad nostrum de Cycloide Tractatum, unà cum Epistola eidem subjuncta (circa finem:) Ubi hæc fusius explicantur & demonstrantur.

SCHOLIUM.

IN propositionibus aliquot præcedentibus, quæ Cycloidem spectant ejusque solida, vel eo viam struunt; aliquanto fusior fui: eâ præsertim de causâ, quod in meo *De Cycloide* Tractatu, (Anno 1659. edito,) calculum non ad omnes casus perduxeram; Sed ad eum saltem (aliósque qui ad hunc erant necessarii) quem, ex reliquis selectum, Anonymus Problematum Propositor præ cæteris designabat tanquam difficillimum, atque ad quem nisi cæteris intellectis non perveniri posse putabatur. Contentus, in reliquis, (ob rationes ibidem traditas,) saltem fontes tradidisse unde Calculi Geometrici beneficio omnia deducenda erant.

Quanquam

P.V.

m Tan.
unctum
Axique
rò, fu-
fi I axi

fium æ-
ycloidis
quatur,
, con-
(cujus
quippe

Curvæ
uram,
; (cu-

non est
ntelli-
erior,
eique

arum
d no-
uncta

fpe-
i: eâ
Anno
ed ad
liquis
delig.
llectis
iones
ci be-

quam

PRO

Qu
sub p
disse
dierit
de ea
erat,
facta
isse.
jam an
nerati
(ne to
calcul
per to
quam
jam an
mobil
& ea
literæ
sit.

Et
nonnu
diversi
re.
ad sc
tum ju
vel isti
tatis S
facti, c

Et,
ostendi
pridem
scissas)
b∂τ —
ubique
hinc dec
detur,
negotio
Neque
jam tur
intenti

Quanquam enim mihi in animo fuerat, dum ea quæ prodierunt ſub prelo forent, reliquum etiam calculum abſolviſſe, & ſimul edidiſſe: Cum tamen interea temporis (eodem anno) inexpectato prodierit D. *Paſchalii*, ſeu *Dettonvillii*, (Propoſitoris Problematum,) de eadem re tractatus: Potius ducebam; rem totam, prout tunc erat, edere, (calculo ad reliqua nondum abſoluto,) ne viderer ex tractatu ſuo (quod inſinuaturos nonnullos præſentiebam) mea deduxiſſe. Et propterea, ipſa ſchediaſmata ſic edenda placuit, prout ea jam ante cum noſtratibus communicaveram; quæque nominatim Honoratiſſimus D. Vicecomes *Brounkerus* ſubducto calculo examinaverat (ne forte, in multiplici calculo, quod ſæpe contingit, alicubi error calculi obrepſiſſet,) & comprobaverat, (ne uno quidem calculi lapſu per totum illud opus deprehenſo,) jam tum per plures menſes antequam *Dettonvilii* opus prodierit. Sed & totius Methodi ſummam, jam ante per annum integrum, ad D. *Carcavium* ſuum (prout *Dettonvilius* ipſe, tum Anonymus, juſſerat,) *Pariſios* miſeram; ubi & ea viderat *Paſchalius* ipſe; prout ejus ad *Wrennium* noſtrum literæ, diſertè indicant: Ut nullus iniquæ de meis ſuſpicioni locus ſit.

Et quanquam fieri non poſſit, quin, eandem rem tractantibus, nonnulla mihi cum illo fuerint communia: Methodum meam ab illius diverſam eſſe, qui utramque comparaverit non poterit non videre. Quanto autem mea ſit quam illius expeditior, magiſque directè ad ſcopum tendat; aliorum eſto judicium, ſiqui fuerint qui volent tum juxta mea, tum juxta illius principia, vel calculum univerſum, vel illius ſaltem caſus quem ex reliquis ſelegit ille, (de Centro gravitatis Semiſolidi, ex Semicycloidis circa baſin ſuam Semiconverſione facti, determinando,) calculum inſtituere.

Et, ſpeciatim, illam Cycloidis in Segmenta diſtributionem, ubi oſtenditur, non modo Semicycloidem Semicirculi triplam eſſe, (quod pridem innotuit,) ſed & illius Portiones (rectis debito modo abſciſſas) Portionum hujus reſpective triplas eſſe; (puta in Fig. 166. Fig. 166.
$b\beta\gamma = 3\,B\alpha B$, $A\alpha\beta b = 3\,A\alpha B$, $d\delta\beta b = 3\,D\delta B$, & ſic ubique;) quam ego totius proceſſus mei originem facio; cæteraque hinc deduco: Ille ne uſpiam advertit. Et quidem neſciiſſe planè videtur, donec ex ſcriptis meis id reſciverit. Quippe rem tanti in hoc negotio momenti, non putandus eſt, modò ſciverit, reticuiſſe velle. Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli; quamquam jam tum per annos plus quam quadraginta in rem illam Cycloidis, intenti fuerant ex illis ſummi viri, quam ego tum primum (ad illud

provocatus,) considerandam suscepi; nescius alia jam tum ab aliis inventa fuisse, quam quod apud *Torricellium* & *Schotenium* traditum noverim, Cycloidis planum circuli triplum esse; Methodúmque ibidem tradi, pro tangentibus ducendis.

Atque hinc esse judico; quod ille *Figuram Sinuum Versorum*, nusquam in auxilium advocat; sed ea longis ambagibus ex *Sinuum Rectorum* doctrinâ petitum it, quæ ex Sinibus Versis multò promptiùs fuissent depromenda.

Curvámque figuræ isti adjacentem A d τ, fig. 170. (quam *Ellipsin Expansam* dicimus) non omnino considerasse videtur: Quamquam enim quæ ipsi est *Cycloidis Socia*, non alia sit quam hujus Curvæ pars dimidia, ut d A; (quod in subjunctis tractatui *de Cycloide*, pag. 100. demonstro;) illam tamen ex alia plane origine deducit, unde hæc tota non deduceretur. Quam enim ille *Dimidiam*, ductu Circini in superficie Cylindri, (ea apertura quæ diametro Basis Cylindri æqualis sit,) descriptam vult: Hoc est, (quippe hoc tantundem valet) communi *Sphæra atque Cylindri* sectione; (posito Sphæræ Centro in Cylindri superficie; ejusque Radio, hujus Basis Diametro æquali:) Nos, *Totam*, ex communi *Cylindri & Plani* sectione deducimus: (Utrique interim absumptam Cylindri superficiem in Planum expandentes.) Quod illum minimè advertisse existimo.

Hinc est, quod, in propositis suis, selegit ille casum illum, ut difficillimum, qui Semisolidum circa Semicycloidis Basin spectat; (quem, nisi perspectis quæ Semisolidum circa Axem spectant, solutum iri posse non putaverat; nec quidem, per ejus methodum, absque illis solvi potest.) Qui tamen (utut ille hoc nesciverit) longe facilior est, quàm casus similis de Semisolido circa Axem. Quod ex traditis nostris, propter illam quam diximus Semicycloidis in sua Segmenta, Segmentis Semicirculi respondentia, distributionem, satis liquet. Verùm cum ille hanc distributionem nesciverit; non poterat eò pervenire, nisi ope Semisolidi circa Axem. Adeoque, longo circuitu & perplexo admodum calculo eò tandem tendere necesse habet, quò nos rectà pervenimus.

Hinc etiam est (ni fallor) quod in Problematis primitùs propositis, illud Semicycloidis Segmentum (cum suis Solidis) expendendum proponat, quod rectâ Basi parallelâ abscinditur, (ut b V A, fig. 166.) potius quàm quod rectâ abscindatur quæ parallela sit Axi. Utut enim, distributionem hanc intelligentibus, posterioris hujus consideratio fuisset non minus intricata; illi tamen, qui distributio-

nem

nem eam nondum perſpectam habuit, prior illa habita eſt intricatior; & quidem, per methodum ab illo traditam, difficiliùs abſolvetur.

Quæ omnia, quidem, manifeſta ſunt indicia, diſtributionem hanc (& quidem pulcherrimam) ipſi minimè fuiſſe perſpectam.

Quod quidem eouſque verum eſt, ut ſiquis velit, ſecundum ipſius methodi leges, (quod nos in noſtrâ fecimus,) caſuum omnino omnium calculum aggredi, eorum præſertim qui Semiſolidi circa τα (ſemicycloidis baſin,) vel (huic parallelam) bV, centra gravitatis ſpectant; (expertus loquor;) rem adeo perplexam reperiet, ut mirum ſit ni, laboris pertæſus, in medio itinere laſſus deſiſtat. Quod in cauſa fuiſſe ſuſpicor, cur ille (utut id pollicitus videretur) ad calculum non revocaverit caſus omnes à ſe propoſitos; ſed, unius tantum numeros exhibuiſſe contentus (ſuppreſſis interim quibus huc pervenerat veſtigiis) de reliquis altum habet ſilentium.

Sed neque noverat ille (neque ex ſuis alii) Cycloidis curvæ æqualem rectam exhibere, aut in datâ ratione curvam illam ſecare; antequam id ex Anglia reſciverit. Unde factum erat quod Poſteriora Quæſita, quæ Cycloidis Curvam hujuſque ſegmenta ſpectant; & Superficies illius, vel ſegmentorum ſuorum, converſione factas; harúmque omnium Centra gravitatis; non fuerint unà cum Prioribus propoſita; ſed tum demum poſtea quam ex *Wrennii* noſtri literis indicatum fuerat, quo pacto poſſint huic curvæ, ſuiſque partibus, æquales Rectæ exhiberi. Quod ex illius ad *Wrennium* literis abunde liquet.

Quæ omnia non eo animo dicta ſunt, ut inventis ſuis derogatum eam: Sed ut nobis quæ noſtra ſunt aſſeram, & reapſe oſtendam, etiam omnia illa non minus eſſe (ne dicam *magis*) methodis noſtris pervia, quam ſuis; nequis ſupereſſe poſſit iniquis ſuſpitionibus locus, nedum malignis inſinuationibus.

Quod autem hac in re, præter ea quæ pridem edidimus, jam ſuperadditum habetur: Non aliud eſt (rem ipſam quod ſpectat) quam calculi, pridem inchoati, continuatio. Non enim alia hic adhibemus principia, vel methodi leges alias, quàm quæ in illo *de Cycloide* Tractatu paſſim adhibemus. Sed & quæ illic habentur, fere deprompta ſunt ex principiis meis, in *Arithmetica Infinitorum* pridem traditis, Anno 1656. editis: quæ & in *Commercio Epiſtolico*, Anno 1658. edito. (Epiſt. 15, & 16, hujuſque appendice,) ad Centra gravitatis accommodaveram. Quippe hæc omnia vix aliud ſunt, quam iſtius Methodi Univerſalis, ad particulares caſus accommodatio.

Poſtquam vero ea quæ præceſſerunt omnia, ad calculum uti hic habentur perduxeram; eaque per complures menſes Prelo ſubjecta fuerant; & magna pars impreſſa: incidi in *Lalovera* de Cycloide tractatum; ante aliquot annos Toloſæ editum, ſed (uti audio) nonniſi nuperrime in Angliam allatum. Qui varios de Cycloide ejuſque Solidis, & horum Centris gravitatis, Caſus, ad calculum redegit, ſuâ methodo. Hanc ego, quamvis eam hactenus examinare nondum vacaverit; eaque, primâ ſaltem fronte, non parum intricata mihi videatur: ſanam tamen eſſe, ſaltem quod ſummam rei ſpectat exiſtimo. Eo potiſſimum, quod calculi ſui numeros (ſaltem in pleriſque quos contuli caſibus) cum noſtris conſentire reperio. Sicubi vero diſſentiant, (quod in paucis fit,) id Calculi potius alicui lapſui fortuito (qui condonandus erit) quam Methodi vitio, imputandum videtur. Quod & de noſtris intellectum eſto, ſicubi irrepſerit (quod facile fieri poſſit, & quidem ægrè cavebitur, in tam multiplici calculo,) calculi lapſus aliquis, (nedum calami, aut etiam Preli.) Quippe, Methodum ipſam meam, ſatis ubique demonſtratam eſſe, ſatis ſecurus ſum: Sed neque de ipſo Calculo multum metuo.

Quod autem ille multus ſit in conquerendo, quaſi cum eo minus candidè actum fuerit: Ego quidem non miror; ut qui ſæpius eadem ab eiſdem hominibus expertus fuerim, de quibus hic conqueritur. Sed & jam, ante nos, Carteſius (ut in ipſius editis Epiſtolis paſſim liquet) eadem ſæpius conqueſtus eſt. Et Torricellium (ne plures memorem) pari modo habitum fuiſſe, ex eâ liquet Apologia quam pro illo ſive *Carolus Dati*, ſive quiſquis alius, ſub ficto nomine *Timauri Antiatis*, edidit Florentiæ, Anno 1663. Lingua Italica. Sunt utique qui Problemata ſua, *Totius Europæ Mathematicis* ſolvenda exponunt; ne dicam venditant, jactitantve; (quaſi quidem huic ſoli negotio cæteris vacaret, ut ſua penſa abſolverent:) Quæ quidem ſi negligimus; Inſultant: Si ſolvimus; Iraſcuntur, calumniantur, opprobriis onerant, inſimulant plagii; (quaſi quidem ipſi ſoli ſapiant, atque impoſſibile ſit ut alii, niſi ipſorum ſcriniis expilatis, quicquam in Mathematicis arduum præſtare poſſint.) Quod fecit ut ego jam per plures annos tantum-non religioſe abſtinuerim, utut aliquoties publice provocatus; & laceſſitus, nequid hujuſmodi commercii cum illis ultra haberem, apud quos nec impunè licet eloqui, nec tacere: Nec niſi nuperrimè, nimis laceſſitus, ſilentia rupi.

Quid autem rei ſit, cur ibi *Dettonvilium* à *Paſchalio* alium eſſe, inſimulatum ire videantur, (quod & *Lalovera* obſervat,) ego non in-

intelligo; quem ego pro eodem semper habui, atque etiamnum habeo. Et quidem, eundem esse, *Lalovera* (in tractatu suo) iis indiciis ostendit, ut de eo non sit cur quisquam dubitet, saltem donec alius (a *Paschalio*) *Dettonvillius* reperiri possit. Et quidem ex *Paschalii* ad *Wrennium* literis, (jam antequam Problematum Propositor *Dettonvilli* nomen professus fuerat,) non erat conjectu difficile, ipsum fuisse istorum Problematum Authorem: Et quidem, utut D. *Carcavius* in suis ad me literis, quasi rem dissimulaturus, *Dettonvillium* a *Paschalio* distinguat; (quasi non idem forent;) in D. *Hugenii* tamen ad me literis, (per quem D. *Carcavius* ad me transmittenda curavit aliquot *Dettonvillii* exemplaria, ad alios aliquot distribuenda; quem itaque putaverim tum *Carcavii* mentem, tum Authorem libri cognovisse;) Junii 9. 1659. *Hagæ* datis, sic scribitur; *Ad postremas tuas nihil hactenus rescripsi, eò quòd ab illo jam tempore expectabam libros hosce* Dettonvillii *seu* Paschalii, *quos mihi ad te curandos commissum iri noveram. Quaterna hæc exemplaria ad te uti mittere rogat* Carcavius; *te verò ut singula ex his, Viris Clar.* Wrennio, Wardo, & Hobbio, *tradi cures. Oratque ut examinato* Dettonvillii *opere sententiam suam quisque ipsi edere velit.* Et quidem *Wrennius* noster, Parisiis huc ante triennium reversus, (ubi moram aliquam posuerat,) *Paschalium*, dixit, istius libri Authorem Parisiis habitum esse, nemine (quantum ille observaverat) vel reclamante vel dubitante. Sin fallimur omnes, (quod vix crediderim:) Siquando alius a *Paschalio* prodiverit *Dettonvillius*; mihi certè perinde erit: (Quippe hic, mihi, neque seritur neque metitur:) Ego saltem hactenus, alium non novi.

Lalovera Numeros quos cum meis me Contulisse dixi, illi sunt qui habentur, ad octo Problemata, prop. 25. lib. 3. qui (ad terminos meos reducti) cum nostris consentiunt omnes.

Item, qui habentur, ad octo Problemata prop. 36. lib. 4. qui omnes item cum meis consentiunt; nisi quod in octavo Problemate dissentiant. Quippe quam assignat ille distantiam (a conversionis axe) Centri gravitatis Semisolidi, ex semiconversione superioris semissis semicycloidis A d C (in mea fig. 166.) circa axem A C; esset (ad terminos nostros reducta,)

$$\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 512R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P}.$$

At verò, juxta meos numeros, (per § O, P prop. 21. hujus,) Ungulæ Segmenti A b V, aciem habentis A V seu A α, distantia centri gravi-

gravitatis ab AV, seu Aα, (hoc est, à perpendiculari plano super Aα erecto,) ubicunque sumatur V, sive supra C, sive infra C, sive (quem ille solum casum considerat) in ipso C centro; est

$$\frac{87aR^3 - 87sR^3 - 96avR^2 - 9svR^2 - 12a^3R + 36a^2sR + 12as^2R + 2s^3R + 24a^3v + 36a^2v + 24as^2v + 6s^3v}{-48vR^2 - 18a^2R + 6asR + 6s^2R + 36a^2v + 36asv + 12s^2v};$$

Hoc est, in præsenti casu, (propter $a = \frac{1}{4}P$, & $s = v = R$,)

$$\frac{3RP^3 + 72R^2P^2 + 108R^3P - 1408R^4}{18RP^2 + 288R^2P - 480R^3};$$

(ut factâ Reductione patebit.) Adeoque in Semisolido (cujus distantia est ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, seu $4R$ ad P, ut sæpius ante ostensum est,) erit

$$\frac{6RP^3 + 144R^2P^2 + 216R^3P - 2816R^4}{9P^3 + 144RP^2 - 240R^2P}.$$

Quod à numeris nostris in hoc dissentit; quod habeat ille $-512R^4$, pro $-2816R^4$. Siquis autem dubitaverit, ubi numeri discrepant, utrum penes illius numeros, an penes meos, erratum fuerit; errorem penes illum esse, etiam absque operosâ disquisitione, facile constabit. Quippe si ad numeros absolutos (quam proxime) fiat reductio; reperietur distantia centri gravitatis istius Semisolidi, ab Aα, secundum meum calculum, quasi $\frac{2}{7}$ totius distantiæ $\alpha\tau$; at secundum ejus, quasi $\frac{2}{5}$; quam nimiam esse, qui figuram istius solidi mente conceperit, minimè dubitabit: Est enim tanta fere quanta si esset Semicylindrus, cujus distantia saltem minor esset quam $\frac{4}{9}$; quæ nonnisi paulo major est quam $\frac{2}{5}$, hoc est $\frac{4}{10}$: Adeoque hanc nimiam esse, non erit dubitandum.

Denique; qui habentur ad octo Problemata, suæ prop. 59. lib. 5. qui cum nostris item consentiunt omnes; excepto octavo Problemate. Quod est de distantia centri gravitatis (a conversionis Axe Aα) superficiei factæ ex semiconversione curvæ Aτ (in mea fig. 166.) circa Aα. Est enim, secundum ipsius numeros, (ad meos terminos reductos,)

$$\frac{18RP^2 + 48R^2P - 544R^3}{9P^2 - 24RP};$$

quæ ad numeros absolutos reducta, major erit quam $\frac{2}{3}$ totius $\alpha\tau$; quam nimiam esse, certum est; (quippe quæ major est quàm si esset superficies semicylindrica, in qua distantia minor esset quàm $\frac{2}{3}$, imo quàm, $\frac{4}{9}$.) Est autem, juxta numeros meos (§ I. M prop. 22.) Centri gravitatis Ungulæ ipsi Aτ insistentis, aciem habentis Aα, distantia ab Aα, (hoc est, à perpendiculari plano huic insistente,) $\frac{45P^2 - 1024R^2}{90P - 240R}$; adeóque in semisolido correspondente, distantia à conversionis axe Aα, (utpote ad illam

illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$; seu $4R$ ad P;) $\frac{90RP^2 - 2048R^3}{45P^2 - 120RP}$; quæ, ad numeros absolutos reducta, minor erit quam $\frac{1}{2}$, imò quàm $\frac{1}{7}$, (sed major quam $\frac{2}{15}$,) totius $\alpha\,\tau$.

Verum cùm numeri ejus pro casibus illis (nunc unico, nunc duobus,) quos ille expendit; (nempe, qui vel totam A $\tau\,\alpha$, vel superiorem semissem A d C spectant;) cum nostris universalibus (casum quemlibet indifferenter respicientibus;) in cæteris conveniant: non in ipsius Methodi vitium, sed in calculi lapsum aliquem, rejiciendus erit hic in paucis dissensus.

Inveniet autem, in his meis, Lector, eandem non rarò quantitatem pluribus modis (sed qui sint ἰσοδύναμοι) designatam. Quod ideo factum est, quoniam nunc hic, nunc ille modus, (ubi ad usum reducendus erit,) accommodatior videri possit; adeoque Lectoris commodo consultum est, ut (reductionibus à me jam factis) eum seligat designandi modum qui ipsi gratior videbitur, vel suis usibus accommodatior. Quinimò & alii plures esse possunt modi (quos ego ne nimius essem non apposui) easdem quantitates designandi, prout quis alias atque alias reductiones instituere velit.

Sed & passim deprehendet, me easdem quantitates pluribus methodis investigâsse, atque ad calculum perduxisse. Quod factum est, tum ut Methodos illas plures edocerem; (adeoque ostenderem quàm abunde sufficiant principia nostra ad hæc quæsita multis modis exhibenda:) tum etiam ut de calculo ritè adhibito magis securus essem, quàm si unico modo illum exquisivissem. Quàm enim, in multiplici calculo, lapsus in proclivi sit, nemini vel parum exercitato ignotum esse potest. Ideoque, quo caverentur hujusmodi lapsus, cautè prospiciendum putavi, ut ea fere omnia, in quibus saltem siquis foret error idem etiam alia inde dependentia latè inficeret, pluribus methodis ad calculum redigerentur; ut plurium methodorum consensu (quæ sibi mutuò Probationum seu Examinum vices subirent) confirmatior essem de calculo ritè instituto. Quod fecit, ut vel de ipso Calculo, tanquam omnino rectè instituto, confirmatior fuerim, etiam ante cognitum (quod jam nuperrime, post finita omnia contigit,) *Laloveræ* cum nostris consensum.

His autem de Cycloide, fusiùs (ut dictum est) explicatis; reliqua quæ sequuntur breviùs exequemur: Ne si omnia particulatim persequi velim, in immensum excresceret hoc Caput; quod jamjam multo ultra quam speraveram excrevit.

PROP.

PROP. XXIII.

A. Superficies curva Cylindri recti, ejusve Portio duabus rectis lineis interjecta, aquatur Parallelogrammo rectangulo æquè alto, cujus Basis sit æqualis peripheriæ basis Cylindri, ejusve respectivæ portioni eisdem rectis lineis interjectæ.

B. Idemque obtinet in Superficie istiusmodi Solidi cujuslibet Columnaris recti, quamvis basin habeat non circularem, sed Ellipticam, Parabolicam, Hyperbolicam, aliámve sive rectilineam sive curvilineam quamlibet.

C. Centrum gravitatis est in medio rectæ conjungentis centra gravitatis peripheriarum (sive totalium sive *partialium*, prout casus contigerit,) oppositarum basium.

D. Adeoque (propter arcûs circularis centrum gravitatis datum) datur Superficiei istius Cylindricæ (perfectæ vel imperfectæ) centrum gravitatis.

E. Idemque in aliis illis superficiebus columnaribus dabitur, si detur respectiva curvarum basium Centra gravitatis.

F. Datur etiam expositæ superficialis Ungulæ Cylindricæ, tum
H. Magnitudo, tum Centrum gravitatis.

G, I. Idemque (datis Curvarum, ut dictum est, Longitudinibus & Centris gravitatis) dabitur in reliquis superficiebus Columnaribus.

K, L, M. Quodque de Ungulis superficialibus dictum est; idem ad quasvis in superficiebus illis figuras, planorum sectionibus terminatas accommodabitur.

N. Quæque de Cylindri Recti, Rective Solidi Columnaris, superficie dicta sunt; eadem ad Scalenorum superficies transferentur.

Estque

Estque Superficies Cylindri Recti, ad Superficiem Scaleni, ejusdem Lateris, & super eadem Base; ut est Perimeter Basis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri seu Axi sit ad angulos rectos: Quod & de partibus respectivis intelligendum erit. O.

Idemque non minùs obtinet in aliis Solidis Columnaribus, cujuscunque basis. P.

Ungulæque, & aliæ figuræ superficiales modò dictæ, quæ in erectis exigendæ sunt ad Basis Perimetrum; eædem, in Scalenis, similiter exigendæ sunt ad sectionem illam quæ Recta sit ad Scaleni Axem. Q.

INtelligantur enim, fig. 172. super basis Cylindri recti Peripheria, ejusve portione aliquâ, $\alpha\Delta\tau$, in singulis punctis (æqualiter ab invicem dissitis) erigi perpendiculares rectæ, ut $\Delta\delta$, curvam Cylindri superficiem complentes; (juxta Def. 1. Cap. 4. hujus:) quæ, propter omnes ad basin angulos æquales rectos, totidem parallelogramma rectangula (æque alta invicem & æquè lata) repræsentabunt, superficiem illam curvam complentia; quæ, si in planum expandi intelligantur, totidem rectangulis rectilineis congruunt, complentibus rectangulum rectilineum ejusdem altitudinis, cujus basis æquetur ipsi $\alpha\Delta\tau$ curvæ in rectam expansæ. A. Fig. 172.

Idemque similiter ostenderetur, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non esset arcus Circularis, sed alia quævis Curva. B.

Hujus autem superficiei curvæ Cylindricæ, vel Columnaris, Centrum gravitatis esse in mediâ longitudine, ostensum est, ad prop. 2. hujus; atque in eâ rectâ quæ oppositarum basium superficiei istius Centra gravitatis conjungit, per prop. 5. hujus: Ergo, in hujus puncto medio. C.

Adeoque, propter datum arcûs circularis centrum gravitatis, per 14 hujus; dabitur, non tantum totius superficiei Curvæ Cylindri recti, sed & portionis cujusvis (duabus rectis ad basin perpendicularibus interjectæ) Centrum gravitatis. D.

Idemque similiter dabitur, in alia superficie columnari, etiamsi $\alpha\Delta\tau$ curva, non sit arcus circuli, sed alia quævis curva, dummodo hujus curvæ centrum gravitatis notum sit. E.

Si verò ex hujus Cylindri recti superficie curvâ, plano quovis $T\alpha AT$ utcunque obliquè posito, abscindi intelligatur superficialis F.

 Ungula

Fig.172. Ungula T κ A δ; (ubicunque contingat T A, Ungulæ acies; non minus quam si sit Diameter Circuli T δ A:) propter datum inclinationis angulum υ α β, arcûsque Centrum gravitatis; dabitur Ungulæ altitudo super centrum illud, quæ in arcûs longitudinem ducta dat superficialis istius Ungulæ Aream; per prop. 11. hujus. Quod non minus valet de Ungulâ totâ T κ A δ, quam de partialibus A β υ, β υ κ δ, &c. Nam & hic ob data arcuum A β, β δ, &c. Centra gravitatis, adeoque eorum ab acie A T distantias, & angulum inclinationis, adeoque altitudinem super gravitatis Centra; habebitur area: Ductâ altitudine illâ in curvæ longitudinem.

G. Atque hæc obtinent, quæcunque sit A δ T curva (non minus quàm si sit arcus circularis,) cujus & Longitudo & Centrum gravitatis nota intelligantur.

H. Habitis autem, eo quo dictum est modo, Ungularum magnitudinibus; earundem Momenta eâ methodo investigari possunt, quam, ex prop. 10. petitam, in superioribus sæpius adhibuimus: Nempe, omnium arcuum (Ungulam superficialem complentium) Momenta respectu expositæ rectæ, (quæ, propter cognita curvarum tum longitudines, tum Centra gravitatis, adeoque ipsorum ab exposita recta, planove per illam perpendiculari, distantias, habentur,) sunt ipsum Ungulæ Momentum respectu istius rectæ; quod, per magnitudinem divisum, exhibet distantiam Centri gravitatis ab illo perpendiculari plano. Atque hoc si respectu plurium rectarum (quæ non sint ad invicem parallelæ) fiat; habebitur ipsum gravitatis Centrum.

Vel etiam, (per § W. prop. 13. hujus) haberi possunt Ungularum istiusmodi in superficie Cylindri recti, saltem quarum acies est Circuli diameter, Centrum gravitatis; & Cylindracearum superficierum (parallelis rectis interjectarum) Centra dari, modò ostensum est, § C, D, hujus: Atque in harum aliquas (addendo vel subducendo, prout opus fuerit,) resolvi potest istiusmodi quævis Ungula superficialis Cylindri recti, (ut exemplis mox proferendis ostendetur:) Dabitur igitur, (per prop. 27. cap. præced.) istiusmodi cujusvis Ungulæ Centrum gravitatis.

I. Hæc autem, quò ad alias curvas transferantur, opus erit, ut tum ipsius A δ T, quæcunque fuerit curva, tum partium ipsius quæ rectis putà ipsi A T parallelis (si nempe momentum respectu hujus inquiratur) æqualiter ab invicem dissitis abscinduntur, tum longitudines, tum Centra gravitatis, vel (quæ ex his resultant) momenta habeantur. Quippe, his habitis, momenta similiter exquirentur (per prop. 10. hujus) atque si essent arcus circulares.

Quod autem de Ungulis superficialibus traditum est; idem ad quasvis in eâ superficie figuras, planorum utcunque positorum intersectionibus (cum ea curvâ superficie) terminatas; accommodabitur. Nam, ut figuræ quævis in plano rectilineæ resolvi possunt in rectangula triangula & parallelogramma; eodem fere modo figuræ quælibet (in recti Cylindri vel Columnaris solidi superficie) planorum sectionibus factæ, resolvi possunt in superficiales ungulas & Cylindraceas superficies rectangulas. Adeoque ex partialium magnitudinibus habitis, habebitur (addendo, & subducendo, ut casus postulaverit) magnitudo expositæ: Atque, ex illarum habitis Centris gravitatis, habebitur hujus, per prop. 27. cap. præced. K. Fig. 189.

Exempli gratia; Sit istiusmodi Figura exposita (in superficie Cylindri recti) planis terminata, C A D, (fig. 189.) Atque demissis (ad Cylindri basin B A S) rectis C B, D S; erit exposita C A D figura, eadem atque Ungula superficialis C B A S D, demptis C A B, & D A S. L.

Sed, propter dati arcûs B A S Centrum gravitatis datum (per prop. 14. hujus,) adeoque ipsius distantiam à datâ Ungulæ acie (seu communi basis B A S, planique Ungulam abscindentis C D F, sectione) X Z; & consequenter (propter datum etiam Inclinationis Planorum angulum F X B) Longitudinem rectæ, quæ arcûs Centro gravitatis insistit, rectis in superficie curvâ Cylindri parallelæ: Datur etiam (per prop. 11. hujus) superficialis ungulæ C B A S D area seu magnitudo.

Et similiter; propter datum arcûs B A Centrum gravitatis; Ungulæque Aciem E A (quæ sive sit ipsi X Z parallela, sive secus, perinde est;) Angulumque Inclinationis C E B: Dabitur superficialis Ungulæ C A B magnitudo.

Et, simili processu, dabitur magnitudo superficialis Ungulæ D A S.

Datur ergo, expositæ Figuræ $CAD = CBASD - CAB - DAS$ magnitudo. (Et similiter, mutatis mutandis, in expositis Figuris istiusmodi aliis.) Quod ostendendum erat.

(Idemque pariter obtinebit, etiamsi curva B A S non sit arcûs circularis, sed alia quævis curva, dummodo (ut supra dictum est) tum ipsius, tum partium sui B A, A S, habeantur longitudines & Centra gravitatis.)

Porro; quo habeatur expositæ figuræ C A D (juxta tenorem § W. prop. 13. hujus) Centrum gravitatis; resolvenda erit ea, non tantum in Ungulas C B A S D, C A B, D A S; sed & hæ porro ita M.

 sunt

Fig. 189. ſunt reſolvendæ, ut per ſuperficies Cylindraceas rectangulas, atque ejuſmodi ungulas quæ acies habeant in diametro Circuli (additas demptaſque prout res poſtulaverit,) exhiberi poſſint.

Putà; cùm Ungulæ CBASD acies XZ non ſit in diametro circuli BAS, (ſed extra illam in eodem plano:) ducta intelligatur in ſecante Plano CFD, per L punctum in Axe Cylindri, recta LH, ipſi XZ parallela; quæ curvæ CD occurrat in H: Atque, per H, circulus GHK, centro L deſcriptus, baſibus Cylindri parallelus. Adeoque fient ſuperficiales Ungulæ CHG, DHK, communem aciem habentes LH in circuli Diametro. Quarum ſi auferatur illa, & hæc addatur, ſuperficiei Cylindraceæ rectangulæ GBASK; habetur Ungula CBASD. Habitis itaque illarum tum Magnitudinibus, tum Centris gravitatis (nempe Ungularum CHG, DHK, per § W. prop. 13. & Cylindraceæ GBASK per § C, D, hujus;) habebitur etiam (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis ipſius CBASD = GBASK + DHK − CHG.

Similiter oſtendetur (mutatis mutandis) Ungulam DAS, componi ex Cylindraceâ AMNS, additâ Ungulâ DON, demptâ AOM, quarum Ungularum communis acies OP eſt in diametro Circuli. Habebitur itaque Centrum gravitatis ipſius DAS = AMNS + DON − AOM.

Item, Ungulam CAB haberi, demptis, ex Ungulâ CQT, tum Ungulâ AQR, (quarum communis acies QV eſt in circuli diametro,) tum Cylindracea BART. Adeoque habebitur Centrum gravitatis ipſius CAB = CQT − AQR − BART.

Habebitur itaque (per prop. 27. cap. præced.) Centrum gravitatis figuræ expoſitæ CAD = CBASD − DAS − CAB. (Et ſimiliter in aliis figuris, mutatis mutandis.) Quod erat oſtendendum.

Non autem erat neceſſe, in auxilium advocare § W. prop. 13. ſed per methodum illam (ſæpiùs adhibitam) ex prop. 10. hujus petitam, abſolvi poſſet negotium: Eademque rem abſolvet in aliis (ut dictum eſt) Superficiebus Columnaribus, dummodo Curva baſis, parteſque ſuæ, nota habeant tum Magnitudines tum Centra gravitatis.

N. Si verò expoſita ſit Cylindri (non Recti, ſed) Scaleni ſuperficies; ut in fig. 190. Quæ ad ſingula Perimetri baſis puncta (æqualiter ab invicem diſſita) obliquè cadunt rectæ (axi Cylindri parallelæ) ſuperficiem curvam cylindraceam complentes; neque habebuntur

Fig. 190.

ab invicem eandem quam respectiva basis puncta distantiam, (sed minorem, propter obliqua quæ repræsentant parallelogramma, quorum latitudo minor est quam est basium longitudo;) neque distantias invicem æquales, (propter inæqualem inclinationem ad basis perimetrum.) Utut enim habeant illæ ad planum basis Cylindri eandem omnes inclinationem; non tamen eandem habent omnes ad curvam basis perimetrum; (quod, si opus esset, facile est demonstratu; sed, consideranti, clarius per se liquebit, quam ut id sit opus.) Quo fit, ut Parallelogramma, quæ repræsentant rectæ illæ, superficiem complentia, neque Rectangula reputanda sint, sed neque æqualiter inclinata; (adeoque nec æque-lata, utut æquales bases habentia.) Fig. 190.

Atque ob harum considerationum priorem, evenit, quod Curva Superfices Cylindri Scaleni non (ut Recti) æquetur facto ex Cylindri latere in perimetrum basis (hoc est, in aggregatum basium omnium Parallelogrammorum quæ repræsentent illæ rectæ) ducto: Sed minor eo sit. Quæ consideratio communis etiam est Cylindri solido; quod minus est, quam factum ex latere Cylindri scaleni in basis planum ducto, (hoc est, in aggregatum omnium basium Prismatum, quæ repræsentant rectæ, solidum juxta def. 4. complentes;) quoniam Prismata solidum complentia, non sunt (ut in Cylindro recto) Recta, sed Scalena. Sed, cum sint æqualiter inclinata, (eandem utique ad planum basis inclinationem habent, quam Axis Cylindri,) eâdem ratione minuuntur (propter inclinationem) omnia; nempe, in ea ratione quam habet Cylindri Altitudo ad Latus suum. Adeoque Cylindri Solidum æquale fit facto ex (non Latere, ut in Cylindro Recto, sed) Altitudine Cylindri in Basem ductâ.

Ob posteriorem verò considerationem, (quod Rectæ in superficie Cylindri Scaleni non sint, ad basis Perimetrum, Æqualiter inclinatæ,) evenit, quod non (ut in Solido fiebat) una aliqua recta, quæ sit communis omnium Parallelogrammorum Altitudo, pro Latere substituenda sit, in Basis Perimetrum ducenda, quò habeatur Area; sed, pro aliis atque aliis Perimetri punctis, aliæ atque aliæ rectæ; propter variatam in singulis punctis inclinationem ad Basis Perimetrum, adeoque Parallelogrammorum Altitudinem.

Huic itaque quò subveniatur incommodo; Si exponatur consideranda (fig. 190.) Cylindri Scaleni bBSs superficies curva; neglectis basibus BAS, bas, (quæ sunt ad Cylindri latus bB obliquè positæ:) Sumatur planum aliud, quod sit ad Cylindri Latus (vel Axem) rectum, sectionem faciens $\beta\alpha\sigma$ Ellipsin (dummodo BAS sit Circulus;) ad quam itaque curvam $\beta\alpha\sigma$, rectæ omnes Bb, Aa, &c.

Fig. 190. &c. ſuperficiem complentes, non minus Rectæ ſunt, quam ſunt in Cylindro Recto Latera ad perimetrum baſis. Et, conſequenter, ſi per ſingula curvæ $\beta\,\alpha\,\sigma$ puncta, æqualibus ab invicem in eadem curvâ diſtantiis remota, tranſire intelligantur totidem æquales rectæ B β b, A α a, &c. ſuperficiem complentes; repræſentabunt illæ (non minus quam quæ ſunt in ſuperficie Cylindri recti) totidem Parallelogramma Rectangula æque alta, & æque lata, quorum omnium Baſes ſimul ſumptæ complent ipſam $\beta\,\alpha\,\sigma$ curvam, & communis Altitudo eſt ipſum Cylindri Latus B β b; quæ itaque in curvam totam $\beta\,\alpha\,\sigma\,\beta$ ducta, exhibet integram Cylindri ſuperficiem curvam; eademque in curvæ portionem quamlibet ut $\beta\,\alpha$ ducta, exhibet correſpondentem ſuperficiei portionem B A a b.

O. Hinc ſequitur; Superficiem Cylindri Recti, ad ſuperficiem Scaleni, ejuſdem Lateris & ſuper eandem Baſin, ita eſſe, ut eſt Perimeter Baſis, ad Perimetrum Sectionis quæ Lateri vel Axi ſit ad angulos rectos; puta, ut B A S, ad $\beta\,\alpha\,\sigma$: Atque illius portionem, ad reſpectivam portionem hujus, ut eſt ea baſis portio cui inſiſtit, ad reſpectivam ſectionis rectæ portionem; puta, ut B A ad $\beta\,\alpha$, ſic quæ portioni B A inſiſtit in Cylindro Recto, ad eam quæ eidem inſiſtit in Scaleno ſuperficiem, idem Cylindri Latus habentem.

P. Idemque obtinet, ob eandem cauſam, non tantum in *Cylindris* veris, qua baſin habent Circularem; ſed & Solidis quibuſvis Columnaribus. Nempe, quæcunque ſit B A S curva quæ baſis ſit Solidi Scaleni pro eâ ſubſtituenda erit $\beta\,\alpha\,\sigma$, quam exhibet ſectionem Planum illud quod eſt Lateri, vel Axi, ad Angulos rectos. Quæ quidem Ellipſis erit, ſi B A S ſit Circulus; ſi verò B A S Ellipſis ſit, erit $\beta\,\alpha\,\sigma$ vel alia Ellipſeos ſpecies, vel etiam Circulus. Et ſimiliter, quæcunque fuerit curva B A S; pro eâ ſubſtituenda erit correſpondens $\beta\,\alpha\,\sigma$, prout cujuſque curvæ ratio poſtulaverit.

Q. Quæ autem, de Ungulis, aliiſve figuris in Recti Cylindri ſeu Solidi Columnaris ſuperficie, ad Baſis Perimetrum B A S exigendis, dicta ſunt: Eadem omnia, in Scalenis, ad Perimetrum Sectionis rectæ $\beta\,\alpha\,\sigma$ accommodanda erunt. Quippe Solidum illud, (ſive Cylindrus ſit, ſive aliud quodvis Solidum Columnare,) quod ad Baſin B A S Scalenum eſt, idem ad baſin $\beta\,\alpha\,\sigma$ Rectum erit.

PROP.

PROP. XXIV.

Figuræ cujusvis in Superficie Sphæræ, Planorum quorumvis cum Sphærica superficie sectionibus, (hoc est circulorum quorumvis sive maximorum sive minorum arcubus) terminatæ; Magnitudo datur. A.F.

Nempe; Superficies sphæræ integra, æquatur quatuor circulis maximis. B.

Segmenti cujusvis, Plano abscissi, (aut etiam Zonæ cujusvis Parallelis Planis interjectæ,) superficies, eam rationem habet ad totam Sphæræ superficiem, quam habet intercepta Axis portio ad Axem totum. B.

Cuneus superficialis, seu portio superficiei curvæ duobus planis in Axe coeuntibus interjecta, sive totius Sphæricæ superficiei, sive Segmenti superficialis, sive Zonæ; superficiem habet in ea ratione ad integram illius sive Sphæræ, sive Segmenti, sive Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis planorum illorum (vel arcuum plana illa jungentium,) ad quatuor rectos. C.

Triangulum sphæricum, (arcubus circulorum maximorum terminatum,) eam rationem habet ad circulum in sphæra maximum; quam habet excessus aggregati omnium angulorum supra duos rectos, ad duos rectos. Seu (quod tantundem valet) æquatur facto ex Radio in Arcum circuli maximi, qui isti angulorum excessui subtendit, ducto. D.

Trilinea circulorum minorum arcubus terminata (vel partim his, partim arcubus maximorum,) à Triangulis Sphæricis modò dictis, differunt Bilineis notæ magnitudinis. E.

Adeoque

F. Adeoque, Figuræ cujusvis, in superficie sphærica, planorum sectionibus, vel circulorum quorumvis arcubus, terminata, (utpote quæ in expositarum figurarum aliquas semper resolvi possit;) Magnitudo datur.

A. POsset quidem hæc Propositio, non tantum de Magnitudine, sed & de Centro gravitatis, istiusmodi Figuræ, ex præcedente deduci: Cum possit omnis istiusmodi in Sphærica superficie figura, in Trilinea Rectangula resolvi; quæ in Cylindri recti superficiales Ungulas expandi poterunt: Quarum quidem tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, (per præcedentem,) haberi poterunt; atque inde ad Trilinea Sphærica transferri, ope prop. 14. hujus.

Verùm cum ita calculus futurus sit perplexior quàm ut illum jam aggredi libeat, (propter varias se mutuò decussantes Sphæræ diametros ad quas exigenda essent ea Trilinea Sphærica, eorúmque partes:) libet aliâ methodo Figurarum illarum Magnitudines exhibere.

B. Superficiei Sphæricæ *Segmentum*, (Plano abscissum;) vel etiam
Fig. 191. *Superficialis Zona* Sphærica, (duobus Planis Parallelis interjecta;) eam habet rationem ad totam Sphæræ Superficiem (hoc est, ad quatuor Circulos Maximos;) quam habet Axis portio, Plano seu Planis illis terminata, ad Axem totum. Puta, quanta pars est AV, vel VC, totius Axis A α; eadem pars est totius Superficiei Sphæricæ, Segmentum A B β, vel B $\beta\delta$ D Zona; & sic ubique. Per § H, I. prop. 13. hujus.

C. Curva Superficies *Cunei Sphærici*, aut etiam *Cunei Segmenti Sphærici*, *Zonæve*, arcubus duorum circulorum in Axe coeuntium interjecti; eam habet ad totam Sphæræ, vel totam illius Segmenti, aut Zonæ superficiem, quam habet Angulus inclinationis illorum Circulorum, ad quatuor Rectos. Quippe si intelligatur A B D α Semiperipheria, circa axem A α conversa, superficiem sphæricam describere: quam partem totius conversionis absolvit A B α, in situm A b α delata; eadem erit tum angulus B A b, quatuor rectorum; tum, integræ Peripheriæ sui circuli, arcus B b puncto B descriptus; suique, arcus D d descriptus puncto D; & sic ubique: adeoque eadem pars erit, Bilineum A D α d A, totius Superficiei Sphæricæ; & A B b, segmenti B β A; & B b d D, Zonæ B $\beta\delta$ D: & sic ubique. Per § G. prop. 13. hujus.

Puta; Quam habet rationem Arcus B b, vel D d, ad suas respectivè

Peri-

Peripherias integras Bβ, vel Dδ; aut angulus BAb vel DAd ad quatuor rectos: eam habet rationem *Spharici Cunei Superficies* ABαbA, ad totius *Sphara* superficiem; *Cuneique Segmenti sphaerici superficies* ABbA, vel αBbα, ad respectivi *Segmenti spharici* superficiem ABβ, vel αBβ; *Cuneique Zona Spharica superficies* BbdD, ad totius *Zona* superficiem BβδD. Et sic ubique.

Exponatur jam, in superficie Sphæricâ, Triangulum Sphæricum ABD, circulorum Maximorum arcubus comprehensum. Qui quidem arcus continuati, intelligantur circulos integros absolvere. Hi Circuli cum sint in Sphæra maximi; se mutuò bisecabunt bini quilibet. Et, propter æquales angulos tum qui sunt oppositi verticales, tum qui sunt in eodem Bilineo oppositi, (puta $A = \alpha$, & $a = \alpha$, & sic ubique;) æqualia invicem erunt quæ sunt in contrariis Hemisphæriis Bilinea, (eorundem Circulorum contrariis Semicirculis interjecta;) puta αα, & (quod, in Schemate disruptum est & replicatum, sed in Sphærâ continuari intelligendum est,) AA; & similiter BB, & ββ; item DD, & δδ. Sed &, eâdem ratione, Opposita Triangula ABD, αβδ, (propter Latera lateribus, & Angulos angulis, respective sumptis, æqualia,) erunt invicem æqualia. (Quæ est etiam *Samuelis Fosteri* nostratis demonstratio, in Collegio *Greshamensi Londini* Astronomiæ non ita pridem Professoris.) D. Fig. 192.

Si autem, ex semisuperficie Sphærica $T\upsilon T\upsilon T = RP$, (hoc est, facto ex Radio in Peripheriam ducto) auferatur ABD triangulum; Residuum (RP — ABD) complebunt Triangula ατV (hoc est, αα — αβδ; hoc est, AA — ABD;) & Bετ, (hoc est, BB — ABD;) & DEV, (hoc est, DD — ABD.) Hoc est, Bilinea $AA + BB + DD, - 3ABD, = RP - ABD$. Hoc est, (transponendo) $AA + BB + DD - RP = 2ABD$. Adeoque, quam habet rationem, excessus Bilineorum $AA + BB + DD$ supra RP, ad RP Semi-superficiem sphæricam; hoc est, quam habet rationem, Excessus angulorum $A + B + D$ supra duos rectos, ad duos rectos; seu Excessus arcuum (angulis illis competentium) supra semiperipheriam, ad semiperipheriam; eam habet 2ABD duplum Trianguli, ad eandem RP Semisuperficiem sphæricam, seu duos circulos maximos; ipsúmque ABD Triangulum, ad $\frac{1}{2}RP$ circulum in sphæra maximum.

Hoc est, invertendo (posito a pro aggregato arcuum, in circulo maximo, angulis A, B, D, competentium;) ut Semiperipheria $\frac{1}{2}P$, ad $a - \frac{1}{2}P$; sic Circulus in Sphæra maximus $\frac{1}{2}RP$, ad $(aR - \frac{1}{2}RP)$ triangulum sphæricum ABD. Quod itaque æquatur facto ex

Radio *R*, in arcum $a - \frac{1}{2} P$, qui convenit Excessui angulorum A+B+D supra duos rectos.

E. Esto demum Trilineum expositum A B D, cujus latera D L A,
Fig. 193. D K B, sint arcus circulorum minorum E D A, G D B H; (latusque B A, arcus circuli maximi.) Inveniatur circuli E D A, polus P; & circuli G D B H, polus A. Transeátque per A, D, circulus maximus A D α; & per D, B, maximus F D B φ; item per P, D, maximus P D π.

Habetur itaque (per § B, C,) magnitudo tum integri Segmenti Superficialis P E D A, tum hujus Cunei seu portionis P D L A: Et (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici P D M A (arcubus maximorum circulorum terminati:) Adeoque & (horum differentiæ) Bilinei D A magnitudo.

Similiter, (per § B, C,) habetur magnitudo tum integri segmenti A G D B H, tum hujus portionis A M D K B: Et (per § D.) Trianguli Sphærici A M D I B: Ergo & (horum differentia) magnitudo Bilinei D B.

(Et similiter faciendum esset, ad latus B A, si fuisset arcus circuli minoris: Cum verò sit latus illud, arcus Circuli maximi, id minime opus erit.)

Habetur autem, ut modò dictum est, (per § D.) Magnitudo Trianguli Sphærici (arcubus maximorum circulorum comprehensi) AMDIB: Unde si auferatur Bilineum jam inventum DA, atque addatur Bilineum D B; habetur magnitudo Trilinei expositi A B K D L A: cujus latera (saltem aliqua) sunt arcus minorum circulorum.

Atque, ad eandem formam, Triangulo Sphærico, additis ablatisve, ut res postulaverit, Bilineis uno vel pluribus; habebitur area Trilinei cujusvis utut minorum circulorum arcubus comprehensi.

F. Denique; Cum nulla possit exponi Figura, in superficie sphærica, Planorum sectionibus (hoc est, circulis sive maximis sive minoribus) terminata; quæ in hujusmodi jam traditas figuras non possit resolvi: Datur istiusmodi figuræ cujusvis magnitudo. Quod erat ostendendum.

PROP.

PROP. XXV.

Segmenta Sphæræ, utcunque Planis truncatæ; Magnitudinem datam habent.

Hujusmodi enim Sphæræ Segmenta quælibet, terminantur, partim portione residua Superficiei Sphæricæ, partim planis truncantibus.

Intelligatur autem (ut ad prop. 16. hujus) ea quæ restat superficiei sphæricæ portio, (cujus magnitudo data est, per prop. præced.) in particulas quantumlibet minutas distribui, totam complentes; quibus insistere intelligantur totidem pyramides exiguæ, communem verticem habentes Sphæræ Centrum; & communem altitudinem, Sphæræ Radium. Adeóque, Radii Triens, in curvam illam superficiem ductus, (utpote Basium illarum aggregatum,) exhibebit, Pyramidum sive Sectorum Sphæricorum illorum, portioni curvæ insistentium, Aggregatum.

Plana vero, quæ, unà cum hac curvâ superficie, totam complent, sunt etiam notæ magnitudinis: Utpote quæ sunt vel Figuræ Rectilineæ, vel saltem Circulorum portiones, quarum Magnitudo habetur, per prop. 15. hujus. Harúmque item (utpote positione datarum) dantur Distantiæ à Centro Sphæræ; Quarum quidem trientes, in sua respectivè Plana ducti, exhibent Pyramidum magnitudines, Planis illis insistentium, & communem verticem habentium Centrum Sphæræ.

Quæ quidem Pyramides, additæ vel subductæ (prout res tulerit) Aggregato illi Pyramidum superficiei curvæ insistentium, jam invento; exhibent Expositi Segmenti magnitudinem.

Datur igitur istiusmodi cujusvis segmenti sphæræ, planis utcunque truncatæ, Magnitudo. Quod erat ostendendum.

SCHOLIUM.

UT verò Propositionis hujus, & simul præcedentis, Praxis, Exemplo aliquo illustrata, facilior reddatur: Libet hic subjungere, Problematis Solutionem, quod ante aliquot annos mihi solvendam

proposuit Vir ingeniosus, & rerum Mathematicarum peritus, D. *Joh. Collins*, (Augusti. 12° 1665.) tanquam rem maxime desideratam; & quotidiani usûs, in mensurandis vasis vinariis & cervisiariis, partim depletis.

Cujus ego Problematis Solutionem, ejúsque Demonstrationem, eodem statim die, summatim ei exhibui; (&, quantum scio, omnium primus absolvi) ad hunc sensum. Nempe,

" Redigendum esse expositum Dolii vel Sphæroideos truncati Fru-
" stum, ad inscriptæ Sphæræ Frustum correspondens; ad quod, Fru-
" stum illud Sphæroideos eam habebit rationem, quam habet Sphæroi-
" deos Axis, ad Diametrum Sphæræ; propter Plana Sphæroideos
" parallelis Sphæræ Planis correspondentibus æqualia, sed ab invicem
" eâ ratione longius remota, quam habet Axis Sphæroideos ad Axem
" Sphæræ.

" Illud autem Sphæræ Frustum, considerandum esse tanquam ex Py-
" ramidibus conflatum, communem verticem habentibus Centrum
" Sphæræ; basésque in Frusti Superficie continuas, ipsam complentes.

" Quorum quidem quæ Bases Planas habent, facilè exhiberi posse;
" cum plana illa alia non sint quàm Circulorum portiones, notis me-
" thodis exhibendæ; eárumque à Centro distantiæ (altitudinem deter-
" minantes) facile exquirantur.

" Quod autem ad eas innumeras attinet, quarum exiguæ bases su-
" perficiem curvam complent: cùm basium aggregatum sit ea ipsa
" superficies curva; & communis omnium Altitudo, Radius sphæræ;
" id unum superesse posse difficultatis, ut exhibeatur illa Superficies
" curva.

" Id autem quicquid sic difficultatis, à me jam olim explicatum esse
" in subjunctis ad Calcem mei *de Cycloide* Tractatûs, pag. 122. (sed quæ
" inserenda fuerant pag. 23. § 68.) ubi docetur, *Figuram quamlibet,*
" *in Superficie Sphæra, Circulorum quorumvis (sive maximorum sive*
" *minorum) arcubus terminatam, Quadrare.*

" Adeóque Rem totam, inter Desiderata, non esse censendam; ut
" quam ego jam tum ante plures annos absolveram, & scripto edito
" (anno 1659.) vulgaveram.

Quod ipsum paucis pòst diebus, latiùs aliquantò explicatum, ad illum etiam misi, hac fere quæ sequitur verborum formâ.

PROP.

PROP. XXVI. Fig. 194.

Sit Dolium Σσpσ ΣP, (Sphæroideos Pβpβ Fruſtum, parallelis circulis æqualibus Σσ, Σσ, abſciſſum,) ſitu Horizontali poſitum. Datæque ſint; tum Circuli Medii Pp, Semidiameter CP; tum Extremorum Σσ, Semidiameter δΣ; Vaſiſque Longitudo δδ, (cujus Semiſſis Cδ:) Summíque Liquoris ΦKΦ, Altitudo, ſupra infráve C centrum, CK; quæ minor ſit quam δΣ. Quæritur, Liquoris contenti quantitas; ſeu Segmenti Majoris ΦσpσΦ, Minoríſve ΦΣPΣΦ, Magnitudo.

SPhæroidi Pβpβ, inſcripta intelligatur Sphæra PBpB: quam ſecent Circuli Ss, Ss, ipſis Σσ, Σσ, æquales & paralleli; Planúmque ΦKΦ Horizontale, exhibens in Sphæra Circulum LFL, Ellipſi λΦλ in Sphæroide reſpondentem. Eritque Sphæræ Portio FspsF, expoſitæ Sphæroideos Portioni ΦσpσΦ correſpondens.

Eſtque hæc Sphæræ Portio; idem atque Semiſegmentum DspsD (quod Semi-dolio reſpondet, eſtque magnitudinis notis methodis inveſtigabilis; &. ſpeciatim per prop. præced. vel prop. 16. hujus.) Additâ, Demptâve, (prout FKF ſupra infrave Centrum fuerit,) Segmenti Portione FFDD; planis FF, DD, FD, FD, interjectâ; quam portionem inveſtigare, eſt potiſſima totius negotii difficultas.

(Quò autem multiplices Solidi ſectiones, in plano utcunque exhibitæ, meliùs percipiantur: Rem eam pluribus figuris explicare viſum eſt: Quarum fig. 194. exhibet Sphæram Sphæroidi inſcriptam, ſimpliciſſima projectione. Fig. 195. exhibet Sphæram, figuræ præcedenti exemptam, atque aliter projectam, quò partes ejus detegantur: Et fig. 196. ejuſdem Octantem (planis quadrantalibus PCc, PCB, cCB, toti exſectum,) quò minor ſit linearum confuſio. Item duos circulos Ss, fig. 194. hoc eſt SfdsdfS, fig. 195. ſeorſum exhibet Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

hibet

Fig. 194, 195, 196, 197, 198. hibet figura 197. Circulumque LFKFL fig. 194. hoc est, Lfkf Lfk fL fig. 195. seorsum exhibet figura 198.)

Constat autem ea Portio FFDD, (potissimum investiganda,) ex Quinque Solidis Pyramidalibus, Conicisve: Quorum communis Vertex, est C Centrum: Basésque, ipsæ Portionis Superficies FD, FD, FF, planæ; duæque Curvæ DFFD, DFFD, fig. 194. (seu potius dffd, dffd, fig. 195.) Planis illis, planoque DD, terminatæ: Altitudinésque, Superficierum illarum à Centro Distantiæ.

Quantæque sint illæ Superficies Curvæ DFKFD, fig. 194. seu potius dfkfd, fig. 195. (quæ sola superest difficultas; reliqua siquidem, notis methodis, facilè investigantur;) invenire docui, in subjunctis meo, *De Cycloide*, Tractatui, pag. 122. atque hic in prop. 24. hujus.

Nempe; Si intelligatur (fig. 195, 196.) fgf, arcus Circuli Maximi, ipsi fkf arcui Minoris Circuli conterminus; & compleatur Pfgf Triangulum Sphæricum: Hujus Trianguli Sphærici Pfgf magnitudo innotescit; utpote tum alibi tradita, tum hic ad § D. prop. 24. hujus. Atque innotescit Trilinei Pfkf magnitudo, ex cognito angulo fPf, seu ratione arcûs fkf ad peripheriam sui circuli: (per § B, C, prop. 24. hujus.) Adeóque & magnitudo Bilinei fkfgf, illorum differentia. Sed &, ex cognito Angulo gBd, seu Arcûs fd ratione ad Peripheriam sui circuli, similiter innotescit magnitudo Quadrilinei Sphærici dfgfd. Ergo & (dempto Bilineo) Quadrilinei dfkfd magnitudo.

Denique; Ex magnitudine Portionis Segmenti Sphærici sic inventâ; Habetur etiam Portionis Segmenti Sphæroideos correspondentis Magnitudo. Est utique hæc ad illam, ut Sphæroides ad inscriptam Sphæram; (sive ut Axium Major ad Minorem:) propter Plana Planis respectivè sumptis æqualia, & ad Axes in eâ ratione constitutos ordinatim-posita. Quæ est totius Problematis constructio.

Calculus huic Constructioni respondens.

1. Data Circuli, in Sphæroide Medii, Semidiameter; seu Radius inscriptæ Sphæræ; CP = CB = Cs = CS = Cf; dicatur *R*: Ejúsque Peripheriæ Quadrans, *Q*; quæ sit & Anguli Recti mensura.

2. Data Circulorum, in Sphæroideos frusto, Extremorum, (fig. 197. seorsum etiam exhibitorum) Semidiameter $\delta\Sigma$ = DS = Dd; dicatur

dicatur $a R$. (Facto scilicet, ut CP, ad DS; sic 1 ad a. Et sic alibi.) Estque, Sinus Rectus arcûs $BS = Bf$. Fig. 194, 195, 196, 197.

3. Hujus Co-sinus, seu Sinus Complementi; hoc est, Sinus Arcûs $SP = fg$; est $HS = CD = KF = \sqrt{:R^2 - a^2R^2:} = R\sqrt{:1 - a^2}$. Qui dicatur (brevitatis gratia) αR.

4. Ut BB ad SS, seu CB ad HS; hoc est, ut R ad αR, seu 1 ad $\alpha = \sqrt{:1 - a^2}$: Sic est integra Sphæræ Superficies, seu Quatuor Circuli maximi, $8RQ$; ad superficiem Zonæ SssS, $= 8\alpha RQ$.

5. Hæc Superficies, ducta in $\frac{1}{3}R$, exhibet magnitudinem Zonæ Solidæ, (intellige, Segmenti SDssDS, exemptis duobus Conis, SCs, SCs,) SCspsCSP $= \frac{8}{3}\alpha R^2Q$.

6. Ut Quadratum Radii CP; ad Quadratum Radii DS, hoc est, ut R^2 ad a^2R^2, seu ut 1 ad a^2: Sic est Circulus Maximus $2RQ$, ad Circulum SDs $= 2a^2RQ$.

7. Circulus hic SDs, ductus in $\frac{1}{3}CD = \frac{1}{3}\alpha R$; exhibet Magnitudinem Coni SCsD, $= \frac{2}{3}\alpha a^2R^2Q$.

8. Hujusmodi Coni duo, una cum Zonâ Solidâ (§ 5. inventâ,) exhibent Segmentum Solidum SDssDS, $= \frac{8}{3}\alpha R^2Q + \frac{4}{3}\alpha a^2R^2Q$. Adeoque Semisolidum DssD, $= \frac{4}{3}\alpha R^2Q + \frac{2}{3}\alpha a^2R^2Q$.

9. Data summi Liquoris FKF, supra infráve Centrum, Altitudo $CK = DF$, dicatur bR. Estque, Sinus Rectus arcûs BL.

10. Hujusque Co-sinus, seu Sinus Arcûs $LP = fP$; est $KL = Kk = \sqrt{:R^2 - b^2R^2:} = R\sqrt{:1 - b^2}$. Qui dicatur (brevitatis ergô) βR.

11. Ut $KL = \beta R$, ad R; seu ut $\sqrt{:1 - b^2:}$ ad 1: Sic est recta $KF = \alpha R$, ad $\frac{\alpha}{\beta}R = R\sqrt{\frac{1 - a^2}{1 - b^2}}$; sinum arcus fk in suo circulo, sive Anguli $fKk = fPk = fPg$; Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur cQ.

12. Hujusque Co-sinus seu sinus Arcûs fL in suo circulo, seu Anguli $fKL = fPL$; est $\sqrt{:R^2 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}R^2:} = R\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta^2}} = \frac{R}{\beta}\sqrt{:\beta^2 - \alpha^2:} = \frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2}$.

13. Ut $DS = aR$, ad R; seu ut a ad 1: Sic $DF = bR$, ad $\frac{b}{a}R$, Sinum Arcus fd in suo Circulo, seu Anguli $fDd = gBd$. Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur dQ.

14. Ut

Fig. 194, 14. Ut tota Peripheria, seu Quatuor Recti, $4\,Q$; ad Arcum
195, seu Angulum $d\,Q$; sive ut 4 ad d: Sic est Zonæ totius SssS
196. superficies, $8\,a\,R\,Q$; ad Quadrilineum Sphæricum dfgfd, $= 2\,d\,a\,R\,Q$.

15. Ut Pp $= 2\,R$, ad PK = CP — CK $= R - b\,R$; sive ut 2, ad $1 - b$: Sic integra Sphæræ superficies, $8\,R\,Q$; ad segmenti PLKLP superficiem, $= 4\,R\,Q - 4\,b\,R\,Q$.

16. Ut tota Peripheria, seu quatuor Recti, $4\,Q$; ad Angulum fPf = 2 fPg $= 2\,c\,Q$; sive ut 2 ad c: Sic Segmenti PLKLP superficies, $4\,R\,Q - 4\,b\,R\,Q$; ad Trilineum Sphæricum PfkfP, $= 2\,c\,R\,Q - 2\,b\,c\,R\,Q$.

17. In Triangulo Sphærico Rectangulo fgP; Ut Co-sinus arcûs fg, seu arcus Bf Sinus $a\,R$; ad Co-sinum Anguli fPg, seu Anguli fPL Sinum, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2:}$ Sive ut $a\,\beta$ ad $\sqrt{:a^2 - b^2:}$ Sic Radius, ad $\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\,\beta}R$ Sinum Anguli Pfg. (Nempe per doctrinam Trigonometricam.) Qui (per Canonem Sinuum inveniendus) dicatur $e\,Q$.

18. Ut duo Anguli Recti, $2\,Q$; ad Trium Angulorum, Trianguli sphærici Pfgf, excessum supra Duos rectos, $2\,c\,Q + 2\,e\,Q - 2\,Q$: Hoc est, ut 1 ad $c + e - 1$: Sic est Circulus in Sphærâ Maximus, $2\,R\,Q$; ad istius Trianguli Sphærici Pfgf Magnitudinem, $2\,c\,R\,Q + 2\,e\,R\,Q - 2\,R\,Q$.

19. Triangulum hoc, Pfgf, ex Trilineo Pfkf (invento § 16.) exemptum, relinquit Bilineum fkfgf $= 2\,R\,Q - 2\,e\,R\,Q - 2\,b\,c\,R\,Q$.

20. Atque hoc Bilineum, ex Quadrilineo dfgfd (invento § 14.) exemptum, relinquit Quadrilineum dfkfd, $= 2\,a\,d\,R\,Q + 2\,b\,c\,R\,Q + 2\,e\,R\,Q - 2\,R\,Q$.

21. Atque hoc Quadrilineum, in $\frac{1}{3}R$ ductum; exhibet Sectorem Sphæricum Cdfkfd, $= \frac{2}{3}\,a\,d\,R^2\,Q + \frac{2}{3}\,b\,c\,R^2\,Q + \frac{2}{3}\,e\,R^2\,Q - \frac{2}{3}\,R^2\,Q$.

22. Ut CP $= R$, ad Kk = KL $= \beta\,R$; (fig. 195, 198.) sive ut 1 ad β: Sic Anguli fKk arcus $c\,Q$, ad longitudinem arcus fk, $= \beta\,c\,Q$: Et sic Anguli fKF = fKL Sinus, $\frac{R}{\beta}\sqrt{:a^2 - b^2:}$ ad rectam fF, $= R\sqrt{:a^2 - b^2}$.

23.

23. Kk $= \beta R$, ducta in fk $= \beta c \mathcal{Q}$; exhibet Sectorem fKf $= \beta^2 c R \mathcal{Q} = c R \mathcal{Q} - b^2 c R \mathcal{Q}$. Atque hic ductus in $\frac{1}{3}$ CK $= \frac{1}{3} b R$, exhibet Coni portionem CfKf $= \frac{1}{3} bc R^2 \mathcal{Q} - \frac{1}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q}$. Fig. 194, 195, 196.

24. KF $= \alpha$ R, ducta in fF $= R \sqrt{: a^2 - b^2}$: exhibet Triangulum KfFf $= \alpha R^2 \sqrt{: a^2 - b^2}$. Atque hoc ductum in $\frac{1}{3}$ CK $= \frac{1}{3} b R$, exhibet Pyramidem CKfFf $= \frac{1}{3} \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$. Cui (propter CK = DF, KF = CD, adeoque $\frac{1}{3}$ CK × KF × Ff $= \frac{1}{3}$ CD × DF × Ff,) æqualis est Pyramis CDff.

25. Ut CP $= R$, ad DS $= \alpha R$; seu ut 1 ad α: Sic Arcus Anguli fDd $= d \mathcal{Q}$, ad Arcum fd $= \alpha d \mathcal{Q}$. Qui ductus in Dd $=$ DS $= \alpha R$, exhibet binos Sectores, 2 fDd $= a^2 d R \mathcal{Q}$. Qui ducti in $\frac{1}{3}$ CD $= \frac{1}{3} \alpha R$, exhibent binas Coni Portiones, 2 CfDd, $= \frac{1}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q}$.

26. Additis igitur Binis Sectoribus (§ 21.) 2 Cdfkfd $= \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} b c R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q}$: Atque Binis Coni portionibus (§ 23.) 2 CfKf $= \frac{2}{3} b c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q}$; Binisque Pyramidibus (§ 24.) 2 CKff $= \frac{2}{3} \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$: (quæ cum binis illis portionibus Coni, complent Solidum Conicum, basis quadrilineæ, CfFfkfFfk:) Binisque Pyramidibus (§ 24.) 2 CDff $= \frac{2}{3} \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$; & bis binis Coni portionibus (§ 25.) 4 CfDd $= \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q}$, (quæ cum binis Pyramidibus CDff, complent bina Solida Conica Cddff:) Habetur Segmenti Portio ddddffff, $= \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} + 2 b c R^2 \mathcal{Q} - \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} - \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} + \frac{4}{3} \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$.

27. Atque hoc Additum vel Subductum (prout Segmentum Majus, Minusve requiratur) Semisegmento (§ 8.) dsdCdsd $= \frac{4}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q}$: Exhibet Sphæræ Segmentum Majus, Minusve; FspsFK, vel FSPSFK; $= \frac{4}{3} \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} \alpha d R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{2}{3} \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} \pm 2 b c R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{2}{3} b^3 c R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$.

28. Denique; Data Vasis Semi-longitudo, seu ratio Cβ, ad CD; hoc est, Ratio Cβ, ad CD; ponatur ut f ad 1. Eritque expositum Sphæroideos Segmentum Majus, Minusve; $\Phi \sigma$ p $\sigma \Phi$, vel $\Phi \Sigma$ P $\Sigma \Phi$; $= \frac{4}{3} f \alpha R^2 \mathcal{Q} + \frac{2}{3} f \alpha a^2 R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f \alpha d R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{2}{3} f \alpha a^2 d R^2 \mathcal{Q} \pm 2 f b c R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{2}{3} f b^3 c R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f e R^2 \mathcal{Q} \mp \frac{4}{3} f R^2 \mathcal{Q} \pm \frac{4}{3} f \alpha b R^3 \sqrt{: a^2 - b^2}$. Quod propositum erat inquirendum.

Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

Calculi Synopsis.

§ 1. R; Data Semidiameter Major, seu Radius inscriptæ Sphæræ; CP.
§ 2. aR; Data Semidiameter Minor; DS.
§ 9. bR; Data Altitudo supra infrave Centrum; CK.
§ 28. fR; Semi-longitudo Conoideos; Cβ.
§ 3. $\alpha = \sqrt{:1 - a^2}$.
§ 10. $\beta = \sqrt{:1 - b^2}$.
§ 1. Q; Angulus Rectus; vel Quadrans Peripheriæ Circuli Maximi.

§ 11. cQ, § 13. dQ, § 17. eQ } Anguli, vel Arcus Circuli maximi, respondentes Sinibus rectis { $\frac{\alpha}{\beta}R$. $\frac{b}{a}R$. $\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{\alpha\beta}R$.

$+\frac{4}{3}R^2Q$; Sphæra integra, BpBP.
$+\frac{2}{3}R^2Q$; Hemisphærium, BBP.
$+\frac{2}{3}bR^2Q$; Zona Solida BLCLB, }
$+\frac{2}{3}b\beta^2R^2Q$; Conus LCLK, } Segmentum BLLB.
$+\frac{2}{3}aR^2Q$; Zona Solida BSCSB, }
$+\frac{2}{3}a\alpha^2R^2Q$; Conus SCSH, } Segmentum BSSB.

§ 5. $+\frac{2}{3}aR^2Q$, Semizona solida SCSP, }
§ 7. $+\frac{2}{3}a\alpha^2R^2Q$, duo Semiconi 2DCS, } § 8. Semisegmentum SDDSP

§ 14. $+\frac{4}{3}\alpha dR^2Q$, }
§ 19. $+\frac{4}{3}eR^2Q$, }
§ 19. $-\frac{4}{3}R^2Q$, }
§ 19. $+\frac{4}{3}bcR^2Q$, } § 20. 21. duo Sectores 2FFCDD, seu potius 2CfkfdD,
§ 23. $+\frac{2}{3}bcR^2Q$, }
§ 23. $-\frac{2}{3}b^3cR^2Q$, } duæ portiones Coni, 2CKfkf,
§ 24. $+\frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2:}$ duæ Pyramides, 2CKfFf, } § 26. Pyram. FCF
§ 24. $+\frac{2}{3}\alpha bR^3\sqrt{:a^2 - b^2:}$ duæ Pyramides, 2CDfFf, }
§ 25. $+\frac{2}{3}\alpha a^2dR^2Q$, bis binæ Portiones Coni, 2CDfd, } § 26. 2 Pyram. FCD

$+$ vel $-$ § 26. Intersegmentum DFFD.

§ 27. FspsF, major vel FSPSF, minor } Portio.

§ 28. Hæc ducta in f; sunt Homologæ partes Conoideos.

Exemplum

Exemplum Calculi.

Posito $R=1$. Circulus Maximus, $2RQ = 3.1415926\frac{1}{2}$ Fig. 194, 195.
Erit $Q = 1.5707963\frac{1}{4}$ Superficies Sphæræ, $8RQ = 12.5663706$
$\frac{1}{3}Q = 0.5235987\frac{1}{4}$ Superf. Hemisphærii, $4RQ = 6.2831853$
Sphæra integra, B p B P, $\frac{8}{3}R^2Q$, $= 4.1887902$
Hemisphærium, B B P, $\frac{4}{3}R^2Q$, $= 2.0943951$

Casus I.

$a=0.75$ $a^2=0.5625$ $\alpha^2=1-a^2=0.4375$ $\alpha=0.6614378\frac{1}{4}$
$b=0.5$ $b^2=0.25$ $\beta^2=1-b^2=0.75$ $\beta=0.8660254+$
$a^2-b^2=\beta^2-\alpha^2=0.3125$ $\sqrt{:a^2-b^2:}=0.5590169+$
$4+2a^2=5.125$ $4\alpha+2a^2\alpha=3.3898688\frac{1}{2}$

Segmentum SspCP, vel semisegmentum SDDSP,

$\frac{4+2a^2}{3}\alpha R^2Q$ $=1.7749312-$

Segmentum integrum S s p s S P, (istius duplum,) $=3.5498624-$
Segmentum S s B, vel 2 SDB, (=BBP—SDDSP,) $=0.3194639+$
Semisegmentum S D B, (istius semissis,) $=0.1597319\frac{1}{2}$
$4+2\alpha^2=4.875$ $4a+2\alpha^2 a=3.65625$

Segmentum B S S B, $\frac{4+2\alpha^2}{3}a R^2 Q$, $=1.9144080+$

Segmentum S S P, (= B B P — B S S B,) $=0.1799871-$
Segmentum D S S D, (= S D D S P — S S P
= B S S B — 2 S D B,) $=1.5949441-$
$4+2\beta^2=5.5$ $4b+2\beta^2 b=2.75$

Segmentum B L L B, $\frac{4+2\beta^2}{3}b R^2 Q$, $=1.4398966\frac{1}{2}$

Segmentum L L P, (= B B P — B L L B,) $=0.6544984\frac{1}{2}$
Segmentum L S S L, (= B S S B — B L L B,) $=0.4745113\frac{1}{2}$

$\frac{\alpha}{\beta}R=0.7637626\frac{1}{6}$ Sin. An. gr. 49. 47′, 8225. $=\frac{0.5533005}{1.0000000}Q=cQ$.

$\frac{b}{a}R=0.6666666\frac{2}{3}$ Sin. An. gr. 41. 48′, 6186. $=\frac{0.4645590}{1.0000000}Q=dQ$.

$a\beta=0.6495190\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{:a^2-b^2:}}{a\beta}R=0.8606628\frac{1}{3}$ Sin. Ang. gr. 59. 23′, 4658

$=\frac{0.6599010}{1.0000000}Q=eQ$.

Fig. 194. 195. $c = 0.5533005$ $d = 0.4645590$ $e = 0.6599010$

(Verum hic, adeoque in iis quæ hinc dependent, ultima nota, fortassis & penultima, sunt in ambiguo; eo quod Canon Sinuum ad tantam ἀκρίβειαν vix patitur pervenire.)

$6b - 2b^3 = 2.75$ $6bc - 2b^3c = 1.5215764$ $4e = 2.6396040$

$$\left.\begin{array}{lr} + \frac{6-2b^2}{3} bc R^2 Q = & 0.7066955 \\ + \frac{4+2a^2}{3} ad R^2 Q = & 0.8245649 \\ + \frac{4}{3} e R^2 Q = & 1.3820935 \\ - \frac{4}{3} R^2 Q = & -2.0943951 \\ + \frac{4}{3} ab R^3 \sqrt{:a^2 - b^2} = & 0.2465033 \end{array}\right\} = \text{Intersegment. DFFD,} = 1.1554621. \text{ saltem } 1.15546 \text{ proxime.}$$

Frusti Sphæ- { Major, FspsF, (= SDDSP + DFFD) = 2.9303933
rici Portio { Minor, FSPSF, (= SDDSP — DFFD,) = 0.6194691

Abscissa 2LFDB, (= BLLB — DFFD,) = $0.2844345\frac{1}{2}$

LFDB = 0.1422173 −

2SFL, (= LLP — FSPSF = 2FDB — 2LFDB,) = $0.0350293\frac{1}{2}$

SFL = 0.0175147 −

Casus II.

$a = 0.8$ $a^2 = 0.64$ $\alpha^2 = 1 - a^2 = 0.36$ $\alpha = 0.6$

$b = 0.6$ $\beta^2 = 0.36$ $\beta^2 = 1 - b^2 = 0.64$ $\beta = 0.8$

$a^2 - b^2 = \beta^2 - \alpha^2 = 0.28$ $\sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.5291502\frac{1}{2} +$

$4 + 2a^2 = 5.28$ $4\alpha + 2a^2\alpha = 3.168$

$$\text{SDDSP} = \frac{4 + 2a^2}{3} \alpha R^2 Q = 1.6587609 +$$

SspsSP (= 2SDDSP) = 3.3175218 +

SsB = 2SDB (= BBP — SDDSP) = 0.4356342 −

SDB = 0.2178171 −

$4 + 2\alpha^2 = 4.72$ $4a + 2\alpha^2 a = 3.776$

$$\text{BSSB} = \frac{4 + 2\alpha^2}{3} a R^2 Q = 1.9771090 +$$

SSP (= BBP — BSSB) = 0.1172861 +

DSSD (= SDDSP — SSP = BSSB — 2SDB) = 1.5414748

$4 + 2\beta^2 = 5.28$ $4b + 2\beta^2 b = 3.168.$

$$\text{BLLB} = \frac{4 + 2\beta^2}{3} b R^2 Q = 1.6587609 +$$

LLP (= BBP — BLLB) = 0.4356342 −

LSSL (= BSSB — BLLB) = 0.3183481 −

$\frac{a}{\beta}R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35', 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathcal{Q} = c\,\mathcal{Q}$. Fig. 194, 195, 196, 197, 198.

$\frac{b}{a}R = 0.75$ Sinus Ang. gr. 48. 35', 4229 $= \frac{0.5398931}{1.0000000} \mathcal{Q} = d\,\mathcal{Q}$.

$a\beta = 0.64$

$\frac{\sqrt{:a^2 - b^2:}}{a\beta} R = 0.8267973$ — Sinus Ang. gr. 55. 46', 2682

$= \frac{0.6196793}{1.0000000} \mathcal{Q} = e\,\mathcal{Q}$.

$c = 0.5398931$ $d = 0.5398931$ $e = 0.6196793$

$6b - 2b^3 = 3.168$ $6bc - 2b^3c = 1.7103814$ $4e = 2.4787172$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{6-2b^2}{3} bc R^2 \mathcal{Q} = 0.8955536 \\ +\frac{4+2a^2}{3} ad R^2 \mathcal{Q} = 0.8955536 \\ +\frac{4}{3} e R^2 \mathcal{Q} = 1.2978533 \\ -\frac{4}{3} R^2 \mathcal{Q} = -2.0943951 \\ +\frac{4}{3} abR^3 \sqrt{:a^2 - b^2:} = 0.2539921 \end{array}\right\} = \text{Intersegment. DFFD} = 1.2485575 \text{. saltem } 1.24856 \text{ proxime.}$$

Frusti Sphærici, Portio $\begin{cases} \text{Major, FspsF, } (= \text{SDDSP} + \text{DFFD}) = 2.9073184 \\ \text{Minor, FSPSF, } (= \text{SDDSP} - \text{DFFD,}) = 0.4102034 \end{cases}$

2LFDB (= BLLB — DFFD) = 0.4102034

LFDB = 0.2051017

2SFL (= LLP — FSPSF = 2SDB — 2LFDB) = 0.0254308

SFL = 00.127154

Atque ad eandem formam procedendum erit in aliis casibus quibuscunque prout alii atque alii valores ponuntur datarum magnitudinum *a* & *b*.

Inventis autem (pro casibus assignatis quibusvis) Portionibus Frusti Sphærici; habentur correspondentes portiones Frusti Sphæroideos, ductis singulis in *f*; quæcunque fuerit ea ratio, Axis Sphæroideos ad Diametrum Sphæræ; ($\beta\beta$ ad BB, vel Cβ ad CB = CP, vel Cδ = Kϕ ad CD = KF = HS Co-sinum dati DS, in Circulo Radii CP;) quam appellamus, *f* ad 1.

Fig. 199, 200.

PROP. XXVII.

A.B. Figura Spiralis (lineâ Spirali à principio orsâ, & rectâ conterminâ, terminata) est contermini Sectoris Triens: Toties repetitis omnibus, quoties iteratò describuntur.

C. Sumptisque angulis A M T, A M T, &c. arithmetice proportionalibus; si Figura Spiralis primo conveniens ponatur 1; eadem per duos continuata, erit 8; per tres, 27; per quatuor, 64; & sic deinceps, secundum numeros cubos continuè sequentes.

B. Totáque figura circulationis primæ, est contermini circuli primi Triens; &, duarum circulationum (repetito quod in secundâ iteratò describitur, quod ubique intelligendum est,) ejusdem Circuli primi Octo trientes; Trium Circulationum, ejusdem viginti septem Trientes, (seu totius Noncuplum;) Quatuor Circulationum, ejusdem Sexaginta quatuor Trientes, & sic deinceps.

Et, universaliter, (Posito *R* pro circuli primi Radio; *P*, pro ejusdem peripheria; angulique circulationis quousque libet continuatæ ratione ad quatuor rectos; vel correspondentis arcus circuli Primi, ad integram ejus Peripheriam: ut *a* ad *P*;) Figuræ Spirales sic descriptæ (repetitis toties omnibus quoties describuntur) Magnitudo est $\frac{a^3 R}{6P^2}$.

D. Adeóque, quæ continuis Circulationum angulis æqualibus conveniunt figuræ Spirales, sunt ut numerorum cuborum

rum continuè ſequentium 0, 1, 8, 27, 64, 125, &c. Differentiæ ; 1, 7, 19, 37, 61, &c.

Et ſpeciatim quod Circulatione Primâ deſcribitur, eſt contermini Circuli primi Triens ; quod ſecundâ, ejuſdem Primi Circuli Septem trientes ; quod Tertiâ, ejuſdem Trientes Novendecim ; quod Quartâ, ejuſdem Trientes Triginta-ſeptem ; quod Quintâ, ejuſdem Trientes Unus & ſexaginta. Et ſic deinceps.

Figuræ Spiralis (à Principio orſæ) quouſque libet continuatæ, toties repetitis omnibus quoties iteratò deſcribuntur: (poſito s pro ſinu recto anguli circulationis, ad Radium R; & x pro ſinu complementi; ipſoque s, pro Semicirculis ſecundo, quarto, ſexto, octavo, cæteriſque in locis paribus, per contrarium ſignum ſemper expoſito, utpote ad contrarias diametri partes poſito:) Momentum reſpectu rectæ PMF, eſt E.

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde diſtantia,

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^3 + 2a^3vR}{a^3P}:$$

Et quidem vel ad partes E, vel ad partes G, prout ſignum +, vel —, prævaluerit.

Ejuſque Momentum reſpectu rectæ EMG, H.

$$\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3};$$

Centrique gravitatis inde diſtantia,

$$\frac{12vR^4 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}:$$

Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, prout ſignum +, vel —, prævaluerit.

Et ſpeciatim, Circulationis Quadrantalis, Unius; Magnitudo, $\frac{1}{384}RP$; Reſpectu PMF, verſus E, Momentum, D. F.

mentum, $\frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; Diſtantia Centri gravitatis, $\frac{-768R^5+24R^3P^2}{P^4}$: Reſpectu EMG,

I. verſus P, Momentum, $\frac{384R^6-96R^5P+R^3P^3}{192P^3}$; Diſtantia, $\frac{768R^5-192R^4P+2R^2P^3}{P^4}$.

D. Duarum; Magnitudo, $\frac{8}{384}RP=\frac{1}{48}RP$: Reſpectu
F. PMF, verſus E, Momentum $\frac{-24R^5+R^3P^2}{24P^2}$; Diſtantia, $\frac{-48R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu EMG,
I. verſus F, Momentum $\frac{-16R^6+R^4P^2}{4P^3}$; Diſtantia, $\frac{-192R^5+12R^3P^2}{P^4}$.

D. Trium; Magnitudo, $\frac{27}{384}RP=\frac{9}{128}RP$: Reſpectu
F. PMF, verſus G, Momentum $\frac{-32R^6+9R^4P^2}{16P^3}$; Di-
I. ſtantia, $\frac{-256R^5+72R^3P^2}{9P^4}$: Reſpectu EMG, verſus F, Momentum $\frac{-128R^6-96R^5P+9R^3P^3}{64P^3}$; Diſtantia, $\frac{-768R^5-576R^4P+54R^2P^3}{P^4}$.

D. Quatuor; Magnitudo, $\frac{64}{384}RP=\frac{1}{6}RP$: Reſpectu PMF,
F. verſus G, Momentum, $\frac{-6R^5+R^3P^2}{3P^2}$; Diſtantia,
I. $\frac{-12R^4+2R^2P^2}{P^3}$: Reſpectu EMG, verſus P, $\frac{R^4}{P}$; Diſtantia, $\frac{6R^3}{P}$

Quinque;

Quinque; $\frac{125}{384}RP$: Respectu P M F, versus E, D.F.

Momentum, $\frac{-32R^6+25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia,

$\frac{-768R^5+600R^3P^2}{125P^4}$: Respectu E M G, versus P, I.

Momentum, $\frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$; Distantia,

$\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Atque in reliquis similiter.

Adeoque; Secundæ, Magnitudo, $\frac{7}{384}RP$: Respectu PMF, D.F.

versus E, Momentum, $\frac{96R^6-48R^5P-3R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{768R^5-384R^4P-24R^3P^2+16R^2P^3}{7P^4}$:

Respectu E M G, versus F, momentum, I.

$\frac{-384R^6-96R^5P+48R^4P^2+R^3P^3}{192P^3}$; Distantia,

$\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$.

Tertiæ; Magnitudo, $\frac{19}{384}RP$: Respectu P M F, versus G, D.F.

Momentum, $\frac{-96R^6-48R^5P+27R^4P^2+2R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{-768R^5-384R^4P+216R^3P^2+16R^2P^3}{19P^4}$:

Respectu E M G, versus F, Momentum, I.

$\frac{128R^6-96R^5P-16R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia,

$\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Quartæ; Magnitudo, $\frac{37}{384}RP$: Respectu P M F, versus D.F.

 G,

G, Momentum, $\frac{96R^6 - 96R^5P - 27R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{768R^5 - 768R^4P - 216R^3P^2 + 128R^2P^3}{37P^4}$;

I. Respectu EMG, versus P, Momentum, $\frac{-128R^6 - 96R^5P + 64R^4P^2 + 9R^3P^3}{64P^3}$; Distantia, $\frac{-768R^5 - 576R^4P + 384R^3P^2 + 54R^2P^3}{37P^4}$.

D.F. Quintæ; Magnitudo, $\frac{61}{384}RP$: Respectu PMF, versus E, Momentum, $\frac{-96R^6 - 96R^5P + 75R^4P^2 + 16R^3P^3}{48P^3}$;

Distantia, $\frac{-768R^5 - 768R^4P + 600R^3P^2 + 128R^2P^3}{61P^4}$:

I. Respectu EMG, versus P, Momentum, $\frac{384R^6 - 480R^5P - 192R^4P^2 + 125R^3P^3}{192P^3}$; Distantia, $\frac{768R^5 - 960R^4P - 384R^3P^2 + 250R^2P^3}{61P^4}$.

Et similiter in cæteris.

G.K. Quæque de *Figura Spirali* tradita sunt; eadem *Solido Scalari* facilè accommodantur.

A. Fig. 199, 200. SIt MTT Spiralis *Archimedea*; cujus natura hæc est: Dum recta quæpiam, ut MA, à situ suo MA (quod *Circulationis Principium* vocant) manente puncto M ut Centro (quod vocant *Principium Spiralis*) æquabiliter circumducta, describit circulum AOOA (quem vocant *Circulum primum*;) intelligitur Punctum aliquod T (quod voco *Punctum Lineans*) eodem tempore ab M ad A in circumductâ rectâ MA æquabiliter promotum, motu hoc composito Spiralem MTTA describere, (quem vocant *Spiralem Primæ circulationis*:) eisdémque motibus continuatis, dum eadem recta MA, tantundem ad B protracta, hoc est MAB, secundò circumducta, describit BOOB *Circulum secundum*; Punctum illud Lineans, similiter ab A ad B promota, describit ATTB Spi-

Spiralem circulationis Secundæ: Et sic deinceps, ad tertiam, quartam, aut etiam plures circulationes, quousque libet. Fig. 199, 200.

Manifestum itaque est (ex constructione) rectas M T, respectivis angulis A M T, vel arcubus A O, (propter æquabilem utrobique motum) proportionales esse: Nempe, Quota pars est Arcus A O totius Peripheriæ; vel Angulus A M T, quatuor rectorum; ea pars est M T respectiva, totius M A: Vel etiam (sumptâ *Anguli* appellatione, laxiori sensu, pro Angulorum quotlibet Aggregato, quamquam duos rectos, aut etiam plures, vel æquet, vel superet; *Arcûsque* appellatione, pro Arcuum aggregato quovis, etiamsi superet integram Circuli Peripheriam; ut & *Sectoris* nomine, pro Sectorum quotlibet Aggregato, utut integrum Circulum vel etiam plures superet;) Quam habet rationem A M T Angulus (sic sumptus) ad quatuor rectos; vel correspondens arcus A O, ad peripheriam integram A O A; eam habet respectiva recta M T, ad M A. Et sic ubique.

Et, consequenter; si intelligatur Figuræ Spirali M T T M (curvâ M T T rectâque M T, sumpto ubivis T ultimo, comprehensa) aptari figura ex similibus Sectoribus conflata; (quorum commune Centrum sit M, principium Spiralis;) erunt eorum Radii Arithmeticè proportionales, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. si figuram inscriptam consideremus; vel ut 1, 2, 3, 4, 5, &c. si circumscriptam; aut etiam ut $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$, &c. hoc est ut 1, 3, 5, 7, 9, &c. si his intermediam, partim inscriptam, partim circumscriptam; quæ omnia, in partibus infinitè exiguis, tantundem valent, ut ad prop. 1. hujus ostensum est:) Nempe, ut Series *Primanorum*. Adeoque Sectores ipsi (utpote in duplicatâ ratione Radiorum,) ut Series *Secundanorum*.

Et, consequenter, eorum Aggregatum, ad Aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est (per def. 1. cap. 4.) M T M figura Spiralis, ad Sectorem conterminum P T M; ut 1 ad 3; (per prop. 1. hujus:) ubicunque sumatur T ultimum. Puta (posito ultimo T in V,) M T T V M $= \frac{1}{3}$ M V P M. Et sic ubique.

Et speciatim, Figura Spiralis Primæ Circulationis, æqualis Trienti Circuli Primi: Et Figura Spiralis Duarum Circulationum (bis computato quod bis describitur,) æqualis Trienti Circuli Secundi bis sumpti (ut qui Radio maximo bis circumducto bis describitur:) Figura Spiralis Trium Circulationum (à principio semper ordiendo,) toties computando quamlibet partem quoties iteratò describitur, (quippe quod primâ circulatione describitur, id in secundâ repetitur; totúmque B.

 que

Fig. 199, 200. quehoc, in tertiâ; & sic deinceps;) æqualis Trienti Circuli Tertii ter sumpti (utpote qui à Radio maximo, ter circumducto, ter describitur:)

Et sic semper, ubicunque tandem terminetur (sive in absolutæ alicujus Circulationis termino, sive loco quovis intermedio:) Nempe, Figuram Spiralem, Trientem esse Sectoris contermini, toties repetitis omnibus quoties ea iteratò describuntur, sive à Radiis crescentibus intra Spiralem, sive à Radio maximo in contermino Sectore.

C. Sumptis igitur, ad idem M punctum, (à Principio Circulationis ordiendo,) angulis continuis quotlibet æqualibus, (cujuscunque magnitudinis,) ut P M 1, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. quæ (à Spiralis Principio orsæ) huc pertingunt Figuræ Spirales; (puta M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, M 1 2 3 4 M, &c.) sunt ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubi continuè sequentes; sive ut Series Tertianorum. Cum enim (per ipsam spiralis constructionem) Radii M 1, M 2, M 3, &c. sint arithmeticè proportionales, seu ut Series Primanorum; puta ut a, $2a$, $3a$, &c. adeoque Sectores similes ad hos Radios (utpote in Radiorum ratione duplicatâ,) ut a^2, $4a^2$, $9a^2$, &c. Series Secundanorum: Erunt (propter ipsos Sectorum angulos arithmetice proportionales, similiter crescentes ut a, $2a$, $3a$, &c.) Sectores M 1 P, M 2 P, M 3 P, &c. ut a^3, $8a^3$, $27a^3$, &c. (nempe in eâ ratione quæ componitur ex ratione Angulorum, & ex duplicatâ ratione Radiorum,) quæ est ut series Tertianorum. Adeoque & Conterminæ Figuræ Spirales, M 1 M, M 1 2 M, M 1 2 3 M, &c. (utpote Sectorum illorum Trientes, ut modò ostensum est,) ut $\frac{1}{3}a^3$, $\frac{8}{3}a^3$, $\frac{27}{3}a^3$, &c. series item Tertianorum; seu ut 1, 8, 27, &c. numeri cubi.

D. Et, consequenter; quæ his continuis angulis æqualibus conveniunt Figuræ Spiralis Portiones; puta M 1 M, 1 M 2, 2 M 3, 3 M 4, &c. ut 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum 0, 1, 8, 27, 64, &c. differentiæ. (Quæ omnia in nostrâ *Arithmetica Infinitorum*, fusius exposuimus; præsertim à prop. 24. ad prop. 38.)

Et, speciatim, sumptis Angulis rectis P M E, E M F, F M G, G M A, A M H, H M I, I M K, K M B, B M L, &c. Positâ figura Spirali M T E M $=1$, erunt M T E F M $=8$, M T E F G M $=27$, M T E F G A M $=64$, &c. Cum itaque sit M T E F G A M triens circuli primi, (ut jam ostensum est;) hoc est, (posito Circuli Primi Radio M A $=R$, & peripheria A O A $=P$, adeoque ipso circulo primo A O A $=\frac{1}{2}RP$,) Figura Spiralis primæ Circulationis M T E F G A M $=\frac{1}{6}RP=\frac{64}{384}RP$: Erit quæ primo quadranti con-

convenit figura Spiralis $\frac{1}{384}RP$; quæ Duobus $\frac{8}{384}RP = \frac{1}{48}RP$; quæ Tribus, $\frac{27}{384}RP = \frac{9}{128}RP$; quæ Quatuor (hoc eſt Figura Spiralis Primæ Circulationis) $\frac{64}{384}RP = \frac{1}{6}RP$; quæ Quadrantibus Quinque (repetito quod erat in primo) $\frac{125}{384}RP$; quæ Sex quadrantibus (repetito quod erat in binis primoribus) $\frac{216}{384}RP = \frac{9}{16}RP$; quæ Septem quadrantibus (repetito quod erat in tribus primoribus) $\frac{343}{384}RP$; quæ quadrantibus Octo; hoc eſt, binis Circulationibus (repetito quod erat in prima) $\frac{512}{384}RP = \frac{4}{3}RP$; quæ Novem quadrantibus (repetitis quæ fuerant prius deſcripta, & quidem toties quoties deſcripta fuerant,) $\frac{729}{384}RP = \frac{243}{128}RP$; & ſic deinceps quouſque opus erit. Nempe, univerſaliter, in ea ratione ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi,) qua eſt a^3 ad P^3, ſeu r^3 ad R^3. Puta $\frac{a^3 R}{6P^2}$, vel $\frac{r^3 P}{6R^2}$. Fig. 199, 200.

Adeoque, quæ Primo quadranti convenit, $MTEM = \frac{1}{384}RP$; quæ Secundo, $EMF = \frac{7}{384}RP$; quæ Tertio, $FMG, = \frac{19}{384}RP$; quæ Quarto, $GMA = \frac{37}{384}RP$; quæ Quinto, $AMH = \frac{61}{384}RP$; quæ Sexto, $HMI = \frac{91}{384}RP$; quæ Septimo, $IMK = \frac{127}{384}RP$; quæ Octavo, $KMB = \frac{169}{384}RP$; quæ Nono, $BML = \frac{217}{384}RP$; & ſic deinceps, quouſque libet, in ratione differentiarum numerorum Cuborum continue ſequentium.

His ita de Figurarum magnitudine conſtitutis; quò Centra gravitatis determinemus, eaſdem ad Duas Diametros, PMF, EMG, ſe mutuò in M decuſſantes, exigemus; earum momenta harum reſpectu, adeoque Centrorum gravitatis ab his diſtantias, inquirendo. Et primò quidem reſpectu ipſius PMF. E.

Sunt autem (ut jam oſtenſum eſt) ſimilium Sectorum infinitè exiguorum (ex quibus conflari intelligitur Figura Spiralis) Radii, ut totidem a, Arcus vel Anguli arithmeticè proportionales; adeoque Sectores ipſi, ut totidem a^2, eorum Quadrata.

Sed & eorum Centra gravitatis R in Sectoris cujuſque medio Radio ſimiliter ſito, utpote quæ ipſius Beſſe (ſeu duobus trientibus) ab M diſtant (propter arcuum infinite-exiguorum quam ſupponimus cum chordis coincidentiam; ſaltem, rationem infinite-exiguam;) per prop. 14. hujus.

Et propterea illorum à PMF diſtantiæ RS, ſunt in ratione Sinuum rectorum, Arcuum ſeu Angulorum arithmeticè proportionalium, ad

Radios

Fig. 199, 200. Radios item (M R) arithmetice-proportionales; puta ut as; hoc est in ratione quæ componitur ex s sinuum angulorum arithmetice proportionalium, & a radiorum similiter in proportione arithmeticâ crescentium.

(Nequis autem hæreat, eò quod non sit idem angulus P M R (cui convenit Sinus R S,) qui est Sectoris P M Y, (propter rectam MRT per medium Sectoris Z M Y incedentem:) Id nihili res est. Quippe, si ponantur anguli P M Y, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt anguli P M R, seu P M T, ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c. Quæ, in partibus innumeris, infinite exiguis, tantundem valet. Ut ad prop. 1. hujus, ostensum est.)

Erunt itaque eorum, respectu ipsius P M F, Momentorum ratio (utpote ex ratione magnitudinum a^2, & distantiarum as, composita,) ut a^3s; hoc est, ut a^3 series Tertianorum (seu cuborum quantitatum arithmetice proportionalium) in s respectivos Sinus rectos arcuum seu angulorum arithmeticè proportionalium. (Perinde autem est, Momentum quod spectat, sive ponantur Pondera a^2 in distantiis as, sive Pondera a^3 in distantiis s; quippe utrobique Momenta erunt a^3s.) Et quidem, pro duobus quadrantibus primoribus, ad (ipsius P M F) partes E, quam Ponderationem signo + designabimus; pro duobus sequentibus, ad partes contrarias, hoc est ad G, (propter quantitates ipsas, ad contrarias rectæ P M F partes, positas,) quam Ponderationem Signo — designabimus. Et similiter in quadrantibus sequentibus faciendum erit, prout ad illas vel istas partes ponantur: Nempe, pro quadrantibus Quinto & Sexto, ponendum signum +; pro Septimo & Octavo, signum —: & sic deinceps (alternatim) duobus intermissis.

Quod tantundem est atque si totidem $\beta\upsilon$ (ipsis s proportionales) complentes figuram Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ (fig. 170.) vel (quæ eandem aliquoties repetitam exhibet) M υ F υ A υ I (fig. 201.) quousque
Fig. 201. opus erit continuandam, (ad alteras atque alteras ipsius M F A I partes positam, prout ipsius figuræ Spiralis situs postulat;) onerentur respectivis a^3, in triplicatâ ratione suarum ab M distantiarum, arithmeticè-proportionalium; hoc est, serie Tertianorum.

Sive (quod tantundem est, propter distantias M $\beta = a$,) ut Momentum (respectu ipsius M P fig. 201.) omnium a^2s; hoc est, omnium $\beta\upsilon = s$, respectivis a^2 onustarum. (Signis + — ritè consideratis.)

Hoc est, per prop. 10. hujus, ut *Aggregatum omnium* a^2s, (usque ad a maximum) toties sumptum, (hoc est in a ductum;) demptis *Omnibus*

nibus Aggregatis ejusmodi usque ad respectivos *a* arithmetice proportionales. Fig. 201.

Est autem illud *Aggregatum Omn* $a^2 s$, $= - a^2 R^2 + 2asR^2 + a^2 vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. Nempe, Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis A α, momentum respectu A α; cui respondet, in nostro casu, Ungulæ M $\beta\upsilon$ fig. 201. aciem habentis P M, Momentum respectu P M.) Adeoque illud toties sumptum, hoc est, in $a = M\beta$ ductum, est $- a^3 R^2 + 2a^2 sR^2 + a^3 vR - 2avR^3$.

Quod quò ritè intelligatur, considerandum est; per s, intelligendum esse sinum rectum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est M β fig. 201. convenientem; hoc est, ipsam $\beta\upsilon$ rectam; quæ interpretanda erit affirmativè vel negativè, prout citra vel ultra M F A jaceat: Sicut & in ipso circulo Sinus Recti in contrariis semicirculis, contrariis signis affici intelligantur; utpote ad contrarias diametri partes positi: Item, per v intelligendum esse Sinum versum arcui $\alpha\beta$ fig. 170. hoc est, M β fig. 201. convenientem. Si autem β sumatur citra F; adeóque in primo Semicirculo; nihil est quò quis hæreat; (quippe hoc sæpiùs ostensum est, in prop. 17, de figurâ Sinuum Rectorum $\alpha\tau\kappa$ fig. 170.) Si verò ultra F qui terminus est primi Semicirculi (cui convenit sinus versus $v = 2R$ & Sinus Rectus $s = 0$) sumatur β; (quod tantundem est atque si in fig. 169. post absolutum semicirculum A D α, continuandus esset arcus, ultra α, in Semicirculo opposito, sursum, versus A, puta A D $\alpha\theta$,) Sinus Rectus contrario Signo afficiendus esset; & decresceret Sinus versus (subductò ex $2R$, quantum esset sinus versus continuati arcûs $\alpha\theta$, ab α inchoandus;) usque dum, absoluto secundo Semicirculo, ad A fig. 169. perventum fuerit, evanescente tum Sinu Recto, secunda vice, in $s = 0$, tum Sinu verso in $2R - 2R = 0$. Sin porro procedatur, ultra circulum integrum, ad tertium Semicirculum; ibidem Sinus Rectus Affirmative interpretandus erit, & crescet iterum Sinus Versus; qui in Quarto iterum decrescet, & Sinus Rectus negativè interpretandus: Et sic porro, alternis vicibus. Quippe eadem recta A V fig. 169. $(= A\alpha - \alpha V = A\alpha - \alpha A + AV$, &c.) est sinus versus, tum Arcûs A B, tum (residui ad Circulum integrum) A D $\alpha\theta$, aut etiam (ultra Circulum contiuati) A D $\alpha\theta$ A B: Item arcûs A B, sinus V B $= s$ affirmativè interpretandus, arcúsque A B $\alpha\theta$, sinus oppositus V $\theta = - s$ negativè interpretandus; iterúmque Arcûs A B $\alpha\theta$ A B, sinus VB $= s$; & Arcûs A B $\alpha\theta$ A B $\alpha\theta$, sinus V $\theta = - s$: Et sic deinceps, si ad plures integros circuitus procedendum erit.

Porro; propter *Aggregatum Omn.* $a^2 s$, $= - a^2 R^2 + 2asR^2$

+

Fig.201. $+ a^2 v R - 2 v R^3$, (ut modo oſtenſum eſt;) erunt *Omn. Aggregata* $a^2 s$, $=$ *Omn.* $-a^2 R^2 + 2 a s R^2 + a^2 v R - 2 v R^3$; ſumptis a arithmetice proportionalibus uſque ad a maximum, hoc eſt M β.

Sunt autem *Omn.* a^2, $= \frac{1}{3} a^3$, per prop. 1. hujus; Ergo, *Omn.* $-a^2 R^2$, $= -\frac{1}{3} a^3 R^2$.

Et *Omn.* $a s$, $= -e R^2 + a v R$, per § Q. prop. 17. (eſt utique Trilinei $\alpha \beta v$ fig. 170. momentum reſpectu A α,) Ergo, *Omn.* $2 a s R^2$; $= -2 e R^4 + 2 a v R^3$.

Et *Omn.* $a^2 v$, $= -2 e R^3 + 2 a v R^2 + \frac{1}{3} a^3 R - a^2 s R$, per § L. prop. 19. (Nempe Ungulæ A b K fig. 170. aciem habentis A α, momentum reſpectu A α.) Ergo, *Omn.* $a^2 v R$, $= -2 e R^4 + 2 a v R^3 + \frac{1}{3} a^3 R^2 - a^2 s R^2$.

Et *Omn.* v, $= e R$, per § B. prop. 17. (Eſt utique Trilineum A b K fig. 170.) Ergo, *Omn.* $-2 v R^3$, $= -2 e R^4$.

Ergo, *Omn. Aggregat.* $a^2 s$, $=$ *Omn.* $-a^2 R^2 + 2 a s R^2 + a^2 v R - 2 v R^3$; $= -\frac{1}{3} a^3 R^2 - 2 e R^4 + 2 a v R^3 - 2 e R^4 + 2 a v R^3 + \frac{1}{3} a^3 R^2 - a^2 s R^2 - 2 e R^4 = -6 e R^4 + 4 a v R^3 - a^2 s R^2$.

Atque hoc demum ſubductum ex, *Aggregat.* $a^2 s$, in a maximum, $= -a^3 R^2 + 2 a^2 s R^2 + a^3 v R - 2 a v R^3$; relinquit *Omn.* $a^2 s$; $= 6 e R^4 - 6 a v R^3 - a^3 R^2 + 3 a^2 s R^2 + a^3 v R$.

Fig.199, 200. Cum itaque ſingulorum Sectorum exiguorum Angulus ſit, verbi gratiâ, infiniteſima pars quatuor rectorum; cui reſpondeat, in Circulo primo, arcus T $= \frac{1}{\infty} P$; adeoque in ſuis P T peripheriis conterminis, $t = \frac{a}{P} T$; (poſito a pro arcu circuli primi qui reſpondeat angulo P M T;) &, propterea eorum magnitudines ſint $\frac{1}{2} t r$ (ſumptis tum t tum r arithmetice proportionalibus; ſintque Centrorum gravitatis ab M diſtantiæ R M $= \frac{2}{3} r$; adeoque eorundem à P M F diſtantiæ (utpote ad R M, ut Sinus Rectus anguli P M R ad Radium, ſeu ut s ad R,) R S $= \frac{2 s r}{3 R}$; adeoque eorum reſpectu P M momenta $\frac{1}{2} t r \times \frac{2 s r}{3 R} = \frac{t r^2 s}{3 R}$, (ſumptis tum t, tum r, arithmeticè proportionalibus, ipsiſque s pro ſinubus rectis arcuum arithmetice proportionalium ad Radium R;) adeoque (ut prius etiam oſtenſum eſt) in ratione ipſorum $a^3 s$: Si, pro *Omnibus* $a^3 s$, $= 6 e R^4 - 6 a v R^3 - a^3 R^2 + 3 a^2 s R^2 + a^3 v R$, ſubſtituantur Totidem $\frac{t r^2 s}{3 R}$, =

$= \frac{6etr^2R^3 - 6avtr^2R^2 - a^3tr^2R + 3a^2str^2R + a^3vtr^2}{3a^3}$; habetur figuræ Spiralis, quousque libet continuatæ, (cujus Radius ultimus $MT = r$,) momentum respectu rectæ PMF, (toties computatâ parte qualibet quoties iteratò describitur,) & quidem vel ad partes E, vel ad partes G; prout signum + aut — prævaleat. Aut etiam, (propter $t = \frac{aT}{P}$,) Fig. 199. 200.

$$\frac{6er^2R^3\ (= 6ar^2R^3 - 6sr^2R^3) - 6avr^2R^2 - a^3r^2R + 3a^2sr^2R + a^3vr^2}{3a^2P}\ T:$$

Vel, (propter eandem ubique rationem r ad a, quæ est R ad P; utpote in eâdem ratione semper crescentibus r & a, donec perveniatur illic ad R, hic ad P, in termino primi circuli;)

$$\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}\ T:$$ Vel (neglecto $\overline{T}$; quippe dum T ponitur pro $\frac{1}{\infty}P$, infinitesimâ parte ipsius P, & P pro earundem in P lineâ partium numero; tantundem erit PT, atque ipsa P linea;) $\frac{6aR^5 - 6sR^5 - 6avR^4 - a^3R^3 + 3a^2sR^3 + a^3vR^2}{3P^3}$.

Sunt autem, ut ex prædictis patet, singulorum Sectorum exiguorum magnitudines, $\frac{1}{2}tr$; hoc est, $\frac{arT}{2P}$; seu $\frac{a^2RT}{2P^2}$, (propter $r = \frac{a}{P}R$.) Adeoque omnium summa $\frac{a^3RT}{6P^2}$ vel $\frac{a^3R}{6P^2}$ (utpote ad maximum toties sumptum, ut 1 ad 3; per prop. 1. hujus.) Nempe in ea ratione ad $\frac{1}{6}RPT$ vel (neglecto T) ad $\frac{1}{6}RP$, (trientem circuli primi, seu figuram spiralem primæ circulationis,) ut a^3, ad P^3, seu ut r^3 ad R^3; hoc est, ut Cubus Radii terminalis MT, ad Cubum MA radii circuli primi.

Per hanc itaque Magnitudinem, si dividamus Momentum modo traditum; habebitur

$$\frac{12aR^4 - 12sR^4 - 12avR^3 - 2a^3R^2 + 6a^2sR^2 + 2a^3vR}{a^3P}.$$

Centri gravitatis figuræ Spiralis (quousque libet continuatæ) MTT (toties computatis singulis partibus quoties iterato describuntur) distantia à recta PMF; & quidem vel ad partes E vel ad partes G, (sive Momenta spectemus, sive distantiam Centri gravitatis,) prout signum + vel — prævaluerit.

Fig. 199, 200. Notandum interim (ne hæc perperam intelligantur) in semicirculationibus secundâ, quartâ, sextâ, (reliquisque in locis paribus,) pro Momentis his atque Distantiis æstimandis, sinum s negative interpretandum esse; utpote, in his semicirculis, ad contrarias Diametri partes positum: Adeoque ita exponendum atque si contrario ubique signo afficeretur. Quod & ante insinuatum est.

F. Et quidem, pro integris Circulationibus absolutis, (propter tum $s = 0$, tum $v = 0$, in fine cujusque circulationis,) Magnitudines erunt, $\frac{a^3R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF (neglecto T, ob causam modo dictam,) $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3}$; (toties repetitis omnibus quoties iterato describuntur;) distantiæ centrorum gravitatis à PMF versus E, $\frac{12R^4 - 2a^2R^2}{a^2P}$; Hoc est, (propter signum $-$, prævalens; est utique, hoc casu, a^2 semper plus quam $6R^2$; non potest enim a in fine circulationis, minor esse quam P;) distantiæ à PMF versus G, $\frac{-12R^4 + 2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus omnibus, exponetur a, in fine Circulationis Primæ, per P; in fine secundæ, per $2P$; Tertiæ, per $3P$; & sic deinceps.

Pro Circulationibus Dimidiis, quæ integram Circulationem non terminant; (puta, pro una, tribus, quinque, &c.) propter $s = 0$, & $v = 2R$; erunt magnitudines (ut prius) $\frac{a^3R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF $\frac{-6aR^5 + a^3R^3}{3P^3}$; distantiæ à PMF versus E, $\frac{-12R^4 + 2a^2R^2}{a^2P}$. In quibus exponetur a, in fine Semicirculationis primæ, per $\frac{1}{2}P$; tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps. Adeoque signum $+$, in hoc casu, semper prævalet: propter Quadratum, Semiperipheriæ majus quam sex quadrata Radii.

Pro Circulationibus Quadrantalibus, quæ Semicirculationem non terminant, (puta, pro primâ, tertiâ, quintâ, &c.) propter tum $s = R$, pro primâ, quintâ, nonâ, &c. sed $s = -R$, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c; tum $v = R$ in omnibus: Magnitudines erunt

erunt (ut prius) $\frac{a^3R}{6P^2}$; Momenta respectu PMF, $\frac{-6R^6+3a^2R^4}{3P^3}$ Fig. 199, 200.
$= \frac{-2R^2+a^2}{P^3}R^4$; Distantiæ à PMF, versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3P}$; nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c. In quibus exponetur a, in fine Quadrantis primi, per $\frac{1}{4}P$; quinti, per $\frac{5}{4}P$; noni, per $\frac{9}{4}P$; & sic deinceps. Et signum $+$, prævalet: propter quadratum Arcus Quadrantalis, majus quàm Duo quadrata Radii. Sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario signo exponendum, seu $s = -R$;) Momenta erunt $\frac{+6R^6-3a^2R^4}{3P^3} = \frac{+2R^2-a^2}{P^3}R^4$; Distantiæ, $\frac{+12R^5-6a^2R^3}{a^3P}$; adeoque (propter a, interpretandum per, $\frac{3}{4}P$, $\frac{7}{4}P$, $\frac{11}{4}P$, &c. signum $-$ prævalebit; eruntque tum Momenta, tum Distantiæ, versus G.

Sin libeat singulos quadrantes seorsum perpendere, (non, ut hactenus, inchoando à principio, omniaque toties repetendo quoties iteratò describuntur;) illud sic fiet.

De Primo quadrante, MTEM, jam ostensum est, Magnitudinem esse $\frac{a^3R}{6P^2}$, hoc est (propter $a=\frac{1}{4}P$,) $\frac{1}{384}RP$; Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6+a^2R^4}{P^3} = \frac{-32R^6+R^4P^2}{16P^3}$; distantia centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3P} = \frac{-768R^5+24R^3P^2}{P^4}$.

Magnitudo Primæ Semicirculationis, MTEFM, est $\frac{a^3R}{6P^2}$; hoc est, (propter $a=\frac{1}{2}P$,) $\frac{1}{48}RP$: Momentum respectu PMF, $\frac{-6aR^5+a^3R^3}{3P^3} = \frac{-24R^5+R^3P^2}{24P^2}$; distantia versus E, $\frac{-48R+2R^2P^2}{P^3}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum primi quadrantis, $\frac{-32R^6+RP^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantis secundi MEFM, Mo-

 mentum

Fig. 199, 200. mentum respectu P M F, $\frac{96R^6 - 48R^5P - 3R^4P^2 + 2R^3P^3}{48P^3}$; Adeoque propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{7}{384}RP$; Distantia centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 - 384R^4P - 24R^3P^2 + 16R^2P^3}{7P^4}$.

Magnitudo Trium quadrantalium circulationum, M T E F G M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{9}{128}RP$, (propter $a = \frac{3}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{2R^6 - a^2R^4}{P^3} = \frac{32R^6 - 9R^4P^2}{16P^3}$; (adeoque versus G, propter prævalentiam signi —; hoc est, revera, $\frac{-32R^6 + 9R^4P^2}{16P^3}$ versus G.) Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{12R^5 - 6a^2R^3}{a^3P}$; hoc est (propter signum — prævalens,) versus G, $\frac{-12R^5 + 6a^2R^3}{a^3P}$ $= \frac{-256R^5 + 72R^3P^2}{9P^4}$.

Ex hujus momento, si subducatur momentum primæ *Semicirculationis* $\frac{-24R^5 + R^3P^2}{24P^2}$; Habetur momentum Tertiæ quadrantalis M F G M, $\frac{96R^6 + 48R^5P - 27R^4P^2 - 2R^3P^3}{48P^3}$: Adeoq; propter magnitudinem (§ D. traditam) $\frac{19}{384}RP$; Distantia Centri gravitatis à P M F versus E, $\frac{768R^5 + 384R^4P - 216R^3P^2 - 16R^2P^3}{19P^4}$; hoc est, revera, versus G,

$$\frac{-768R^5 - 384R^4P + 216R^3P^2 + 16R^2P^3}{19P^4}.$$

Magnitudo integræ Circulationis primæ, M T E F G A M, $\frac{a^3R}{6P^2} = \frac{1}{6}RP$, (propter $a = P$;) Momentum respectu PMF $\frac{6aR^5 - a^3R^3}{3P^3} = \frac{6R^5 - R^3P^2}{3P^2}$: Distantia Centri gravitatis à PMF versus

versus E, $\frac{12R^4-2a^2R^2}{a^2P}=\frac{12R^4-2R^2P^2}{P^3}$; hoc est (propter prævalentiam signi —,) versus G, $\frac{-12R^4+2R^2P^2}{P^3}$. Fig. 199, 200.

Ex hujus Momento; si subducatur Momentum Circulationis Quadrantalis $\frac{32R^6-9R^4P^2}{16P^3}$; Habetur Quadrantalis Quartæ MGAM, Momentum respectu PMF, $\frac{-96R^6+96R^5P+27R^4P^2-16R^3P^3}{48P^3}$: & (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis à PMF versus E, $\frac{-768R^5+768R^4P+216R^3P^2-128R^2P^3}{37P^4}$; hoc est (revera) versus G, $\frac{768R^5-768R^4P-216R^3P^2+128R^2P^3}{37P^4}$.

Magnitudo Quinque Quadrantalium MTEFGAHM, $\frac{a^3R}{6P^2}=\frac{125}{384}RP$, (propter $a=\frac{5}{4}P$;) Momentum respectu PMF, $\frac{-2R^6+a^2R^4}{P^3}=\frac{-32R^6+25R^4P^2}{16P^3}$; Distantia Centri gravitatis à PMF, $\frac{-12R^5+6a^2R^3}{a^3P}=\frac{-768R^5+600R^3P^2}{125P^4}$, versus E.

Ex hujus Momento, si subducatur momentum Primæ Circulationis, $\frac{6R^5-R^3P^2}{3P^2}$; Habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, MAHM, $\frac{-96R^6-96R^5P+75R^4P^2+16R^3P^3}{48P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$;) Distantia Centri gravitatis à PMF, versus E, $\frac{-768R^5-768R^4P+600R^3P^2+128R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps, quousque libet.

Atque eâdem operâ determinavimus tum Magnitudinem, tum Momentum & Centri gravitatis ab erecto super rectam PMF plano distantiam, Solidi *Scalaris*, super Figuram Spiralem TTM oblíquo situ ascendentem positi, eandem ubique habentis altitudinem (quamlibet) supra obliquè ascendentem figuram Spiralem; quæ quidem altitudo sit etiam cujusvis puncti in sequenti qualibet circulatione G.

distantia

Fig. 199, 200. distantia à subjecto proxime præcedentis Circulationis puncto.

Quippe ad hoc nihil aliud requiritur, quam ut ? (quæ pro infinitesima parte Peripheriæ circuli primi habebatur, adeoque negligi poterat,) jam habeatur pro illâ quantalibet Altitudine; in Solidi tum Magnitudine tum Momento æstimando: Distantia vero Centri gravitatis a plano PMF, eadem hic erit qua prius erat à PMF rectâ.

Si autem Solidum hoc utcunque Truncatum intelligatur; vel supernè, ne ad M apicem pertingat; vel infernè, puta quo basem planam Horizontalem habeat; vel aliàs quomodolibet: non erit difficile, præmissa ritè perpendentibus, amputati rationem habere; quodque inde oritur descriminis sive in Magnitudine, sive in Momento, & Centri gravitatis distantia.

Vel etiam si pro eâdem (quam hic ponimus) Altitudine, aut Circulationum intervallo, (unde continuo mutabitur acclivitas ascendentis plani) eandem velimus retentam acclivitatem, (unde variabitur altitudo, quæ pro decrescentibus circulis continuo decrescet;) simili processu habebitur tum Solidi Magnitudo, tum Momentum, Centrique gravitatis à PMF plano distantia: Sed Calculo paulo adhuc intricatiori, propter novam adhuc cum cæteris componendam rationem, pro variatâ altitudine. Verum omnia sigillatim prosequi mihi non est in animo, ne nimius sim. Ad figuram itaque spiralem redeo.

II. Ut autem ejusdem MTTM figuræ Spiralis Momentum (quod hactenus ad PMF rectam expendimus,) ad rectam EMG expendamus: considerandum est, Centrorum gravitatis Sectorum exiguorum distantias ab EMG, esse ipsos RX sinus Complementi earundem arcuum quorum Sinus recti sunt RS; (atque ad eosdem radios RM continue crescentes in proportione arithmetica;) puta ut ax; (positis x pro sinibus complementi, ipsis s respondentibus: hoc est, pro VC Sinibus Complementi arcuum AB, fig. 169. quorum Sinus recti sunt BV.)

Adeoque (propter magnitudines, ut supra dictum est, ut a^2,) Momenta respectu rectæ EMG, erunt ut a^3x ($= a^2xax$:) Hoc est, ut a^3 series Tertianorum, in respectivos x arcuum arithmetice proportionalium *Co-sinus* seu sinus complementi: Hoc est in ipsas $\beta\upsilon$ rectas, complentes figuram $\delta\kappa\tau$ (fig. 170.) quousque opus erit continuandam; Hoc est in ipsas $\beta\upsilon$ complentes figuram $\mu\upsilon\epsilon\upsilon\gamma\upsilon\mu$

Fig. 201. (fig. 201.) quousque opus est continuandam; inchoandam autem, non

non (ut prius) ab MP, sed à $\mu\upsilon$. (Est utique eadem $\upsilon\beta$ recta, Fig. 201.
tum *Sinus* rectus arcûs, in rectam extensi, $M\beta$; tum *Co sinus* arcûs, in rectam extensi, $\mu\beta$.)

Nam, ut Sinus *s*, à minimo incipiunt continuè crescendo usque ad quadrantis finem, ubi decrescere incipiunt: Sic, vice versa, eorundem arcuum *Co-sinus x*, seu Sinus Complementi, à maximo incipiunt continuè decrescendo ad finem usque quadrantis; ubi crescere incipiunt, sed ad contrarias partes ipsius E M G rectæ.

Quæ enim spectant ad quadrantem Primum, Quartum, Quintum, Octavum, Nonum, &c. ponderant ad rectæ E M G fig. 199, 200. partes P; (quam ponderationem signo + designo:) quæ autem pertinent ad quadrantem Secundum, Tertium, Sextum, Septimum, Decimum, &c. ponderant in partes contrarias, hoc est ad F; (quam ponderationem signo — designo;) & sic deinceps, alternatim, duos intermittendo continuos quadrantes seu integrum Semicirculum.

Quem situm imitantur ipsius figuræ $\mu\upsilon\iota\upsilon\gamma\upsilon\eta$, &c (fig. 201.) portiones, ad alias atque alias rectæ $\mu\gamma$ partes positæ.

Quæ quidem eadem est figura atque C A b k (fig. 170.) quousque opus erit continuanda: Cujus portiones C A b k, vel C A d b k, fig. 170. (hoc est, $\mu\upsilon\upsilon\beta$, vel $\mu\upsilon\iota\upsilon\beta$, fig. 201. ubicunque in sinuosâ curvâ, $\mu\upsilon$ inchoatâ, sumatur υ punctum,) consideravimus, ad § B. prop. 17. ostendimúsque istiusmodi figuræ magnitudinem esse sR, æqualem facto ex respectivi Arcûs $\mu\beta$ (seu Anguli A M T fig. 199, 200.) Sinu Recto, in Radium ducto; habitâ tamen (prout ad alias atque alias rectæ partes jaciunt figuræ portiones) debitâ signorum + — consideratione.

Quo itaque habeamus *Omnia* a^3x; Hoc est, Omnes x, (seu $\beta\upsilon$ rectæ figuram $\mu\upsilon\iota\upsilon\gamma$, &c. complentes) respectivis a^3 (serie Tertianorum) onustæ: Intelligamus, juxta doctrinam prop. 10. hujus, (quam sæpiùs in auxilium advocavimus,) singula α, β, γ, &c. fig. 135. Fig. 135.
æqualiter ob invicem remota, totidem esse respectivas x rectas; adeoque ipsam A E onustam, seu Omnia, $\alpha + \beta + \gamma$, &c. $=$ *Omn.* x, $= sR$, ut jam ostensum est, ex § B. prop. 17.

Horúmque omnium momenta respectu axis A; hoc est, *Omn.* ax; sunt ipsæ onustæ rectæ, A E + B E + C E, &c. hoc est, totidem A E, demptis omnibus A B + A C, &c. Hoc est, (propter A E $= sR$,) totidem sR ultimis (seu asR,) demptis omnibus sR antecedentibus, pro arcubus arithmeticè proportionalibus usque ad a ultimum.

Sunt

Fig. 135. Sunt autem (pro arcubus a arithmeticè proportionalibus) $Omn.\, s, = vR$, per § Q. prop. 17. (utpote ipsa $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170.) Adeoque $Omn.\, sR, = vR^2$. Hoc itaque ex asR subducto, habetur $asR - vR^2 = Omn.\, ax$.

Intelligantur deinde eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem ax: adeoque onusta recta A E $= Omn\, ax, = asR - vR^2$. Horumque omnium momenta respectu ipsius A; hoc est $Omn.\, a^2x$; sunt ipsæ AE + BE + CE, &c. rectæ sic onustæ. Hoc est, totidem AE, $(= a^2sR - avR^2,)$ demptis Omnibus AB + AC, &c. hoc est, omnibus $asR - vR^2$, pro arcubus a arithmeticè proportionalibus.

Sunt autem (pro arcubus a arithmeticè proportionalibus) $Omn.\, as, = -eR^2 + avR$, per § Q. prop. 17. (utpote momentum ipsius $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. respectu rectæ Aα;) adeoque $Omn.\, asR, = -eR^3 + avR^2$.

Item $Omn.\, v, = eR$, per § B. prop. 17. (utpote ipsum AbK trilineum, fig. 170.) adeoque $Omn. - vR^2 = -eR^3 = -aR^3 + sR^3$.

Ergo, $Omn.\, asR - vR^2 := -2eR^3 + avR^2 = -2aR^3 + 2sR^3 + avR^2$.

Hoc itaque, ex $a^2sR - avR^2$, subducto; habetur $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR = Omn.\, a^2x$.

Intelligantur denique eadem α, β, γ, &c. fig. 135. tanquam totidem a^2x: adeoque onusta recta A E, $= Omn.\, a^2x, = 2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$. Horum itaque omnium momenta respectu axis A; hoc est, $Omn.\, a^3x$; sunt ipsæ AE + BE + CE, &c. sic onustæ: Hoc est, totidem AE, $(= 2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR,)$ demptis A B + A C, &c. Hoc est, omnibus, $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, pro arcubus a arithmeticè proportionalibus.

Sunt autem (pro a arithmeticè proportionalibus) $Omn.\, a, = \frac{1}{2}a^2$, per prop. 1. hujus. Adeoque $Omn.\, 2aR^3, = a^2R^3$.

Item, $Omn.\, s, = vR$, per § Q. prop. 17. adeoque $Omn. - 2sR^3 = -2vR^4$.

Item, $Omn.\, av, = \frac{1}{2}a^2R - asR + vR^2$, per § H. prop. 17. (utpote momentum trilinei A b K fig. 170. respectu Aα;) adeoque $Omn. - 2avR^2, = -a^2R^3 + 2asR^3 - 2vR^4$.

Item, $Omn.\, a^2s, = -a^2R^2 + 2asR^2 + a^2vR - 2vR^3$, per § O. prop. 19. (nempe Ungulæ $\alpha\beta\upsilon$ fig. 170. aciem habentis Aα, momentum respectu Aα;) Adeoque $Omn.\, a^2sR, = -a^2R^3 + 2asR^3 + a^2vR^2 - 2vR^4$.

Ergo,

Ergo, (horum aggregatum) *Omn.* $2aR^3 - 2sR^3 - 2avR^2 + a^2sR$, $= -a^2R^3 + 4asR^3 + a^2vR^2 - 6vR^4$. Fig. 135.

Hoc itaque ſubducto, ex $2a^2R^3 - 2asR^3 - 2a^2vR^2 + a^3sR$; habetur, $6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$, $=$ *Omn.* a^3x.

Atque ad eandem formam (eadem quoties opus erit repetendo veſtigia) procedendum eſſet, ſi porro *Omnia* a^4x, *Omnia* a^5x, (aut etiam ultra) inquirenda eſſent: Vel etiam, ſi loco ipſorum x, aliæ quælibet quantitates ponerentur. Quod hic obiter monitum eſto.

Cum itaque (ut jam ante oſtenſum eſt § E.) ſingulorum Sectorum exiguorum Magnitudines, ſint $\frac{1}{2}tr = \frac{arT}{2P} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; diſtantiæque ab EMG, $RX = \frac{2rx}{3R} = \frac{2ax}{3P}$, (poſito x pro Co-ſinu anguli vel arcûs a, ad Radium R;) adeoque momenta reſpectu EMG, $\frac{a^2RT}{2P^2} \times \frac{2ax}{3P} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$; vel (neglecto T, ob cauſam aliquoties dictam,) $\frac{a^3xR}{3P^3}$: Erit (propter *Omn.* a^3x, $= 6vR^4 + 3a^2R^3 - 6asR^3 - 3a^2vR^2 + a^3sR$,) Momentum Figuræ Spiralis MTTTM, reſpectu rectæ EMG, *Omn.* $\frac{a^3xR}{3P^3}$, $=$ Fig. 199, 200.

$$\frac{6vR^5 + 3a^2R^4 - 6asR^4 - 3a^2vR^3 + a^3sR^2}{3P^3}.$$

Adeoque, (propter magnitudinem, jam ante traditam, $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Diſt. Cent. grav. ab EMG rectâ, $\frac{12vR^3 + 6a^2R^3 - 12asR^3 - 6a^2vR^2 + 2a^3sR}{a^3P}$. Et quidem vel ad partes P, vel ad partes F, (ſive momentum ſeu ponderationem ſpectemus, ſive diſtantiam Centri gravitatis,) prout vel ſignum $+$, vel ſignum $-$, prævaluerit.

Et quidem, pro integris quotlibet circulationibus abſolutis Momenta erunt $\frac{a^2R^5}{P^3}$ (cæteris evaneſcentibus, propter tum $s = 0$, tum $v = 0$;) adeoque (propter magnitudines $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Diſtantiæ Centri I.

 gravi-

Fig. 199, 200. gravitatis, ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{aP}$. Ubi exponendus est a in fine Circulationis primæ, per P; secundæ, per $2P$; tertiæ, per $3P$; &c.

Pro dimidiatis Circulationibus, quæ integras non terminant, (unâ, tribus, quinque, &c.) propter $s=0$, & $v=2R$; Momenta sunt, $\frac{12R^6-3a^2R^4}{3P^3}=\frac{4R^6-a^2R^4}{P^3}$; & (propter Magnitudines, ut prius, $\frac{a^3R}{6P^2}$,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{24R^5-6a^2R^3}{a^3P}$; Hoc est revera (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-24R^5+6a^2R^3}{a^3P}$: Exponendus utique est a in fine Semicirculationis Primæ, per $\frac{1}{2}P$; Tertiæ, per $\frac{3}{2}P$; Quintæ, per $\frac{5}{2}P$; & sic deinceps: adeoque a^2 in omnibus plus erit quam $4R^2$; est enim, $\frac{1}{2}P$ plus quam $2R$.

Pro circulationibus quadrantalibus (quæ Semicirculationes non terminant) unâ, tribus, quinque, &c. propter tum $s=R$ in primâ, quintâ, nonâ, &c. et $s=-R$, in tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. tum $v=R$, in singulis: Momenta sunt $\frac{6R^6-6aR^5+a^3R^3}{3P^3}$; & (propter magnitudines, ut prius,) Distantiæ Centri gravitatis ab EMP, versus P, $\frac{12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P}$; nempe pro primâ, quintâ, nonâ, &c. sed, pro tertiâ, septimâ, undecimâ, &c. (propter s contrario signo exponendum,) Momenta $\frac{6R^6+6aR^5-a^3R^3}{3P^3}$; Distantiæ, versus P, $\frac{12R^5+12aR^4-2a^3R^2}{a^3P}$; hoc est, (propter prævalentiam signi —,) versus F, $\frac{-12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P}$. Exponendus autem est a, in primâ, tertiâ, quintâ, &c. per $\frac{1}{4}P$, $\frac{3}{4}P$, $\frac{5}{4}P$, &c.

Si libeat singulos Circulationum Quadrantes seorsum perpendere, id facile fiet.

Quadrantis Primi MTEM, momentum respectu EMG, jam ostensum est $\frac{6R^6-6aR^5+a^3R^3}{3P^3}=\frac{384R^6-96R^5P+R^3P^3}{192P^3}$ (propter

ter $a=\frac{1}{4}P$:) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG verſus P, $\frac{12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P}=\frac{768R^5-192R^4P+2R^2P^3}{P^4}$. Fig. 199, 200.

Semicirculationis Primæ, MTEFM; Momentum $\frac{4R^6-a^3R^3}{P^3}$ $=\frac{16R^5-R^4P^2}{4P^3}$ (propter $a=\frac{1}{2}P$;) Diſtantia ab EMG verſus P, $\frac{24R^5-6a^2R^3}{a^3P}=\frac{192R^5-12R^3P^2}{P^4}$: Hoſt eſt, revera, verſus F, $\frac{-192R^5+12R^3P^2}{P^4}$.

Ex hujus Momento, ſi ſubducatur Momentum primi quadrantis; habetur Secundi quadrantis MEFM, Momentum reſpectu EMG, $\frac{384R^6+96R^5P-48R^4P^2-R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{7}{384}RP$;) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG verſus P, $\frac{768R^5+192R^4P-96R^3P^2-2R^2P^3}{7P^4}$: Hoc eſt, verſus F, $\frac{-768R^5-192R^4P+96R^3P^2+2R^2P^3}{7P^4}$.

Circulationis Dodrantalis, ſeu Trium quadrantum, MTEFGM; Momentum reſpectu EMG, eſt $\frac{6R^6+6aR^5-a^3R^3}{3P^3}=$ $\frac{384R^6+288R^5P-27R^3P^3}{192P^3}=\frac{128R^6+96R^5P-9R^3P^3}{64P^3}$ (propter $a=\frac{1}{4}P$;) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG verſus P, $\frac{12R^5+12aR^4-2a^3R^2}{a^3P}=\frac{768R^5+576R^4P-54R^2P^3}{P^4}$; Hoc eſt, verſus F, $\frac{-768R^5-576R^4P+54R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, ſi ſubducatur Momentum Semicirculationis Primæ; habetur Tertiæ quadrantalis MFGM, Momentum reſpectu EMG, $\frac{-384R^6+288R^5P+48R^4P^2-27R^3P^3}{192P^3}$ $=\frac{-128R^6+96R^5P+16R^4P^2-9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{13}{384}RP$,) Diſtantia Centri gravitatis ab EMG, verſus P,

—

Fig. 199, 200. $\frac{-768R^5+576R^4P+96R^3P^2-54R^2P^3}{19P^4}$; Hoc est, revera, versus F, $\frac{768R^5-576R^4P-96R^3P^2+54R^2P^3}{19P^4}$.

Integræ Circulationis Primæ, MTEFGAM; Momentum respectu EMG est $\frac{a^2R^4}{P^3} = \frac{R^4}{P}$ (propter $a=P$:) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{6R^3}{P^2}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum Circulationis Dodrantalis; habetur Quadrantalis Quartæ Momentum $\frac{-384R^6-288R^5P+192R^4P^2+27R^3P^3}{192P^3} = \frac{-128R^6-96R^5P+64R^4P^2+9R^3P^3}{64P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{37}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{-768R^5-576R^4P+384R^3P^2+54R^2P^3}{37P^4}$.

Quadrantalium Quinque, MTEFGAH, (repetito quod erat in prima,) Momentum respectu EMG, est $\frac{6R^6-6aR^5+a^3R^3}{3P^3}$ $= \frac{384R^6-480R^5P+125R^3P^3}{192P^3}$: Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{12R^5-12aR^4+2a^3R^2}{a^3P} =$ $\frac{768R^5-960R^4P+250R^2P^3}{P^4}$.

Ex hujus itaque Momento, si subducatur Momentum integræ Circulationis Primæ; habetur Momentum Quadrantalis Quintæ, respectu EMG, $\frac{384R^6-480R^5P-192R^4P^2+125R^3P^3}{192P^3}$: Et (propter magnitudinem $\frac{61}{384}RP$,) Distantia Centri gravitatis ab EMG, versus P, $\frac{768R^5-960R^4P-384R^3P^2+250R^2P^3}{61P^4}$.

Et sic deinceps quousque libet.

K. Atque eâdem operâ determinavimus, in Solido *Scalari*, (super figuram Spiralem TTM obliquo situ ascendentem, altitudinem eandem

eandem quamlibet habente ſuper obliquè aſcendentem figuram ſpiralem,) magnitudinem, momentum, atque diſtantiam Centri gravitatis ab erecto ſuper EMG plano. Quippe eadem omnia hic locum habent reſpectu erecti in EMG plani; quæ reſpectu plani in PMF erecti ſupra diximus, § G. Ut non ſit opus eadem repetere.

PROP. XXVIII.

Quæ in Propoſitione præcedente, de Spirali *Archimedeâ*, tradita ſunt; eadem omnia Spiralibus aliis facilè accommodantur, in quibus Radii MT, MT, continuè creſcant, non quidem (ut in illa) in ipſorum AMT, AMT, angulorum ratione, ſed & in ipſorum ratione Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, aliáſve utcunque multiplicatâ: aut etiam in Subtriplicatâ, hujuſce utcunque multiplicatâ. A.Q. Fig. 199, 200.

Sed &, Magnitudinem quod ſpectat, iis etiam in quibus creſcant MT, MT, radii, in eorundem AMT, AMT, ratione Subduplicatâ, Subquadruplicatâ, aliáſve utcunque Submultiplicatâ; vel etiam in ratione ſubduplicatæ triplicatâ, quintuplicatâ, &c. aut ſubquadruplicatæ, quintuplicatâ, ſeptuplicatâ, &c. aliáſve ex multiplicatis & ſubmultiplicatis compoſitâ; aut etiam alias per numeros ſurdos deſignanda. A.

Quod ad Momenta verò, & Centra gravitatis, quæ dicta ſunt, non ita facilè ad has accommodantur ubi ratio ſubmultiplicata eſt, ſeu ex ſubmultiplicatâ compoſita quæ multiplicatæ non æquepolleat, vel ſaltem ſubtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ. Q.

Suntque hæ Spirales omnes ex Parabolarum vel Paraboloidium C.

loidium correſpondentium convolutione factæ; poſſuntque in Parabolas illas ſeu Paraboloidea evolvi.

C.D. Illa quidem Spiralis *Archimedea*, ex *Apolloniana* Parabola: Eâ nempe, quæ Baſem habeat æqualem Spiralis radio terminali; Axémque æqualem ſemiſſi arcus Sectoris contermini.

E. Cujus quidem Parabolæ ſemiſſi, æquatur illa Figura Spiralis. Unde conſtat, omnino poſſibilem eſſe Figuram Rectilineam, Circulo æqualem; ejuſve Sectori cuilibet.

F. Ex datâ verò Altitudine iſtius Parabolæ, quæ Datæ Spirali reſpondeat; datur circuli Quadratura.

G. Rectaque Parabolam tangens, eandem cum Ordinata angulum facit, quem facit cum Spiralis correſpondente Radio recta Spiralem tangens.

H. Unde alia colligitur circuli quadratura *Archimedea* (Qualis
K. & ab aliis Spiralibus colligi poterit.)

I. Et, Curvam Parabolæ, æqualem eſſe Spiralis Curvæ.

L.M. Aliæ verò; ex iis Paraboloidibus in quibus Ordinatim-ap-

N.P. plicatæ ſint ſeries Indicem habens $\frac{1}{S+1}$; poſito ſeriei rectarum MT Indice S; Baſiſque Paraboloidis, æqualis ipſi MT terminali; ejuſque altitudo, ad longitudinem arcûs Sectoris contermini, ut 1 ad $S+1$.

K. Poſſúntque pari modo ex aliis item Figuris (putâ Hyperbolicis, Ellipticis, aliiſve mille modis variatis,) alia Spiralium genera Convolutione fieri; atque in eas unde conſtruuntur evolvi. Quarum quidem Figurarum Spiralium menſuræ, ex illarum figurarum menſuris dependent, quarum Convolutione fiunt.

K. Sunt utique Figuræ Spirales, non modò quæ ex Convolutis Parabolis, ſed & quæ ex aliis figuris Convolutis oriuntur; Figurarum illarum, ex quarum Convolutione fiunt, Dimidiæ.

Et quidem non modò Curva Spiralis *Archimedea*, est æqualis Curvæ Parabolicæ *Apollonianæ* correspondenti; sed & aliæ Spirales quælibet, æquales illis respective sive curvis sive rectis quarum Convolutione fiunt. K.

Adeoque cognitâ Figuræ Spiralis Magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; cognoscitur similiter vel magnitudo istius figuræ cujus Convolutione fit, vel longitudo lineæ: Et vice versa. K.

Et quidem Spiralis illa cujus rectæ MT, crescunt in angulorum AMT ratione duplicatâ, non modò rationem habet cognitam ad Sectorem conterminum; sed ipsius Curvæ Rectam æqualem assignare licet, eámque in data ratione secare. O.

Quod ipsum aliis item Spiralibus innumeris contingit.

Sed & Figura Spiralis (ex Paraboloide convoluta) assignari potest, quæ ad Sectorem conterminum rationem quamvis datam habeat; saltem Minoris ad Majus, numeris explicabilem: Et Paraboloides similiter, eidem correspondens: Ut & cuivis Paraboloidi respondens Spiralis. B. N.

Potestque hæc Spiralium doctrina, ad alia multa Spiralium genera ampliari. R.

SI Spiralis Radii MT, MT, crescant, non quidem in ratione Angulorum AMT, AMT, (ut in Spirali *Archimedea*,) sed in eorundem ratione duplicata, puta ut a^2: Erunt Sectores similes (figuram Spiralem componentes) ut a^4 (utpote in duplicata ratione arcuum suorum:) Adeoque, eorundem aggregatum ad aggregatum totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 5 ($= 4 + 1$,) per prop. 1. hujus. A. Fig. 199, 200.

Si Radii MT, MT, sint in angulorum AMT, seu PMT, ratione triplicata; hoc est, ut a^3; adeoque Sectores similes, ut a^6; erunt simul omnes ad totidem maximo æquales; hoc est, Figura Spiralis ad conterminum Sectorem; ut 1 ad 7. per eandem 1 hujus.

Et, universaliter, si Radii MT, crescant in Angulorum PMT, ratione Simplâ, Duplicatâ, Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Figura Spiralis

Fig. 199, 200. Spiralis, ad Sectorem conterminum, erit ut 1, ad 3, 5, 7, 9, &c. (Non, ut 1 ad 3, 4, 5, 6, &c. quod per incuriam scriptum erat in *Arithm. Infin.* Schol. Prop. 45.) propter Sectores Similes in Radiorum ratione duplicatâ.

Et similiter; si crescant Radii in Angulorum ratione Subduplicatâ, Subtriplicatâ, Subquadruplicatâ, &c. adeoque Sectores in ratione Simpla, Duplicata Subtriplicatæ, Subduplicatâ, &c. Figura Spiralis ad Sectorum conterminum erit, ut 1 ad $1+1$, $\frac{2}{3}+1$, $\frac{1}{2}+1$, &c. hoc est, ut 1 ad 2, $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{2}$, &c. vel 1 ad 2; 3 ad 5; 4 ad 6, &c.

Si crescant Radii in Angulorum ratione Duplicatâ subtriplicatæ, Triplicatâ subquadruplicatæ, &c. adeoque Sectores, in ratione Quadruplicatâ subtriplicatæ, Triplicatâ subduplicatæ, &c. (utpote in duplicatâ ratione radiorum;) erit Figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad $\frac{4}{3}+1$, $\frac{3}{2}+1$, &c. (nempe ut 1 ad seriei indicem unitate auctum, per prop. 1. hujus;) hoc est, ut 3 ad 7, 2 ad 5, &c.

Quod ipsum similiter valeret, si intelligerentur Radii crescentes secundum Seriem cujus Index sit numerus surdus, puta $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. adeoque Index seriei Sectorum, $2\sqrt{2}$, $2\sqrt{}$, &c. quippe Figura Spiralis esset ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2\sqrt{2}+1$, $2\sqrt{3}+1$, &c.

Illud utique ubique obtinet; si Radii sint ut Series cujus Index sit S; Sectorum Series Indicem habebit $2S$; adeoque summa Sectorum omnium ad maximum toties sumptum; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; ut, 1 ad $2S+1$: per prop. 1. hujus.

B. Et consequenter, Facilè assignabitur Spiralis sic constructa, ut Figura Spiralis, ad Sectorem conterminum, datam habeat (minoris ad majus) rationem. Esto enim ratio data, ut 1 ad D. Quoniam est (ut jam ostendimus) Figura Spiralis ad Sectorem conterminum, ut 1 ad $2S+1$; atque imperatum est ut sit, ut 1 ad D; erunt 1 ad $2S+1$, & 1 ad D, eadem ratio; adeoque $D=2S+1$, hoc est $D-1=2S$, & $\frac{D-1}{2}=S$. Si itaque Radii MT, ponantur ut Series Indicem habens $\frac{D-1}{2}$; erit figura Spiralis ad conterminum Sectorem, ut 1 ad D, in ratione data. Cum enim Series Radiorum Indicem habeat $\frac{D-1}{2}$; Series Sectorum habebit Indicem

(istius

P. V.

9, &c.
t in *A*-
diorum

plicatâ,
ratione
Spira-
$\frac{1}{2}+1$,
; 4 ad

plicatæ,
Quadru-
n dupli-
Secto-
ndicem
ad 5,

ntes se-
3, &c.
Figura
$3+1$,

Index
Secto-
Spiralis
us.
ut Fi-
oris ad
iam est
m, ut 1
nt 1 ad
1, hoc

ponan-

conter-

ries Ra-

Indicem

(istius

PRO

(iftius
tum,
Sector
D —
tum.

Puta
D — 1
2
eft, in f

Si rat

runt M
PMT.

Si rat

ries *Prim*
Spiralis

Si rati

MT, S
plicata.

Si dat

ries *Rat*
tione Sub
tio data.

Dico
Spiralis (
crefcentes

Si verò

$= \frac{0}{1} = o$
figura Spi
grammo c
mus) coi

Sin pro

deoque T

defi

(istius duplum) $D-1$; adeoque Sectorum crescentium aggregatum, ad totidem maximo æqualium; hoc est, Figura Spiralis ad Sectorem conterminum; erit ut 1 ad D; nempe ad Seriei indicem $D-1$, unitate auctum. (per prop. 1. hujus.) quod erat imperatum. Fig. 199, 200.

Puta; Si ratio data, sit 1 ad 2; adeoque (posito $D=2$,) $\frac{D-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$. Erunt M T, Series *Subsecundanorum*: hoc est, in subduplicatâ ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 5; adeoque (posito $D=5$) $\frac{D-1}{2}=2$. Erunt M T, Series *Secundanorum*; seu, in duplicata ratione angulorum P M T.

Si ratio data, sit 1 ad 3; adeoque $\frac{D-1}{2}=1$. Erunt M T, series *Primanorum*, seu in ipsa angulorum P M T ratione. Quæ est Spiralis *Archimedea*.

Si ratio data, sit 2 ad 3; seu 1 ad $\frac{1}{2}$; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{1}{4}$. Erunt M T, Series *Subquartanorum*; seu in angulorum ratione Subquadruplicata.

Si data ratio, sit 1 ad 4; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{1}{2}$. Erunt M T, Series *Radicum Quadraticarum Tertianorum*: seu in angulorum ratione Subduplicata-triplicatæ. Et similiter alibi, quæcunque fuerit ratio data.

Dico autem, In Ratione *Minoris ad Majus*: Quia supponitur Spiralis (à Principio orsa) radios habere M T, ab o continuè crescentes; totaque, circumscripto Sectore contermino Minor.

Si verò proponeretur Ratio æqualitatis, 1 ad 1; adeoque $\frac{D-1}{2}=\frac{0}{2}=0$: Essent M T Series æqualium (cujus index 0;) &, pro figura Spirali, prodiret Circuli Sector, (ex Convoluto Parallelogrammo confectus,) cum ipso Sectore (quem conterminum supponimus) coincidens.

Sin proponeretur *Majoritatis* ratio, puta 2 ad 1; seu 1 ad $\frac{1}{2}$: adeoque $\frac{D-1}{2}=-\frac{1}{4}$: Essent M T ex eis Seriebus una quas *Reciprocas* definivimus, (def. 2. hujus.) puta *Reciproca Subquartanorum*,

 cujus

Fig. 199, 200. cujus Index $-\frac{1}{4}$. Adeoque non inciperent MT, ab o, crescendo; sed ab Infinito ($\frac{1}{0} = \infty$) decrescendo: Essétque conterminus Sector, non quidem Cicumscriptus sed Inscriptus.

Quæ quidem Figuræ, utut pro Spiralium generibus haberi possint, & aliarum Spiralium leges non refugiant (debitè accommodatas:) nos tamen eas potissimum hic spectamus quæ contermino Sectore includuntur. Quamquam si libeat Spiralium nomen ad illas etiam ampliare; erunt utcunque ad reliquas Spirales similiter redigendæ, (nostrisque subjiciendæ legibus;) atque Figuræ quas *Reciprocas* dicimus, ad Paraboloidum familiam.

C. Quod autem Spiralis *Archimedea*, aliud non sit quam Convoluta

Fig. 200, 202. Parabola *Apolloniana*; sic evidentissimè demonstratur.

Sumptis ad Spiralem Fig. 200. MT, MT; hoc est MP, MP, quotlibet; ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmeticè proportionalibus: totidemque ad Parabolam rectam Fig. 202. illis respectivè æqualibus MP, MP; hoc est, mT, mT: atque his proportionalibus utrobique ZY, ZY; hoc est $M\mu$, $\mu\mu$, &c. Sumptoque ubivis figuræ Spiralis termino, puta MF, cui æqualis ponatur μF basis Parabolæ: hujusque altitudo FΠ seu MB æqualis semissi Peripheriæ sectoris contermini radio MF fig. 200. descripti: Erunt ipsæ $M\mu$, $\mu\mu$, seu ZY, ZY, rectæ, fig. 202. ipsis ZY, ZY, arcubus, fig. 200. sigillatim æquales.

Quippe, si intelligantur numero infiniti arcus ZY arithmeticè proportionales (ut 1, 3, 5, &c.) erunt hi omnes simul sumpti, æquales semissi totidem maximo æqualium; hoc est, semissi arcûs contermini, radio MF descripti; per prop. 1. hujus. Cui quidem semissi cùm ponatur æqualis altitudo Parabolæ FΠ, seu MB, hoc est, aggregatum omnium $\mu\mu$ seu ZY fig. 202. Sintque tum totidem numero, tum proportionales, ipsis ZY arcubus fig. 202. Erunt singulæ singulis, respective sumptis, æquales.

Cum itaque sint etiam sigillatim MP seu mT fig. 200. ipsis MP, seu MT, fig. 202. æquales: Si intelligantur omnia m, μ puncta, in unum M colligi; (toto Parabolæ axe in verticis Punctum contracto;) manentibus rectarum μZ, mT, μY, longitudinibus; rectisque ZTY, in arcum flexis: Rectangula Z$\mu\mu$Y, in Sectores contracta, ipsis ZMY sectoribus, respective sumptis, congruent; propter tum radiorum, tum arcuum æqualitatem.

Sed Sectores illi ZMY, si numero infiniti intelligantur idem sunt atque Figura Spiralis (per def. 1. cap. 4.) ipsáque similiter Rectangula Z$\mu\mu$Y, idem atque Planum Parabolæ: Si itaque *Parabola* sic

Co-

Convoluta intelligatur, ut ea omnia ex quibus conflari intelligatur Rectangula, in totidem Sectores contrahantur; fit Figura Spiralis. Fig. 200, 202.

Et quidem ea fit Spiralis (ut ex demonstratis constat) cujus terminalis recta ut M F, sit æqualis ipsi B F basi Parabolæ; angulusque circulationis tantus, ut contermini Sectoris arcus, duplus sit altitudinis Parabolæ: Hoc est, quæ eam habet rationem ad unam Circulationem integram, quam habet Parabolæ altitudo dupla, ad peripheriam integram ejusdem base descriptam: Vel etiam, (si intelligatur axis BM supra Parabolæ verticem continuati, usque dum in C puncto occurrat rectæ C F parabolam in F contingenti; unde, propter Parabolæ naturam, dupla futura est C B ipsius B M;) eam, quam habet BC (axis continuatus ad occursum rectæ Parabolam in basis puncto contingentis,) ad integram peripheriam quæ Parabolæ base ut Radio describatur. D.

Constat autem, ex hac constructione, (propter singulos Sectores ZMY, singulorum respectivè Rectangulorum $Z\mu\mu Y$, dimidios;) Figuram Spiralem M T T F M, figuræ Parabolicæ M F B, dimidiam esse; & partes partium, respective sumptarum, dimidias. Quod similiter probabitur, de quovis alio Spiralium genere, quæ ex quacunque fit figurâ sic convolutâ. E.

Constat item (quod ex veteribus dubitarunt nonnulli, nedum ex recentioribus,) Figuram Rectilineam Circulo æqualem esse posse; hujusve Sectori cuilibet: adeoque, rectam Peripheriæ. Cum enim certa sit ratio figuræ spiralis M T T F, tum ad Sectorem conterminum, (nempe, ut 1 ad 3;) tum ad M F B parabolam, ex cujus convolutione fit, (nempe, ut 1 ad 2;) tum denique hujus parabolæ ad circumscriptum rectangulum M B F Π, (nempe, ut 2 ad 3;) erit contermini Sectoris Radio M F descripti (puta Semicirculi) ad MBFΠ rectangulum certa ratio; (erit utique æqualis; propter $\frac{3}{1}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=1$.) Cum itaque nullus sit circulus, cujus trienti non æquetur Figura Spiralis; nullaque figura Spiralis cujus duplo non æquetur Parabola; nullaque Parabola, cujus sesquialtero non æquetur Rectangulum Rectilineum: Nullus erit Circulus, cui non æquatur Rectangulum Rectilineum.

Constat etiam; si dari possit Altitudo Parabolæ M F B (seu hujus ad Basin ratio) quæ respondeat Spirali M T T F M (cujus circulationis angulus datam rationem habeat ad quatuor rectos;) datum iri rationem Radii, Diametrive, ad Peripheriam Circuli. F.

Sed & eadem F C quæ Parabolam tangit retento eodem cum B F angulo C F B; eandem etiam curvam tanget, postquam in Spiralem G.

Fig. 200, 202. convoluta fuerit Parabola. Nam, quâ ratione probabitur omnes in Parabola rectas m T ordinatim-applicatas, (tum quæ sunt supra B F, tum quæ sunt infra,) solâ B F exceptâ, ad C F contingentem non pertingere; eâdem ostendetur neque ad eam pertingere easdem convolutas in situm M T in Spirali. Quippe si (verbi gratia) ad M F fig. 200. ita constituta sit F C, ut ad illam non pertingeret rectæ M T punctum T, etiamsi extensa Z T Y curva in rectam sisteretur ad ipsam M F perpendicularis (positâ, etiam T M, seu T m, in situ parallelo ad F M, seu F B,) quod fit in Parabolâ: multò minus ad eandem F C pertinget idem T punctum in Z T Y inde recurvatâ; concurrente rectâ T m seu T M cum rectâ F M, in eodem M puncto; quod fit in Spirali.

Unde sequitur; eundem esse, ad tangentem, angulum M F C in Spirali, atque (qui huic correspondet) B F C in Parabolâ.

H. Et consequenter; si intelligatur F (verbi gratia) in fine circulationis primæ, rectaque (ad M F perpendicularis) M C, Tangenti F C occurrens in C; erit ipsa M C fig. 200. (principio Spiralis, & contingente, intercepta,) ipsi B C fig 202. (Parabolæ axe ad occursum tangentis continuato,) æqualis; (propter angulos ad F utrobique æquales, adeoque similia triangula rectangula;) hoc est, (per modò demonstrata,) integræ Peripheriæ radio M F descriptæ, seu Peripheriæ circuli primi: (ponitur enim F, in termino primæ circulationis; adeoque circulationis angulus, quatuor rectis æqualis.) Id quod ab *Archimede* fusius ostenditur, in libro de Spiralibus; estque ipsius Circuli quadratura, inde deducta; quò præcipuè collimâsse videtur in illa de Spiralibus doctrinâ.

Sin ubivis alibi (quàm in fine circulationis primæ) intelligatur illud F punctum; putà in fine semicirculationis primæ, vel primi quadrantis, vel ubivis alias: idem consequi licebit. Quippe tum M C sic ducta (rectæ M F perpendicularis, & F C tangenti occurrens in C,) erit eadem pars (puta, vel semissis, vel quadrans, vel pars alia prout res tulerit,) integræ peripheriæ radio illo M F descriptæ, quæ est, circulationis integræ, exposita circulatio.

I. Sed & inde etiam sequitur; Curvam Spiralem M T T F fig. 200. curvæ Parabolicæ, correspondenti M F fig. 202. æqualem esse. Quippe si intelligantur utrobique sumi partes analogæ infinitè exiguæ; in quibus itaque tangentium F C respectivarum particulæ, pro ipsis F T curvis habeantur per def. 1. cap. 4. (utpote à quibus differunt ratione datâ quâvis minore;) ut & Y T curva, similiter, pro Y T recta, eidem æquali: adeoque minuta Trilinea T Y F, utrobique, pro

pro Triangulis rectangulis; & quidem (propter æquales utrobique respectivos angulos ad F) invicem similibus; quæ itaque & latera habebunt proportionalia: Erunt, propter Y F rectas utrobique æquales, etiam F T (respectivè sumptæ) itidem æquales. Cúmque hoc ubique contingat; erunt omnes F T curvam Spiralem constituentes, æquales omnibus F T constituentibus curvam Parabolicam; hoc est, M T T F curva spiralis, æqualis correspondenti M F curvæ Parabolicæ. Quod demonstrandum erat. Idemque aliàs demonstravimus, in Tractatu, *De Curvarum Εὐθύνσει*, Tractatui de Cycloide subjuncto. Fig. 200, 202.

Quod etiam in aliis Spiralium generibus non minùs valet. Si intelligatur enim eadem M F B fig. 202. non jam ut *Apolloniana* Parabola, sed ut Paraboloides, Hyperbola, aliáve ad libitum figura, in minuta Rectangula, ut Z μ μ Y, resoluta: quæ (punctis omnibus m, μ, in unum M collectis,) in totidem Sectores, (Rectangulorum dimidios,) redigantur: qui quidem vel similes inter se erunt, si eadem ponatur ubique ratio rectarum Z Y ad m T; vel, si secus, dissimiles; (eam utique rationem habebit sectoris cujusvis angulus, ad quatuor rectos; quam habet Z Y ad integram Peripheriam radio m T describendam:) alia atque alia fient Spiralium genera. K

Neque refert, utrum M F fig. 202. sit curva, an Recta; sed nec, utrum ad unum M verticis punctum terminetur, an secus. Quippe si integrum Rectangulum M B F π sic convolveretur, (toto M B latere in unicum M punctum collecto, latereque π F in arcum curvato,) Spiralis hinc oriunda, Circulus esset; vel Sector Circuli, qui eam habeat ad integrum circulum rationem quam F π recta ad peripheriam radio B F vel M π descriptam.) Et quidem, si Trilineum M F B, ubivis truncatum rectâ m T, intelligeretur sic convolvi; hoc saltem inde sequeretur discriminis, quod non jam ab puncto ut M, ordiretur Spiralis fig. 200. sed, a rectâ aliquâ, ut M T.

Hoc interim omnibus commune erit; Nempe, Figuram Convolutione factum, ut M T T F fig. 200. dimidiam esse ejusdem evolutæ, ut M F B fig. 202. propter singulos Z M Y sectores, singulorum Z μ μ Y rectangulorum respective sumptorum, dimidios.

Item; Tangentem F C, fig. 202. retento angulo C F B, tangentem etiam fore figuræ convolutæ M T T F M fig. 202. Quippe, & hic non minùs obtinebit præcedens demonstratio, quâ ostendebatur hoc contingere in Spirali *Archimedea*. Si enim rectæ m T, punctum T in Z T Y rectâ, fig. 202. ad T C tangentem non pertingat; multò minùs ad eandem pertinget in eadem Z T Y recurvatâ,

fig.

Fig. 200. 202. fig. 200. Quod ipsum obtinet etiam vice versâ: Si enim convoluta curva F T fig. 200. explicanda intelligatur in correspondentem FT fig. 202. quanquam T propius accederet ad T C tangentem, non tamen eò pertingeret: Nisi saltem explicanda esset in lineam rectam, (quod in Circulo fit; cujus explicata curva, eadem futura est cum parallelogrammi pridem convoluti latere;) quippe, hoc casu, explicata linea cum tangente coincidet; quæ enim supponatur recta rectam contingere, alia non erit quam ipsa recta; quippe, nisi coincidat, secabit. Si vero adhuc ulterius explicanda intelligatur figura, ut non modo ad ipsam F C pertingat T, sed transeat; adeoque F T recurva fiat, in contrarias partes flexa: etiam adhuc eandem F C, sed ad contrarias partes, tanget. Cum enim flexionis angulus, qui idem est atque angulus contactus magnitudinem vel nullam habeat, vel infinitè exiguam, (sive sit rectæ & curvæ contactus, sive duarum curvarum externè vel internè tangentium,) quod ad prop. 15. cap. 2. ostensum est; eadem quæ prius fuerat manebit recta contingens F C, utcunque flectatur (modo nè frangatur, ut angulum faceat, rectilineo æquipollentem,) F T curva, in puncto F.

Sed &, quâ ratione hinc infertur, (ob cognitum in parabola punctum C in quo cum axe producto Tangens occurrat,) *Archimedea* Circuli quadratura per Tangentem Spiralis: idem etiam simili ratione colligetur, ex aliis innumeris Spiralium generibus, ex convolutis figuris oriundis, in quibus idem C punctum pariter cognoscitur. Cum enim B M B fig. 202. altitudo figuræ convolvendæ, æqualis sit omnibus Z Y arcubus fig. 200. simul sumptis: si quocunque modo colligi poterit quam habeant illi omnes ad contermini Sectoris arcum, quemque hic habeat ad integram peripheriam; conficietur negotium. Quippe cognitâ M C fig. 200. (cujuscunque Spiralis,) cognoscitur etiam (eidem æqualis) B C fig. 202. adeoque, quam habeat ea rationem ad cognitam M B fig. 202. hoc est, ad omnes Z Y fig. 200. adeoque & (cùm horum ad arcum Sectoris contermini ratio nota ponatur,) ad arcum Sectoris contermini, & propterea (cum hujus ratio ad integram peripheriam nota ponatur) ad circuli peripheriam radio M F fig. 200. vel B F fig. 202. descriptam.

Item M F figuræ convolvendæ fig. 202. æqualem Curvæ figuræ convolutæ M T T F fig. 200. Quippe Demonstratio prius adhibita in comparatis invicem *Apollonianâ* Parabolâ, & Spirali *Archimedeâ*; in aliis non minus obtinet. Nempe, in partibus infinitè exiguis, habenda esse utrobique T Y F trilinea, pro Triangulis rectangulis, & quidem (propter æquales utrobique angulos ad F) invicem similibus;

adeoque

adeoque, propter æquales utrobique Y F, æquales item erunt F T; atque hoc semper. Æqualis itaque tota M F curva fig. 202. toti M T T F fig. 200. Fig. 200, 202.

Et propterea; ex cognitâ vel figuræ Spiralis magnitudine, vel Curvæ Spiralis longitudine; similiter cognoscitur vel Magnitudo figuræ quæ cujus convolutione fit, vel longitudo lineæ. Et vice versâ.

Ut autem, ex convolutâ Parabolâ, fit Spiralis *Archimedea*; sic, ex Paraboloidibus convolutis, fiunt Spirales aliæ; quarum radii M T crescunt in ratione angulorum A M T duplicatâ, triplicatâ aliâsve multiplicatâ; vel subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâsve submultiplicatâ; aut etiam ex his utcunque compositâ. I.

Quod eodem modo ostendi potest quo in Parabolâ id ostensum est; sumptis Paraboloidibus idoneis, in quibus rectæ M B, M Π, sic dividantur ut M μ, μ μ, &c. hoc est Z Y, Z Y, &c. sint ipsis M P, M P, &c. proportionales, (quò sectores Z M Y fig. 200. ex rectangulis Z μ μ Y fig. 202. convolutis facti, similes sint,) Paraboloidisque curva per ipsas Z Y, Z Y, rectas transeat. (Quod aliis aliisque modis, pro variis Paraboloidum generibus, faciendum erit.) Hoc enim facto, ostendetur, ut priùs in Parabolâ, singula Rectangula, in respectivos Sectores, ipsorum dimidios, convolutum iri: reliquaque quæ hinc sequuntur.

Cùm verò alius occurrat modus expeditior, aliunde sumptis principiis, idem præstandi; (neque lectori, credo, displicebit varietas;) rem sic aggrediemur; ea methodo quâ ad *Arithm. Infin. prop.* 36. &c. usus sum.

In Spirali *Archimedeâ*, M T T F, fig. 199. sumptis Sectoribus similibus; adeoque tum radiis M T, M T, &c. hoc est, M P, M P, &c. tum angulis P M T, P M T, &c. arithmeticè proportionalibus; ut 1, 2, 3, 4, &c. Erunt arcus P T, P T, (utpote in ratione quæ ex radiorum M P, & angulorum M P T, rationibus componitur,) ut 1, 4, 9, 16, &c. series Secundanorum; (nempe uno gradu altior quàm est series Radiorum M P, propter angulos M P T, in ratione seriei Primanorum, seu arithmetice-proportionalium:) adeoque, si in rectas expandi intelligantur, erunt ut totidem ordinatim-applicatæ in complemento Parabolæ, (axem habente M P; altitudinem, ipsi P F, non ut prius hujus dimidio, æqualem,) utpote in ratione duplicatâ axium M P, M P: (quales sunt P T, P T, complentes Semiparabolæ complementum M T F Π fig. 202. sumptis B F, F Π, fig. 202. æqualibus ipsis M F, F O P, fig. 199.) & propterea, Fig. 199, 202.

simul

simul omnes, (hoc est M T P, spiralis complementum ad contermi-num sectorem,) æquantur Trienti Rectanguli Parabolæ circum-scripti; hoc est, $\frac{1}{3}$ M P × P F, seu $\frac{1}{3}$ M Π × Π F, (per 1. vel 6. hujus.) Estque Conterminus Sector M P F M, (utpote ex arcubus arithmetice proportionalibus conflatus,) $=\frac{1}{2}$ M P × P F, (per 1. hujus.) Ergo, figura Spiralis (utpote Sectoris residuum,) $=\frac{1}{6}$ M P × P F, (propter $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;) hoc est, (propter $\frac{1}{6}.\frac{1}{2}::1.3$,) ad Sectorem conterminum, ut 1, ad 3.

Fig. 199, 200, 202. Nequis autem hæsitet, cur parabolæ M F B fig. 202. altitudinem, jam ponam, ipsius arcus contermini P F fig. 199. longitudini æqualem; quam prius fueram arcûs P F fig. 200. dimidiam: ratio in promptu est. Cùm enim retinentibus suam singulis longitudinem rectis Z Y, utut in axem curvatis; dum, in rectis M B, contrahuntur $\mu\mu$ in unicum m punctum; adeoque Parabolæ magnitudo decrescat: necesse est ut, in Π F, rectæ ξυ (ipsis Z Y æquales) protrahantur putà in ΞΥ, (quibus respondeant, in Sectore Spirali contermino, arcus O O;) adeóque Complementi magnitudo crescat. Et propterea, dum complementum consideramus, (juxta hanc hypothesin,) facienda erit Π F (complementi Semiparabolæ seu Semiparaboloidis basis) ipsi P O F semper æqualis, (quicunque fuerit Parabolæ seu Paraboloidis gradus,) utpote quæ ex omnibus ΞΥ, (hoc est, omnibus O O,) componitur. Dum verò Parabolam vel Paraboloidem figuram M F B (juxta priorem hypothesin) consideramus; facienda est M B parabolæ seu paraboloidis altitudo, (non quidem omnibus OO, hoc est ipsi POF,) sed omnibus Z Y simul sumptis æqualis: hoc est, in Spirali *Archimedeâ*, (propter ipsas M T, adeoque Z Y, fig. 200. arithmeticè proportionales,) æqualis semissi arcûs P O F: Sed, si essent ipsæ M T, adeoque Z Y, ut illarum Quadrata (seu in duplicatâ ratione angulorum P M T,) hoc est, ut series Secundanorum; esset M B $=\frac{1}{3}$ P O F: Si ut Series Tertianorum; esset MB $=\frac{1}{4}$POF: Et sic in aliis gradibus, prout cujusque ratio postulaverit; per prop. 1. hujus. (Quod in *Arithmetica Infinitorum*, prop. 5. & sequentibus, fusiùs ostendimus.) Atque hinc est, quod dum in complemento considerando, reputamus omnes O O, hoc est ΞΥ, invicem æquales: in Parabolâ, seu Paraboloide, reputamus ipsas $\mu\mu$, seu Z Y rectas; hoc est, in Spirali, arcus R Y; continue crescentes, in ratione ipsarum m T, seu M T, rectarum. Quæcunque enim fuerit ipsarum Z Y differentia; dummodo idem sit angulus Z m Y seu Z M Y, eademque Radii M O seu m O longitudo; eadem ubique erit ipsius ΞΥ seu O O longitudo. Tantundem utique sunt Triangula Z m Y, Ξ m Υ,

atque

atque Sectores ZMY, OMO, respectivè sumpti; per 12 hujus. Quæ aliquantò fusiùs explicanda putabam, quò clariùs percipiantur omnia.

Eodem planè modo; si intelligatur Spiralis MTTF fig. 203. ita construi, ut, sumptis angulis PMT, PMT, arithmetice proportionalibus, (ut prius;) radii MT, MT, seu Mp, Mp, sint in eorum ratione Duplicatâ; seu, ut series Secundanorum: manifestum est, Arcus pT, pT, seriem esse Tertianorum (uno gradu altiorem quam est Series radiorum Mp, Mp,) utpote quorum rationes componuntur ea rationibus radiorum Mp (quæ est Series Secundanorum,) & angulorum PMT (quæ est series Primanorum) respectivè sumptorum. Puta, ut rectæ pT, pT, fig. 204. diametro MP ordinatim-applicatæ, in paraboloidis, complemento MPF. Cujus quidem diametri Mp, Mp, sunt ut Secundana, sive Quadrata arithmeticè-proportionalium; ordinatim-applicatæ pT, pT, ut Tertiana, seu arithmetice-proportionalium Cubi: Adeoque in Diametrorum ratione Subduplicatæ-Triplicata. Quæ itaque, si æqualibus intervallis sumerentur (non, uti nunc sunt, propter Mp, Mp, in ratione secundanorum;) hoc est, ut ordinatim-applicatæ ad diametros Mp arithmetice-proportionales; series essent Indicem habens $\frac{3}{2}$. Quarum itaque ratio, ad maximam toties sumptam; hoc est, ratio complementi MTFP ad Parallelogrammum circumscriptum MBFP; est, ut 1 ad $\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$; seu ut 2 ad 5. Est autem Sector PMF fig. 203. ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 2: (æquatur enim Sector, uti notum est, semissi rectanguli quod illius Radio & Arcu comprehenditur.) Cum itaque (propter singulos arcus pT, singulis rectis pT respective sumptis æquales; & eandem utrobique altitudinem MP;) Complementum Spiralis MTFP fig. 203. æquale sit Complemento Paraboloideos MTFP fig. 204. erit Complementum illud Spiralis MTFP, ad Sectorem conterminum PMF; ut $\frac{2}{5}$ ad $\frac{1}{2}$; seu 4 ad 5: Et consequenter (quod reliquum est) Figura Spiralis MTFM, ad eundem Sectorem, ut 1 ad 5. (Quod etiam prius ostensum erat ad § A.) Arcusque Tf fig. 203. complentes figuram Spiralem MTF; tantundem sunt atque rectæ Tf fig. 204. complentes Bilineum MTFM. (Uti etiam ipsa Tf, fig. 202. tantundem sunt atque Tf arcus fig. 199. complentes figuram Spiralem MTFM; seu, qui arcubus PT desunt ad complendum Sectorem conterminum.) Cum enim rectæ pf complentes Triangulum MFP fig. 204. tantundem sint atque pf arcus complentes Sectorem MFP fig. 203. (utpote utrobique arithmetice pro- M. Fig. 203, 204.

 portionales,

Fig. 203, 204. portionales, & maxima maximæ æqualis, eademque utrobique altitudo;) fintque rectæ p T tantundem atque p T arcus: sequitur, Rectas residuas T f, tantundem esse atque residuos arcus F f.

N. Sed & simul innotescit, ex cujus Paraboloideos convolutione, oriatur exposita Spiralis, cujus radii M T sint in duplicatâ ratione angulorum P M T. Nempe Paraboloideos Semicubicalis, (quippe talis est M T F curva fig. 204. ut ex constructione patet;) hoc est, cujus ordinatim applicatæ T p in complemento, sint in diametrorum M p ratione Subduplicatæ-Triplicata; & propterea in Paraboloide, ordinatim-applicatæ T d, hoc est, p M, in diametrorum M d, hoc est p T, ratione Duplicata Subtriplicatæ.

Cujus quidem Paraboloideos Basis B F, æqualis esse debet ipsi M F terminali in Spirali: Altitudo verò, non ipsi M B fig. 204. hoc est, arcui P F fig. 203. seu aggregato omnium O O (quales in fig. 199, 200. conspiciuntur;) sed in eâ ad ipsam M B fig. 204. ratione, quæ est (figuræ naturâ ritè perpensâ) omnium Z Y, ad omnes O O, seu Ξ Y, (quales in fig. 199, 201. conspiciuntur:) Hoc est, in præsenti casu (propter ipsas M T, adeoque Z Y, seriem Secundanorum,) ut 1 ad 3. Adeoque, si Paraboloidis Semicubicalis, cujus basis sit B F, altitudo $\frac{1}{3}$ M B, fig. 204. omnia rectangula (qualia Z μ μ Y fig. 202.) in totidem triangula (ut Z m Y) seu Sectores Z M Y (prout in fig. 200.) convolvi intelligantur: fiet figura Spiralis M T F M fig. 203. æqualis istius Paraboloideos semissi. Quæ eodem modo demonstrantur, quo eadem de Parabolâ & Spirali *Archimedea* ostenduntur, § C, D, E.

Idemque ex calculo patet. Cum enim Index seu Exponens seriei Complementi M F P fig. 204. sit (ut supra ostensum est) $\frac{1}{2}$; adeoque ipsius Paraboloideos M F B, $\frac{2}{3}$; erit hujus ad circumscriptum Parallelogrammum M P F B, (per prop. 1. hujus) ut 1, ad $1\frac{2}{3}$; seu 3 ad 5: Adeoque si (cæteris manentibus) sumatur altitudo subtripla, (quod faciendum esse ostendimus,) fiet ratio, ut 1 ad 5: Et consequenter, (quæ hujus est dimidia,) figura Spiralis M T F M fig. 203. ad idem Parallelogrammum M P F B fig. 204, ut 1 ad 10; hoc est, ad P M F fig. 203. Sectorem conterminum, (Parallelogrammi dimidium,) ut 1 ad 5. Quod fieri debere; supra ostensum est.

O. Similiter etiam ostendetur, (ut ad § I, K.) Curvam istius paraboloideos sic constructi, æqualem esse curvæ Spiralis M T F fig. 203. Verum hujus Paraboloideos Curvæ, æqualem rectam jam olim exhibuit *Neilius* noster, (Anno 1657. omnium primus,) &, post illum alii; (quod in Tractatu *De Curvarum* Εὐθύνσει, pag. 91. &

& seqq. ostendimus.) Ergo, ipsi MTF Spirali, æqualis recta exhibebitur. Supposita circuli quadraturâ, quæ hic necessaria erit (ut ex prædictis patet) pro designandâ Paraboloideos altitudine, quæ expositæ Spirali conveniat: utpote cujus altitudo, æqualis esse debet trienti arcus PF. Fig. 203, 204.

Quodque de rectâ hujus Spiralis curvæ æquali ostensum est; similiter & aliis Spiralibus accommodabitur, quæ ex ejusmodi paraboloidibus aliisve figuris convolutis fiunt, quarum curvis æquales rectæ assignari possunt. De quibus fusius egimus in Tractatu *De Curvarum Evolutione*, præsertim pag. 111. & seqq.

Ad eandem formam procedendum erit, in aliis Spiralibus, quarum Radii MT, sint in angulorum PMT ratione multiplicatâ, submultiplicatâ, vel ex his utcunque compositâ. Sunto enim verbi gratiâ, (ut unâ vice omnes absolvam,) ipsæ MT, seu MP, fig. 203. series Exponentem seu Indicem habens S: erunt itaque arcus PC (utpote in ratione ex Radiorum & Angulorum rationibus compositâ) series uno gradu altior; adeoque Indicem habens $S+1$. Idemque Index, per S divisus, erit correspondentis MTFP Complementi Paraboloideos (fig. 204.) Hujus Paraboloidis (cujus itaque Index erit $\frac{S}{S+1}$;) Basis ponenda erit æqualis ipsi MF spiralis Terminali rectæ. Altitudo verò, quæ ad arcum Sectoris contermini PF eam habet rationem quam Seriei ratio postulat; nempe quam habent omnes ZY, seu MT, ad totidem maximo æquales; hoc est (propter seriei Indicem S,) ut 1 ad $S+1$ (per prop. 1. hujus.) Quæ quidem Parabola seu Paraboloides est Figuræ Spiralis dupla; Curvaque illius, hujus curvæ æqualis; Tangensque illius cum Parabolæ seu Paraboloidis Ordinatim-applicatâ in puncto contactus, eundem angulum facit quem facit Tangens Spiralis cum hujus radio respectivo.

Si verò, vice versâ, quæratur quænam Figura Spiralis expositæ Paraboloidi conveniat; puta cujus Exponens sit $\frac{1}{p}$. Erit $\frac{1}{p} = \frac{S}{S+1}$ (ut ex dictis patet;) ergo $p = \frac{S+1}{S}$, & $pS = S+1$, & $pS - S = 1$, & $S = \frac{1}{p-1}$, qui Index erit Seriei radiorum MT in Spirali quæsita; cujus recta terminalis MF futura est Paraboloidis basi æqualis, angulusque circulationis talis ut Sectoris Arcus conterminus eam habeat rationem ad expositæ Parabolæ vel Paraboloidis altitudinem, quam habet $S+1$ ad 1. Quod ex modo demonstratis facile colligitur.

Q. Fig. 200. Supereſt, ut Centra gravitatis exquiramus. Quod eodem modo fiet atque in Propoſitione præcedente factum eſt. Poſito enim, ut illic, P pro peripheriâ primi circuli; cujus pars infiniteſima ſit T; radius R; ſimiliúmque ſectorum radii, utcunque creſcentes, n; quibus reſpondeant in eadem ratione t: Erunt ſimiles Sectores quilibet $\frac{1}{2}nt$, ſeu $\frac{n^2T}{2R}$; eorúmque ab M diſtantia Centrorum gravitatis reſpectivè, $MR = \frac{2}{3}n$; adeoque à PMF, eorundem diſtantia $RS = \frac{2ns}{3R}$; ab EMG, diſtantia $RX = \frac{2nx}{3R}$: (nempe, in eâ ratione ad RM, qua eſt Sinus Rectus illic, hic Co-ſinus ſeu ſinus complementi, anguli PMR, ad Radium:) Et propterea, ſingulorum reſpectivè momenta reſpectu rectæ PMF, $\frac{n^2T}{2R} \times \frac{2ns}{3R} = \frac{n^3sT}{3R^2}$; reſpectu rectæ EMG, $\frac{n^2T}{2R} \times \frac{2nx}{3R} = \frac{n^3xT}{3R^2}$: Vel, (neglecto T, ob cauſas ad § E. prop. præced. traditas,) illic, $\frac{n^3s}{3R^2}$; hic, $\frac{n^3x}{3R^2}$. Atque hoc quidem univerſaliter, quacunque ratione creſcant radii MT, quos n dicimus uſque ad eorum maximum $\mathfrak{N}$, qui ſit MT terminalis.

Et propterea; Si creſcant MT, ſeu n, in ratione angulorum PMT arithmetice proportionalium, quos a dicimus; erit $n = \frac{a}{P}R$, (hoc eſt, in eadem ratione ad R radium circuli primi, qua eſt a ad P; hoc eſt, angulus expoſitus PMT, ad quatuor rectos; ſeu iſtius anguli Arcus in Circuli primi peripheria, ad peripheriam integram;) Adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{a^2RT}{2P^2}$; & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^3sRT}{3P^3}$; & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^3xRT}{3P^3}$. Qui eſt caſus, Spiralis *Archimedeæ*, capite præcedente expoſitus.

Si verò creſcant MT ſeu n, in angulorum a ratione duplicatâ, triplicatâ, aliâſve multiplicata; erit $n = \frac{a^2}{P^2}R$, vel $n = \frac{a^3}{P^3}R$, & ſic porro prout rationis multiplicatæ gradus poſtulaverit. Adeoque $\frac{n^2T}{2R}$ =

$= \frac{a^4RT}{2P^4}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^6sRT}{3P^6}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^6xRT}{3P^6}$; Vel $\frac{n^2T}{2R}$ Fig. 200.
$= \frac{a^6RT}{2P^6}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{a^9sRT}{3P^9}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^9xRT}{3P^9}$; & sic porro, prout res postulaverit.

Si crescant MT seu n, in angulorum a ratione subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâsve submultiplicatâ; erit $n = R\sqrt{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt{3}\,\frac{a}{P}$, atque sic porro. Adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{aRT}{2P}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$ $= \frac{asRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}\sqrt{\frac{a}{P}} = \frac{1}{3}xRT\sqrt{\frac{a^3}{P^3}}$; Vel $\frac{n^2T}{2R} = \frac{1}{2}RT\sqrt{3}\,\frac{a^2}{P^2}$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{asRT}{3P}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{axRT}{3P}$: Atque sic porro, ut casus postulaverit.

Si crescant denique MT seu n, in angulorum a ratione aliquâ quæ composita sit ex multiplicatâ & submultiplicatâ; puta, subduplicata triplicatæ, seu ut $\sqrt{a^3}$: Erit $n = R\sqrt{\frac{a^3}{P^3}} = aR\sqrt{\frac{a}{P}}$; adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{a^3}{2P^3}RT$, & $\frac{n^3sT}{3R^2} = \frac{1}{3}sRT\sqrt{\frac{a^9}{P^9}} = \frac{a^4sRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2} = \frac{a^4xRT}{3P^4}\sqrt{\frac{a}{P}}$: Et similiter alibi, prout cujusque compositionis gradus postulaverit, mutatis mutandis.

Ut igitur habeatur summa Omnium $\frac{n^2T}{2R}$; hoc est, ipsa figura Spiralis, quocunque demum multiplicatæ seu submultiplicatæ seu ex his compositæ rationis gradu crescant MT seu n: id saltem requiritur ut habeatur summa *omnium* a^2, vel *omn.* a^4, vel *omn.* a^6, vel *omn.* a, vel *omn.* $\sqrt{3}a^2$, vel *omn.* a^3, aliave istiusmodi summa prout res postulaverit: (Quod universaliter obtinebitur per prop. 1. hujus.) Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{2}RT$, vel (neglecto tandem T, ob causas § E. prop. præced. traditas,) in $\frac{1}{2}R$; exhibet Spiralis figuræ magnitudinem. Quam & ante habuimus § A.

Ut autem habeatur summa omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, vel omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc est, istius figuræ spiralis momentum respectu PMF, vel EMG; adeoque

Fig. 200. adeoque (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis: Id requiritur, ut habeatur summa omnium $a^3 s$, $a^3 x$; vel omnium $a^6 s$, $a^6 x$; vel omnium $a^9 s$, $a^9 x$; vel omnium $s\sqrt{a^3}$, $x\sqrt{a^3}$; vel omnium $s\sqrt[3]{a^3}$, $x\sqrt[3]{a^3}$, (hoc est, omnium $a s$, $a x$;) vel omnium $s\sqrt{a^9}$, $x\sqrt{a^9}$, (hoc est, omnium $a^4 s\sqrt{a}$, $a^4 x\sqrt{a}$;) aliave istiusmodi summa prout expositus casus postulaverit. Quippe hæc summa (per analogam ipsius P potestatem divisa) ducta in $\frac{1}{3}RT$, vel (neglecto T) in $\frac{1}{3}R$; exhibebit totius momentum respectu rectarum P M F, E M G; atque ad has aut illas partes, prout signum + vel — prævaluerit; ut ad prop. præced. ostensum est. Unde etiam (ut dictum est) colligitur Centri gravitatis ab illis rectis distantia.

Quo pacto autem habebitur summa omnium $a s$, $a x$; vel omnium $a^2 s$, $a^2 x$; vel omnium $a^3 s$, $a^3 x$; (ope. prop. 10. hujus,) ostensum est ad § E. H. prop. præced. Quod etiam (ut ibidem monitum est § H.) ad alias ejusdem a potestates (indicem habentes numerum integrum) continuabitur; puta, ad $a^4 s$, $a^4 x$; $a^5 s$, $a^5 x$; $a^6 s$, $a^6 x$; &c.

Quod itaque sufficiet casibus eis omnibus, ubi ponuntur M T seu n crescentes vel in ratione angulorum a, vel in horum ratione duplicatâ, triplicatâ, aliâsve multiplicatâ. Ut patet.

Vel etiam, in ipsorum a ratione subtriplicatâ, aut subtriplicatæ multiplicatâ. Quippe si sit $n = R\sqrt[3]{\frac{a}{P}}$, vel $n = R\sqrt[3]{\frac{a^2}{P^2}}$, &c. in horum Cubis, tolletur Radicalitatis nota; nempe $n^3 = \frac{a}{P}R^3$, vel $n^3 = \frac{a^2}{P^2}R^3$; & sic in cæteris: Adeoque $\frac{n^3 s T}{3R^2} = \frac{a s R T}{3P}$, $\frac{n^3 x T}{3R^2} = \frac{a x R T}{3P}$; vel $\frac{n^3 s T}{3R^2} = \frac{a^2 s R T}{3P^2}$, $\frac{n^3 x T}{3R^2} = \frac{a^2 x R T}{3P^2}$; & sic in cæteris. Quæ itaque omnia, ope ejusdem prop. 10. exhiberi poterunt; uti ostensum est.

Verum si ponantur M T, seu n, crescentes in angulorum a ratione subduplicatâ, subquadruplicatâ, aliâve submultiplicatâ, aut ex his utcunque compositâ, (quæ non æquipolleat vel ipsi angulorum a rationi, vel hujus alicui multiplicatæ, vel saltem subtriplicatæ, aut hujus multiplicatæ;) res non ita feliciter succedit. Quoniam hic, ne quidem in Cubis eliminabitur Radicalitatis nota: Adeoque necessitis applicari poterit methodus illa, § E. H. prop. præced. exposita; et prop. 10. hujus petita.

Quæ

Quæ autem, ad § Q. universaliter tradita sunt; Nempe, quacunque ratione crescant MT seu n radii; Sectorum similium magnitudines esse, $\frac{n^2T}{2R}$; eorumque momenta respectu PMF, & EMG, esse $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & $\frac{n^3xT}{3R^2}$: Non modò in his Spiralibus locum habent, ubi radii n sint in angulorum a ratione multiplicatâ, vel submultiplicatâ, vel ex his compositâ; sed quæcunque fuerit utcunque perplexa seu implicata ratio. Quæcunque enim fuerit, siquo modo haberi possit summa omnium $\frac{n^2T}{2R}$, habebitur spiralis magnitudo: &, si haberi possit summa omn. $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & omn. $\frac{n^3xT}{3R^2}$; habebitur istius Momentum respectu PMF, & EMG: & quidem si utraque habeantur; habebitur (momento per magnitudinem diviso) Distantia Centri gravitatis ab illis rectis. R. Fig. 220.

Exempli gratia; si ponantur radii n, crescentes in ratione Ordinatim-applicatarum in Hyperbolâ; puta ut $\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2}$: adeoque $n = \frac{\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2:}}{P}R$: Erunt horum Quadrata, $n^2 = \frac{aP + a^2}{2P^2}R^2$; adeoque $\frac{n^2T}{2R} = \frac{aP + a^2}{4P^2}RT$. Cum itaque (per prop. 1. hujus) haberi possit tum summa omnium a, tum omnium a^2; habebitur etiam, omnium $\frac{aP + a^2}{4P^2}RT$; quæ est ipsa figuræ spiralis magnitudo. Et quidem, si porro haberi possit, summa omnium n^3 seu omnium $\frac{aP + a^2}{2P^3}R^3\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2}$: atque etiam summa omnium $\frac{n^3sT}{3R^2}$, & omnium $\frac{n^3xT}{3R^2}$; hoc est, omnium $\frac{aP + a^2}{6P^3}sTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2}$: & omnium $\frac{aP + a^2}{6P^3}xTR\sqrt{:\frac{1}{2}aP + \frac{1}{2}a^2}$: Hoc est, istius Figuræ Spiralis momenta respectu rectarum PMF, EMG: Momenta hæc, per magnitudinem illam divisa, exhiberent Centri gravitatis distantias ab illis rectis.

Cumque hæc in aliis Spiralium generibus, mille modis variatis, pariter obtineant: amplus hic pateret excurrendi campus, si liberet exspatiari.

Et.

Et quidem nonnulla alia Spiralium genera, in Tractatu meo, *De Curvarum* Ἐυθύνσει exponuntur; quæ, cum multis aliis possent in hunc locum transferri. Sed, ne nimius sim, Lectoris illud industriæ (si opus fuerit) permittendum erit.

SCHOLIUM.

MOnendum hic duxi, (quod & supra, § A. insinuatum est,) in Scholio Prop. 45. *Arithm. Infin.* in assignandâ ratione quam habet Figura Spiralis ad Sectorem conterminum, prout crescunt MT radii, in angulorum AMT ratione simplâ duplicatâ, triplicatâ, quadruplicatâ, &c. Cum (juxta demonstrationis tenorem) dicendum erat, *ut* 1 *ad* 3, 5, 7, 9, *&c.* nescio qua incuria scriptum habetur *ut* 1 *ad* 3, 4, 5, 6, *&c.* Quod cum non animadverterit V. Cl. *Stephanus de Angelis*, merum esse sive Calami sive Calculi lapsum, (non ex demonstrationis vitio ortum;) suspicatus est doctrinam illam de Spiralibus infirmam esse. Cum interim si satis animadvertisset demonstrationis vim (quæ hinc potissimum dependet, quod similes Sectores sint in Radiorum ratione duplicata; adeoque ubi Radiorum series indices habent 1, 2, 3, 4, &c. series sectorum habebunt indices 2, 4, 6, 8, &c. adeoque omnium summa, ad maximum toties sumptum; hoc est, figura Spiralis, ad Sectorem conterminum; ut 1 ad 3, 5, 7, 9, &c.) vidisset, tum demonstrationi vim inesse; tum, emendato mendo numerali, omnia probè constare. Adeoque quam ille prolixâ refutatione (in suo *de Spiralibus* tractatu) doctrinam subversum it: multo facilius, tribus verbis emendâsset; dicendo, [*pro* 3, 4, 5, 6, *substituendum (juxta demonstrationis tenorem)* 3, 5, 7, 9:] quo facto, non erit quod reprehendat. Sed & simul videbit, totam illam quam ille justo volumine *De Spiralibus* doctrinam habet; eodem Scholio summatim tradi: Et quidem (utut hoc ille non statim perspexerit) universaliùs quàm ab ipso tradita est. Cum enim dixeram, doctrinam illam de Parabolis & Paraboloidibus, tum ante traditam, *tum deinceps tradendam*, spiralibus accommodari posse, in quibus crescant MT rectæ, in angulorum PMT ratione *duplicatâ, triplicatâ, quadruplicatâ, &c.* illud *& cætera* extendendum erat non modò ad alias rationes (strictè loquendo) *multiplicatas*, sed & *submultiplicatas*, vel ex multiplicatis & submultiplicatis utcunque *compositas*, vel etiam *numero surdo* exponendas. Quippe illud summatim insinuatum vellem; (quod de Paraboloidibus, magis particulatim, vel ante traditum, vel mox

mox tradendum erat ;) Quemcunque habeat Indicem Series Rectarum M T, (integrum, fractum, surdúmve ;) hujus *Duplum*, indicem esse Seriei similium Sectorum radiis illis descriptorum : Summamque horum, ad maximum toties sumptum, (hoc est, figuram Spiralem ad Sectorem conterminum,) esse, ut 1 ad indicem illum *(duplum)* unitate auctum. Cujus quidem doctrinæ universalis, nonnisi pars est, tota illa quam habet ille de Spiralibus. Quæ tamen non ideo dicta sunt, ut, ab eo traditis, derogatum eam : sed ut ostendam, quàm sit corollariorum ferax generalis illa methodus ; cùm Scholium illud Unicum (nec adeo longum) quò particulatim exponatur, materiam subministrare possit justo Volumini.

PROP. XXIX.

Quæ de Spatio Cycloidali (prop. 15.) tradita sunt non pauca, possunt & Spatio Cissoidali accommodari.

Cissoidis lineæ meminit Pappus lib. 3. prop. 5. (pro duabus mediis proportionalibus inveniendis excogitatæ ;) Cujus hæc natura. Fig. 205.
Sit A D α Semicirculus ; cujus Centrum, C ; Diameter, A α ; cui ad angulos rectos insistat C H D : Ductâ ubivis Chordâ A B, quam secet C D in H ; si in ea sumatur, rectæ B H, æqualis H b ; quæ per omnia b puncta incedit curva A b D, *Cissoides* dicitur. Eademque etiam ultra D punctum eodem ritu continuata (alternato tantum punctorum B b situ, quæ in D coincidunt,) ea ẽst quam hic volumus. Cui Asymptota est $\alpha\,\tau$ recta, circulum in α contingens.

Spatium Cissoidale, dicimus, quod curvæ A b b, rectisque A α, $\alpha\,\tau$, interjacet : interminabile quidem ex parte b τ ; magnitudinis tamen finitæ.

Spatium hoc consideravimus in Tractatu Epistolari, Tractatui de *Cycloide* subjuncto. Ejusque tum magnitudinem, tum momentum respectu rectarum A T, $\alpha\,\tau$; Centrique gravitatis (si quod foret) ab iis distantiam ; Solidique ejusdem conversione sive circa A T sive circa $\alpha\,\tau$, facti magnitudinem, determinavimus.

Est utique illud A b b $\tau\,\alpha$ spatium interminabile, semicirculi A D α triplum. Et Axis Æquilibrii (adeoque, siquod esset, Centrum gravitatis)

Fig.205. vitatis) distat à τα, Sextante Diametri Aα; adeoque, à TA, ejusdem Diametri quinque Sextantibus; eisdem TA, τα, tangentibus parallelus. Centrum autem gravitatis, intelligendum est, in axe illo, ab Aα removeri ad infinitam distantiam; adeoque nusquam erit.

Solidúmque ejusdem circa τα conversione factum, est æquale Solido ex simili conversione Semicirculi ADα, circa eandem τα: adeoque Semicylindro cujus basis sit idem Semicirculus, & altitudo æqualis peripheriæ puncto C circumducto descriptæ. Solidumque ejusdem circa TA conversione factum, est Solidi prioris quintuplum. Solidum verò quod intelligatur ejusdem circa Aα conversione describi; magnitudinis infinitæ.

Ungularum verò eidem insistentium, aciem habentium τα, vel TA; ad similes Ungulas Semicirculo insistentes, easdem acies habentes; eadem est ratio quæ Solidorum istius conversione factorum, ad Solida simili conversione Semicirculi facta.

Ungularum vero; Planum Æquilibrii (in quo & Centrum gravitatis siquod esset,) quæ aciem habent τα, ab eâ distat, $\frac{1}{8}$ rectæ Aα; quæque aciem habent TA, ab ea distant, $\frac{7}{8}$ ejusdem rectæ Aα. Semisolidorum verò, aliorúmve imperfecta conversione factorum, distantia Axis Æquilibrii ab axe conversionis τα vel TA, ad illam in Ungulis distantiam, (ut sæpius ante ostensum est,) ut est ad conversionis arcum Chorda sua.

Quæ omnia cùm ibidem demonstrata sint, non opus est ut eadem hic repetam.

Ut autem de Spatio Cycloidali ostensum est, (prop. 15. hujus,) non modo totum Abτα (fig. 166.) totius ADα Semicirculi triplum esse; sed & partes partium respectivè sumptarum; puta bβτ, bββb, bβαA, triplus partium αBα, BαB, BαA; & sic ubique: Ita in Spatio Cissoidali fig. 205. non modo totum bbAατ (spatium interminabile) triplum totius Semicirculi ADα, (adeoque Semicycloidi Aτα fig. 166. æquale:) sed & portiones bαA, bαb, bατ, fig. 205. triplas respectivarum Semicirculi portionum αBα, BαB, BαA; & sic ubique; (adeoque ipsis Semicycloidis portionibus, bβτ, bββb, bβαA, &c. fig. 166. respectivè sumptis, æquales.) Quod Vir Cl. *Christianus Hugenius* me primus monuit.

Verum hæc, ne mimius sim, mihi nunc non est in animo ulterius prosequi; nedum quæ ad partium Centra gravitatis spectant, quæque hinc dependent.

Il

Id interim monendum duxi, Posse quidem eandem curvam alio adhuc modo construi. Fig. 205.

Cum enim (ut ibidem ex Pappo demonstratum est,) ductâ diametro BCβ, junctâque tum Aβ, tum βb, quæ rectam Aα secet in V; sit (propter tum Bb bisectam in H, tum Bβ in C,) βVb, ipsi CH parallela; adeoque anguli ad V recti: erunt Vα, Vβ, VA, Vb, continue proportionales; hoc est (positis, $AV = v$, $V\alpha = b$, $V\beta = s$, ut antehac sæpius;) continue proportionales, b, s, v, $\frac{v^2}{s} = bV$. (Quod perinde valet, sive sumatur b, in AbD curvâ intra Semicirculum; sive in eâdem extra Semicirculum continuatâ.) Adeoque, sumpto ubivis in A$\beta\alpha$ semiperipheriâ puncto β; sumptâque ad Vβ, VA, (seu s, v, sinum rectum & versum Arcûs $A\beta = a$,) tertiâ proportionali $\frac{v^2}{s}$; erit hoc æqualis ipsi bV ordinatim-applicatæ ad Diametri Aα punctum V. Quæque per omnia b puncta transit Abb, est ipsa Cissoidalis curva. Sumptisque $AV = v$, arithmetice proportionalibus; erunt omnes $\frac{v^2}{s}$, totidem bV spatium Cissoidale complentes. Cujus quidem portio Abα, cum tripla sit segmenti αBα, hoc est segmenti, AbA; erit (per § G. prop. 15.) $\frac{1}{2}eR$, seu $\frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$.

PROP. XXX.

A. B. In Conchoide, quæ ad Axem Ordinatim-applicatas recta
Fig. 306. componitur ex *Sinu-recto & Tangente* ejusdem Anguli: Et quidem ejusdem Circuli in Primariâ, (ubi P C & C A æquantur,) sed diversorum in aliis.

C. Adeoque constat Semi-Conchoidale Planum C A O O H, ex Quadrante Genitore C A R, & figurâ Tangentium R B A O O; ad eundem radium æstimatarum in Conchoide *Primaria*, (ubi C A, P C, æquantur;) sed, in *Secundariâ*, ad alium; (nempe P C:) Majorem quidem in *Protractâ*, (ubi excentricitas P C major est quam A C altitudo,) in *Contractâ* verò (ubi P C minor est quam C A) minorem.

D. Atque, in Conchoidibus diversis invicem Comparatis; Genitores Quadrantes (eorumque segmenta respectiva) sunt in duplicatâ ratione Altitudinum C A. Reliquaque spatia R B A O O, (eorumque respectiva segmenta, ut A B O, vel O B B O,) si Altitudines C A æquales sint; sunt in ratione Excentricitatum: si Excentricitates P C sint æquales; in ratione Altitudinum C A: si neutræ; in eâ quæ ex Altitudinum & Excentricitatum rationibus componitur; seu in ratione rectangulorum C P A.

A.E. Conchoidis Planum (Curvæ & Regulæ interjectum) interminabile est, & magnitudinis infinitæ.

F. Ejusdem verò Momentum, respectu rectæ C H quæ Regula dici solet, finitum est: Unguláque eidem insistens, aciem habens Regulam C H; Solidúmque Plani circa

Re-

Regulam illam conversione facti; sunt quidem Interminata, sed Magnitudinis finitæ, & notæ. Quod & de partibus, ut A B O, perinde valet. Fig. 205.

Plani Semi-conchoidis Centrum gravitatis nullum est,(seu, quod eodem recidit, non nisi in infinitâ ab Axe distantiâ:) Sed neque Ungulæ, nec Solidi conversione facti. G. H.

Idemque obtinet de segmentis O V C H, rectæ C H H adjacentibus; atque de Ungulis Solidisque eò spectantibus: Sed non item de Segmentis remotis A V O, seu A B O; aut Ungulis Solidisve eò spectantibus. Sed neque de Ungulis Solidisque quæ Conchoidem totam spectant (utrinque ab A C porrectam) quæ Centrum gravitatis habent in ipsa A C recta. G.H.I.

IN expositâ quavis rectâ A P, dicatur P polus, A vertex, punctúmque quodvis intermedium C Centrum, rectaque infinita CHH (ad expositam A P perpendicularis) Regula: Atque intelligatur A P recta (ad partes P quantum opus est continuata) circa Polum P manentem sic converti, ut C punctum in recta C H perpetuò maneat; punctóque sui extremo A, curvam designet A O O: Hanc curvam veteres *Conchoidem* dixerunt. A.

Manifestum autem est, (propter rectam P O, regulam C H secantem in H,) punctum O ad C H regulam nunquam perventurum: Sed & (propter H O perpetuò æqualem ipsi C A, & sectionis angulum continuè acutiorem;) eò tandem perventum iri ut puncti O ab ipsâ C H distantia futura sit datâ quàvis minor: Adeóque rectam C H H ad curvam A O O Asymptotam esse; spatiúmque, interminabile. Quæ demonstranda erant.

Centro C, radio C A, describatur circuli quadrans C A R (quem *Genitorem* appello) regulæ C H H occurrens in R; sitque ordinatim-applicata quælibet in Quadrante V B, in Conchoide V O, (quadranti occurrens in B;) jungantur C B, P O. B.

Manifestum est, (propter æquales C A, C B, H O,) parallelas esse C B, H O, hoc est, C B, P O: adeóque angulos A C B, A P O, æquales esse.

Est autem V B, Sinus Rectus Anguli A C B ad radium A C; & C H, hoc est B O, ejusdem anguli A P O seu A C B, Tangens ad Radium P C; (quam *Excentricitatem* appello:) Hoc est, ad eundem

Fig. 206. dem radium, ubi P C, C A, æquantur; ad diverſos, ubi non æquantur. Illas ego Conchoides *Primarias* appello; has, *Secundarias*; & quidem vel *Contractas* vel *Protractas*, prout Excentricitas P C minor eſt vel major quàm Genitoris radius C A, quam *Altitudinem* appello. Puta, in fig. 207. A O O eſt *Primaria*; Secundariæ vero, A o o *Contracta*, & A ω ω *Protracta*.

Adeoque; ut, in Cycloide, fig. 166. ordinatim-applicata quælibet b B V, componitur ex Sinu recto B V in circulo genitore; & ex B b, quæ reſpectivo arcui æquatur; nempe ipſi B A in Cycloide *primariâ* (cujus baſis τ α τ æquatur perimetro Circuli genitoris,) vel in *Secundariis*, (ſive *protractæ* ſint, ſive *contractæ*,) ſimili arcui alterius circuli; cujus nempe perimeter æqualis eſt expoſitæ Cycloidis baſi; (ut ad prop. 20. hujus oſtenſum eſt:) ſic, in Conchoide fig. 206. ordinatim-applicata V B O, componitur ex ſinu recto *VB* (ad radium C R inſcripti Quadrantis C A R) & ex B O, hoc eſt C H, tangente correſpondentis anguli; & quidem ad eundem radium, in Conchoide *primariâ* (ubi P C, C A, æquantur;) ſed in *Secundariis*, ſive protractis ſive contractis, (in quibus P C, C A, non æquantur,) ad diverſum; nempe, ad radium P C. Quod itidem erat demonſtrandum. (Et quidem num illud ante me *quiſpiam* animadverterit, neſcio.)

C. Componitur itaque Semiconchoidale Spatium interminatum C A O O H, ex C A R Quadrante Genitore, & R B A O O, figurâ Tangentium (diſtortâ) unius quadrantis, Radio P C convenientium, ſinibus verſis arithmeticè-proportionalibus reſpondentium: ſed, quæ altitudinem habeat A C. Pariter atque componitur Semicycloidale ſpatium A τ α fig. 166. ex Semicirculo Genitore A D α, & A D α τ figurâ Arcuum diſtortâ (ſinibus verſis arithmeticè-proportionalibus reſpondentium,) ad eundem cum circulo genitore Radium, in Primariâ; ad alium, in Secundariis; ſed quæ Altitudinem habeat eandem cum Genitore circulo.

D. Hinc ſequitur; In Conchoidibus diverſis, ejuſdem altitudinis, (intellige, quarum eadem ſit radii C A longitudo, ſeu magnitudo eadem quadrantis Genitoris C A R,) ſed quæ inæquales habeant Excentricitates P C; Conchoidale ſpatium (quod extra Circuli quadrantem eſt) R B A O O, (quam Tangentium figuram eſſe, jam oſtendimus) vel etiam ejuſdem aſſignatum quodvis ſegmentum (ordinatim-applicatâ abſciſſum) A B O, vel duabus ordinatim-applicatis interjectum O B B O; in eâ ratione majora eſſe vel minora quâ majores ſunt vel minores ſuæ reſpectivæ Excentricitates P C. Nam quâ ratione

ratione crescit vel decrescit radius P C, eâdem ratione crescunt vel decrescunt Tangentes omnes (respectivè sumptæ) C H, hoc est, omnes B O, spatium complentes R A O, vel B A O, vel O B B O. Adeoque (propter easdem utrobique respectivas altitudines) in eadem ratione augetur vel minuitur spatium quod complent illæ rectæ. Putà, (fig. 207.) Spatium A B O in *Primariâ*; ad A B o, in secundariâ *Contractâ*; & A B ω, in *Protractâ*; eam rationem habet (propter eandem altitudinem) quam habet Excentricitas P C, ad p C, & π C. Et sic ubique. Fig. 207.

Si verò, eâdem manente Excentricitate P C, mutetur Altitudo C A; erunt respectiva spatia A B O, &c. altitudinibus illis proportionalia. (Nempe, propter easdem latitudines respectivas.)

Adeoque, si mutentur utræque; erunt respectiva Spatia, in eâ ratione quæ componitur ex rationibus Altitudinum C A, & Excentricitatum P C: hoc est, in ratione rectanguli P C A in unâ, ad rectangulum P C A in alterâ. Quod (credo) primus indicabam ego, in *Commercio Epistolico*, Epist. 39, 40.

Quadrantes autem Genitores, si altitudines (hoc est, radios,) æquales habeant, æquales esse; sin inæquales, in Radiorum suorum ratione duplicata esse; notius est quam ut demonstratu opus sit.

Quod autem Conchoidale spatium interminatum, sit etiam magnitudinis Infinitæ; sic colligitur. E.

Seponamus aliquantisper Quadrantem genitorem; & adjunctam figuram Tangentium consideremus: Eamque (exempto Quadrante genitore) restituamus in situm proprium, ut in fig. 208. ubi rectæ B O, figuram Tangentium complentes, (sinibus rectis A V arithmeticè-proportionalibus respondentes,) ad axem C A ordinatim-applicantur. Fig. 208.

Esto autem, fig. 209. Quadrans C A R seorsum exemptus: sumptóque, ubivis in C A radio, puncto V; erit V C (ejusdem a centro distantia) sinus complementi, istius anguli cujus A V est sinus versus, & V B sinus rectus, & A T Tangens, est autem (propter similia triangula) ut C V ad V B, sic C A ad A T; Hoc est, (positis $VC = x$, $VB = s$, $CA = R$,) ut x ad s, sic R ad $\frac{s}{x} R = AT = BO$. Fig. 209.

Si itaque sumi intelligantur, ut (in fig. 208.) C V seu x, arithmeticè-proportionales; vel, his æquales, V u, triangulum C A u complentes: Sumptis ubique, ut x ad s sic R ad *quartam*; erunt illæ Fig. 208.

Fig. 208. illæ quartæ, series totidem AT, hoc est, totidem BO, complentium RBAO figuram tangentium.

Sed (neglectis aliquandiu tertiis R) perpendamus quid futurum sit, si, pro R, substituerentur totidem s: Adeoque sumerentur ubique, ut x ad s sic s ad *quartam*. Erunt utique illæ *quartæ*, totidem $\frac{s^2}{x}$: Hoc est, (propter, in fig. 209. VBq = CBq — CVq = CAq — CVq, seu $s^2 = R^2 - x^2$,) totidem $\frac{R^2 - x^2}{x}$; seu totidem $\frac{R^2}{x} - x$.

Sunt autem (propter x arithmeticè proportionales, ab ipso C puncto, seu o, ordientes; & R^2 eandem ubique quantitatem;) *Omnes* $\frac{R^2}{x}$, series *Reciproca primanorum*, (per def. 2. hujus.) Indicem habens —1. Adeoque ad totidem ultimo æqualium, hoc est ad R^2, in ratione infinitâ, (per prop. 1. vel 7. hujus;) & propterea, magnitudinis infinitæ.

Sed, *Omnes* x, sunt series Primanorum; adeoque finitæ magnitudinis: Nempe $\frac{1}{2}R^2$ seu $\frac{1}{2}AR$, (per prop. 1. vel 7. hujus:) tantundem scilicet atque CAu Triangulum, quod complent rectæ Vu ipsis x æquales.

Et propterea, *Omnes* $\frac{R^2}{x} - x$, magnitudinis adhuc infinitæ. Nam finitæ magnitudinis ab infinitâ detractio, relinquit adhuc infinitam.

Verum, quam jam consideramus, Figura Tangentium etiam adhuc major est: Quippe tangentes singulæ, sunt (non quidem totidem $\frac{s^2}{x}$ seu $\frac{R^2 - x^2}{x}$, sed) totidem $\frac{sR}{x}$: Adeoque, (propter R; ubique majorem quam s,) Series *Omnium* $\frac{sR}{x}$, seu Figura Tangentium, major erit quàm *Omnium* $\frac{s^2}{x}$; adeoque multò magis erit magnitudinis infinitæ. Adeoque multò adhuc magis, Spatium Conchoidale, seu Semiconchoidale CAOOH, (ex quadrante generatore, & hac figurâ Tangentium, composita,) magnitudinis erit infinitæ. Quod demonstrandum suscepimus.

Fig. 206. Verum quidem est, in Conchoidibus *Secundariis*, ipsas BO, non esse tangentes ad radium CA, sed ad radium PC. Hoc tamen infinitati figuræ non derogat quippiam. Si enim PC major sit quam CA, fi-

entium

um sit,
ubique,

docest,

C Vq,

psō C
) Om-

ndicem

ad R²,
mag-

gnitu-
antun-
e Vu

Nam

n,
adhuc
otidem

ue ma-

major

nis in-

e, seu
& hac
Quod

), non
en infi-
n CA,
fi-

PRO

figura
non
quàm
ratio
Quod
infini
intelli
ties m
ium
Q
respec
aciem
magn
subjun
Q
restæ
licet i
tantu
bens
ad u
Pl
dem
rotid

$\frac{ss}{x}$ fe

tange
vior c
CV
circul
prop.
drans
Cui it
in suo
Et

cujus

dem
tem C

figura R B A O O in eadem ratione augetur, (ut § D. ostensum est,) non minuitur; adeoque non minus erit infinita. Sin P C minor sit quàm C A, minuitur quidem figura R B A O O; sed non nisi in eâ ratione minuitur, quâ P C minor est; Hoc est, in ratione finitâ: Quod autem infinito non nisi in ratione finitâ minus est, etiamnum est infinitum; adeoque plani infinitudo non destruitur. Saltem, nisi intelligatur ipsa P C penitus evanescere (ut P C quàm C A sit infinities minor) coincidentibus P C punctis; quo casu Conchoidale spatium degenerabit in C A R quadrantem. Fig. 206.

Quod autem Planum hoc, utut magnitudinis infinitæ, Momentum respectu Regulæ suæ C H H finitum habeat; adeóque Ungulas quæ aciem habeant Regulam illam, Solidáque circa illam conversione facta, magnitudinis esse finitæ; (quod nos, ni fallor, primi docuimus, in subjunctis Tractatui de Cycloide;) sic ostendimus. F.

Quodnam habeat momentum Quadrans genitor C A R, respectu rectæ C R, ostensum est prop. 15. § Q. nempe $\frac{1}{3} R^3$, (semissem scilicet istius quam habet Semicirculus respectu diametri suæ:) Atque tantundem est Semiquadrantalis Ungula eidem insistens, aciem habens C R: Solidúmque ipsius conversione circa C R factum (utpote ad ungulam illam ut P ad R,) $\frac{1}{3} R^2 P$; nempe Hemisphærium.

Plani reliquum, R B A O O, ex Tangentibus constat, seu totidem B O; Hoc est, in Conchoide primariâ (ubi P C $=$ C A $= R$,) totidem $\frac{sR}{x}$ seu $\frac{s}{x} R$; in Secundariis (posito P C $= \rho$) totidem $\frac{s\rho}{x}$ seu $\frac{s}{x}\rho$: (Nempe in eâ ratione vel longiores vel breviores quàm tangentes ad radium C A $= R$, quâ P C $= \rho$ longior est vel brevior quam C A.) Quæ si ducantur singulæ in suas ab C H distantias C V $= x$, fiunt totidem sR vel $s\rho$. Sunt autem *omnes s*, idem atque circuli quadrans C A R quem complent; puta $\frac{1}{8} RP$, (per § D. prop. 15.) Adeoque *Omnes s R*, seu *Omnes s ρ*, idem atque quadrans ille in distantia R vel ρ suspensus; hoc est, $\frac{1}{8} R^2 P$, vel $\frac{1}{8}\rho RP$: Cui itaque æquatur Momentum *Omnium* B O, seu plani R B A O O, in suo loco suspensi, respectu rectæ C H.

Et similiter ostendetur, Ungulam quadrantalem eidem insistentem cujus acies C H; hoc est *Omn.* $\frac{sR}{x} \times x$, seu *Omn.* $\frac{s\rho}{x} \times x$, tantundem esse atque *Omn. s R*, seu *Omn. s ρ*. Hoc est, circuli quadrantem C A R in altitudinem R, seu ρ, $=$ C P ductum; seu Cylindrum qua-

Fig. 206. quadrantalem, cujus Basis C A R quadrans, & Altitudo ipsi C P æqualis: Nempe, $\frac{1}{8}R^2P$ vel $\frac{1}{8}\varrho RP$. Solidúmque conversione plani R B A O O circa C H factum (utpote ad Ungulam illam, ut P ad R,) tantundem atque Cylindrum quadrantalem super eadem Base C A R, altitudinem habentem æqualem Peripheriæ radio C P descriptæ: Hoc est, $\frac{1}{8}RP^2$, seu $\frac{1}{8}\varrho P^2$.

Idémque, eadem ratione, in partibus ostendetur. Nempe, Momentum segmenti A B O respectu C H H, idem atque segmenti A V B in distantia R, vel ϱ, = C P suspensi. Ungulámque quadrantalem eidem A B O insistentem aciem habentem C H H; tantundem esse atque Cylindrum cujus basis sit A V B & altitudo C P. Solidúmque ejusdem A B O conversione circa C H H factum, tantundem atque Cylindrum cujus basis sit idem A V B segmentum & altitudo æqualis Peripheriæ radio C P descriptæ. Perinde enim procedit demonstratio de partibus respectivè sumptis, atque de totis.

G. Plani verò totius C A O O H, aut etiam totius figuræ Tangentium R B A O O, Centrum gravitatis nullum est. Cùm enim Momentum (ut jam ostensum est) sit Finitum, & Magnitudo Infinita; si illud per hanc dividi intelligeretur, prodiret Centri gravitatis ab C H H distantia infinitè-exigua: Neque tamen in ipsâ C H esse, commodè dici posset; quippe tum totum pondus ad unas partes rectæ C H H (quam esse tamen axem Æquilibrii oporteret) poneretur. Item, cùm Spatium jam ostendatur infinitum esse; in quacunque ab A C distantiâ finitâ poni intelligeretur Centrum gravitatis; esset, citra illud, pondus finitum & in distantiâ finitâ; sed ultra Centrum illud, pondus infinitum in distantiâ item infinitâ: quod cum naturâ Centri gravitatis non consistit. Nullum igitur erit Plani totius Centrum gravitatis, vel (quod eodem recidit) nonnisi in infinitâ distantiâ ab A C.

Idemque similiter ostenderetur de totius portione O V C H, vel O B R, quæ rectæ C H H adjaceat. Quippe quicquid id sit quod ultra V B O abscinditur, finitum erit, (utpote undecunque terminatum;) reliquúmque quod ipsi C H H adjacet, manebit adhuc magnitudinis infinitæ.

Segmentum verò quodcunque remotius A V O, vel A B O; cum & Momentum finitum habeat, & Magnitudinem finitam atque undecunque terminatam; habebit etiam Centrum gravitatis.

H. In Ungula Semiquadrantali, aciem habente C H, quæ singulis B O rectis insistunt Parallelogramma rectangula (ungulam complentia)

plentia) ſunt (propter longitudinem $\frac{sR}{x}$ ſeu $\frac{s\rho}{x}$, in reſpectivas altitudines, diſtantiis x æquales, ductas) totidem sR ſeu $s\rho$: Quæ tantundem ſunt atque totidem rectangula reſpectivis V B $= s$ inſiſtentia, communem altitudinem habentia R, ſeu ρ, $=$ P C. Súntque in eiſdem à C H H diſtantiis. Adeóque eadem habent, reſpectu ipſius CHH momenta; tum ſigillatim reſpectivè ſumpta, tum ſimul omnia. Hoc eſt, idem eſt Momentum Ungulæ R B A O O (ejúſve ſegmentorum, ordinatim applicatis abſciſſorum, A B O, O B R,) atque Cylindri C A R (hujuſve ſegmentorum reſpectivè ſumptorum, A V B, B V CR,) reſpectu ejuſdem rectæ C H H. Fig. 206.

Diſtat autem quadrantis C A R (adeoque Cylindri hinc inſiſtentis, per § E. prop. 5. hujus,) Centrum gravitatis à C H H, $\frac{8R^2}{3P}$, (per § Q. prop. 15.) quæ in quadrantis magnitudinem $\frac{1}{8}RP$ ducta, exhibet quadrantis Momentum reſpectu C H H, $\frac{1}{3}R^3$; adeoque (propter altitudinem R vel ρ,) Cylindri momentum $\frac{1}{3}R^4$ vel $\frac{1}{3}\rho R^3$. Idemque propterea momentum erit Ungulæ R B A O O reſpectu ejuſdem CHH. Atque hoc Momentum, per Ungulæ magnitudinem $\frac{1}{8}R^2P$ ſeu $\frac{1}{8}\rho RP$, diviſum; exhibet diſtantiam Centri gravitatis (ſiquod ſit) vel ſaltem Axis Æquilibrii à C H H (intellige à perpendiculari plano ſuper recta C H H erecto,) $\frac{8R^2}{3P}$. (Tantundem utique quantum inde diſtat per § Q. prop. 15. Centrum gravitatis quadrantis C A R à CHR, ſeu Semicirculi ab eâ cui adjacet diametro.) Et propterea, Solidi Semiconverſione circa C H H facti, Centri gravitatis inde diſtantia, (utpote ad illam Ungulæ, ut $2R$ ad $\frac{1}{2}P$, ſeu $4R$ ad P, per § E. F. prop. 14. hujus,) $\frac{32R^3}{3P^2}$.

Similiter de Ungulæ ſegmentis, putà quæ ipſis A B O, O B R, inſiſtunt; procedendum erit. Sunt utique illa æqualia reſpectivis Cylindri ſegmentis, quæ ipſis A V B, B V C R, inſiſtunt; atque in eiſdem à C H H diſtantiis; adeoque & æqualia habent momenta: quæ quanta ſint, ex prop. 15. hujus, facilè eſt colligere. Eadémque momenta, per reſpectivas magnitudines diviſa, exhibebunt Centrorum gravitatis (ſiqua ſint) à C H H diſtantias reſpectivas. Atque inde colligetur (per § E. F. prop. 14. hujus) Semiſolidorum (aliorúmve imperfectâ converſione circa C H H factorum) Centri gravitatis (ſiquod eſt) inde diſtantia.

Et, propterea; cùm etiam Ungularum (aut Solidorum correſpondentium) quæ C A R (ejúſve portiones) ſpectant, tum magnitudines, tum Centra gravitatis determinata ſint, prop. 15. 16. hujus: Ungularum ſimiliter quæ Conchoidale ſpatium C A O O H (ejuſque partes) ſpectant, Momenta & Magnitudines (per prop. ult. cap. præced.) non minùs determinantur, quàm quæ Figuram Tangentium C A O O (ejúſque partes) ſpectant.

I. Fig. 208. Si vero, eorundem parallelogrammorum ipſis B O (fig. 208.) inſiſtentium; hoc eſt, totidem sR vel $s\rho$, (ut ſupra oſtenſum eſt;) reſpectu rectæ A C vel A R (cui, exempto quadrante, ibidem adjacent) momentum conſideretur: Cum ſua Centra gravitatis in mediâ longitudine ſita ſint (per prop. 2. hujus,) erunt eorum ab A B R diſtantiæ reſpectivæ, $\frac{sR}{2x}$, ſeu $\frac{s\rho}{2x}$, (nempe longitudinum ſuprà inventarum ſemiſſes:) quæ in reſpectivas magnitudines sR vel $s\rho$ ductæ, exhibent eorum reſpectu rectæ A B R momenta $\frac{s^2R^2}{2x}$, ſeu $\frac{s^2\rho^2}{2x}$: Hoc eſt, (propter $s^2 = R^2 - x^2$,) $\frac{R^2 - x^2}{2x}R^2$, ſeu $\frac{R^2 - x^2}{2x}\rho^2$: Hoc eſt, $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$, ſeu $\frac{\rho^2 R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\rho^2$.

Eſt autem, ſeries omnium $\frac{R^4}{2x}$, ſeu $\frac{\rho^2R^2}{2x}$, Reciproca primanorum; cujus itaque magnitudo infinita erit, (per prop. 1. vel 7. hujus:) Sed omnium $\frac{1}{2}xR^2$ ſeu $\frac{1}{2}x\rho^2$, ſeries primanorum, adeoque magnitudinis finitæ, (per prop. 1. vel. 6. hujus:) Hujus itaque et illâ ſubductio, non impedit quin adhuc maneat, omnium $\frac{R^4}{2x} - \frac{1}{2}xR^2$ ſeu $\frac{\rho^2R^2}{2x} - \frac{1}{2}x\rho^2$ ſeries, hoc eſt, Ungulæ R B A O O (aciem habentis C H H) momentum reſpectu rectæ A B R, magnitudinis infinitæ. Adeóque Momentum illud infinitum, per Ungulæ Magnitudinem (quam finitam eſſe jam oſtenſum eſt, § F.) diviſum; diſtantiam Centri gravitatis ab A B R exhibebit infinitam: Et multò magis fig. 206. (interpoſito quadrante C A R) diſtantiam Centri gravitatis ejuſdem Ungulæ R B A O O (diſtortæ) diſtantiam à recta A V C infinitam: Et magis adhuc, totius C A O O H Ungulæ Conchoidalis, Centri gravitatis ab eadem A V C diſtantiam infinitam. Quod itaque

itaque nusquam est; seu (quod eodem recidit) non nisi in infinitâ distantiâ ab A C.

Idémque similiter ostendetur, de Ungulâ segmenti C V O O H, ipsi C H H adjacentis: Atque etiam de solidis conversione (perfectâ vel imperfectâ) sive totius C A O O H sive segmenti C V O O H factis: Nempe, distantiam Centri gravitatis ab A C infinitam esse.

Ungula verò segmenti remoti A V O, (utpote undique terminata, adeoque magnitudinis finitæ, & in distantiâ finitâ,) Momentum habet finitum, & Centrum gravitatis. Et similiter, solidum conversione factum.

Item, quæ Conchoidem totam (utrinque in infinitum porrectam) spectant, (aut etiam ejusdem segmentum, ordinatim-applicatâ abscissum, & utrinque ab A C æqualiter porrectum) Ungulæ, Solidáque conversione facta, (propter duos semisses, utrinque ad A C positos, invicem æquiponderantes,) Centra gravitatis habebunt; in ipsâ quidem A C rectâ (seu Plano huic perpendiculariter insistenti;) atque in eâ à C distantiâ quam ad § H. modò determinavimus.

PROP.

Fig. 310.

PROP. XXXI.

A. Spatium Hyperbolicum exterius, (Curvæ & Asymptotis interjectum,) ex Primanorum reciprocis conflatur: inscripta Parallelogramma habens invicem æqualia.

B. Estque suapte naturâ utrinque interminabile.

C. Estque magnitudinis infinitæ, sive ex utraque sive ex alterâ tantum parte interminatum maneat: Sin utrinque truncatum seu terminatum censeatur, magnitudinis finitæ.

D.E. Portio hujus, ex altera tantum parte truncata, & rectâ terminata quæ alteri Asymptotarum parallela sit, (ut ASHhσ,) utut magnitudinis sit infinitæ, momentum tamen habet respectu istius Asymptotæ (Aσ) finitum: Ungulámque, cujus acies sit Asymptota illa, exhibet magnitudinis finitæ, & noto Parallelepipedo æqualem: Solidúmque conversione circa Asymptotam illam factum, magnitudinis finitæ & notæ.

F. Quæque huic Portioni sive toti (ut ASHhσ,) sive ejusdem parti duabus rectis Asymptotæ illi parallelis interjectæ, (ut SCIH) insistit Ungula, aciem habens Asymptotam illam; habet Æquilibrii Planum (adeoque & Axem Æquilibrii, & siquod sit Centrum gravitatis) in perpendiculari Plano quod præcisè medium sit inter parallelas rectas portionem hanc, ejusve partem expositam, terminantes; atque in illo per aciem plano quod Ungulæ altitudinem bisecat. Centrum autem gravitatis quod hujusmodi Ungulam, ipsi Asymptotæ (quæ acies ipsius est) contiguam, respicit; nullum est, vel (quod eòdem recidit) nonnisi in infinitâ distantiâ ab alterâ Asymptotarum.

Portionis

Portionis hujusmodi utrinque truncatæ (duabus Asymptotæ parallelis interjectæ (ut S O V H , S C I H,) magnitudo, (vero proxima,) calculo assignari potest quantumlibet accuratè. G.

Adeoque & Portionis interioris; ut H V X, H I x, vel H V D, H I d. H.

Et utriusque momentum tum respectu Asymptotæ A σ, tum respectu Axis vel Diametri A X, A x; Centríque gravitatis inde distantia. Adeoque ipsum gravitatis Centrum. Idque in Hyperbolis tum Erectis, tum Scalenis. I. K.

Habetur etiam Hyperbolici Conoideos (vel Pyramideos) tum magnitudo, (nempe ad Cylindrum seu Prisma, ejusdem basis & altitudinis, ut $3T+2D$, ad $6T+6D$;) tum Centrum gravitatis; utpote quod in ipso Solidi Axe ita constitutum est, ut pars ad verticem sit ad totum, ut $4T+3D$ ad $6T+4D$. L.

Hinc etiam habetur (quæ cum Hyperbolæ quadraturâ conjuncta est) Curvæ Parabolicæ Rectificatio; seu Recta huic curvæ æqualis. M.

Item, Superficiei Curvæ Conoideos Parabolici Expansio; seu Plana huic Curvæ æqualis. N.

Aliaque multa, quæ Curvas alias tum Lineas tum Superficies spectant, ad Rectas & Planas reducendas, (earumque Centra gravitatis,) subjungi possent. O.

Sit H h h Hyperbola, cujus Asymptotæ A S, A σ, (angulum ad A utcunque facientes,) Axis A X, vertex V: Alterique ex Asymptotis, puta A σ, parallela S H, aliæque quotlibet s h (æqualibus intervallis dissitæ) spatium curvæ & asymptotis interjectum complentes; quibus ex adverso respondeant totidem s t complentes A S T triangulum, adeoque ipsis A s proportionales. A. Fig. 210, 211.

Ostendimus jam olim (ad prop. 88, 91, 92, 94, 95, 103, *Arithmeticæ Infinitorum*) Figuram (nisi *Spatium* appellare malis) curvæ & asymptotis interjectam, ex *Primanorum Reciprocis* conflatam esse; adeoque natura sua utrinque interminabilem esse, (tum ad partes h σ,

tum

Fig.210, 211. tum ad partes H S ;) & magnitudinis infinitæ , sive utrinque sive ex alterâ tantum parte interminata censeatur ; sed , utrinque truncatam, adeóque undique terminatam, magnitudinis esse finitæ.

Nempe ; propter inscripta Parallelogramma A S H σ, A s h σ, &c. omnia inter se æqualia , (quæ nota est Hyperbolæ proprietas, per prop. 12. lib. 2. *Apollonii,*) erunt ubique rectæ S H, s h, ipsis A S, A s, (adeoque ipsis S T, s t,) reciprocè proportionales ; hoc est, reciprocæ Primanorum (seu arithmeticè proportionalium ;) ex talibus itaque Figura seu Spatium illud conflatur. Quod erat primo demonstrandum.

B. Cum itaque ita sumi possit s punctum , ut recta A s ad A S, seu s t ad S T , sit in ratione quantumvis exiguâ , (donec tandem in ipsum A punctum degeneret,) erit propterea (quæ illi respondeat) s h ad S H in ratione quantumvis magnâ,(donec tandem quæ ipsi A puncto respondere intelligatur evadat infinita :) Unde sequitur , respectiva puncta h, σ , nonnisi post infinitam distantiam (hoc est, nunquam,) coitura : (Utut intervallo tandem distent quod dato minus sit, quantillum scilicet est A s.) Adeoque Spatium illud esse, ad partes h σ, interminabile : rectámque A σ asymptotam esse.

Similiter ; Cum ita sumi possit (in A S continuatâ) punctum s, ut sit A s ad A S, seu s t ad S T , in ratione quantumvis magnâ (nec unquam eò perveniri possit ut non possit major sumi,) erit propterea quæ ipsi respondeat reciprocè proportionalis sh,ad SH,in ratione quantumvis exiguâ, (nec eo tamen pervenietur ut non possit sumi minor.) Unde sequitur ; neque unquam coitura esse puncta H, S, (utut, ad distantiam datâ quâvis minorem , continuè accedant :) Adeoque Spatium idem , ad partes etiam H S, interminabile esse : rectámque A S similiter esse Asymptotam. Quæ itidem erant demonstranda.

C. Intelligatur autem Spatium illud ex alterâ parte truncatum (putà ad partes H S,) recta H S (ipsi A σ parallelâ) terminatum, interminatum verò ad partes h σ : Erit (propter seriei ex primanorum reciprocis Indicem — 1 , per def. 2. hujus,) Spatium illud A S H h σ, ad inscriptum Parallelogrammum A S H σ , ut 1 ad — 1 + 1, (per prop. 1. vel 7. hujus ;) hoc est, ut 1 ad 0 : adeoque magnitudinis Infinitæ. Quod item erat demonstrandum.

Atque similiter ostendetur , Spatium idem, rectâ h σ terminatum, & interminatum ad partes H S , magnitudinis esse infinitæ. Adeoque , à fortiori, si utrinque fuerit interminatum. Quæ itidem probanda erant.

Si

Si verò utrinque truncatum, adeoque & terminatum, fuerit; putà, rectis HS, hσ; vel HS, sσ; (vel aliàs utcunque:) Manifestum est, figuram illam sic truncatam, (utpote undique terminatam,) puta SHhσA, vel SHhs, magnitudinis esse finitæ. Quod etiam erat propositum. Fig. 210, 211.

Intelligatur itaque Basi SH, parallela recta CI, portionem CSHI abscindere. Sitque basis SH = *B*, latus AS (vel, in obliquangulis, figuræ altitudo, AP) = *A*; adeoque parallelogrammum inscriptum ASHσ = *AB*: Item CS (vel, in obliquangulis, ut fig. 211. hujus altitudo, CP) = *C*: Ipsiusque *A*, vel *C*; particulæ infinitæ exiguæ, *a*, *a*, &c. Cum itaque rectæ sh, planum complentes, sint ipsis As (seu harum altitudinibus,) hoc est, suis à vertice distantiis, reciprocè proportionales; Hoc est, As, AS :: SH . sh: Erunt ipsæ sh, (a vertice deorsum,) $\frac{AB}{0}$, $\frac{AB}{a}$, $\frac{AB}{2a}$, $\frac{AB}{3a}$, &c. usque ad basin $\frac{AB}{A} = B$: Vel (à base sursum) $\frac{AB}{A}$, $\frac{AB}{A-a}$, $\frac{AB}{A-2a}$, $\frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $\frac{AB}{A-A} = \frac{AB}{0}$ (si ad ipsam verticem procedatur;) vel (si tantum ad CI) usque ad $\frac{AB}{A-C}$. Quorum itaque omnium Aggregatum, sunt ipsum quod complent planum. D.

Eædemque rectæ, in suas singulæ à vertice distantias ductæ; puta, $\frac{AB}{a}$ in a, $\frac{AB}{2a}$ in $2a$, &c. hoc est, totidem *AB*; sunt ipsa Ashσ parallelogramma; (quæ itaque omnia, ut prius dictum est, sunt invicem æqualia.) E.

Sed & eædem rectæ in easdem distantias ductæ, sunt earundem Momenta respectu rectæ Aσ: Vel etiam, parallelogramma, iisdem sh rectis insistentia, Semiquadrantalem Ungulam complentia, aciem habentem Aσ: Quæ itaque sunt totidem *AB*. Et propterea quæ toti ASHhσ (figuræ interminatæ) insistit, aciem habens Aσ, (seu Plani ASHhσ momentum respectu Aσ,) est ipsum *AB* in *A* (totius altitudinem) ductum: Hoc est, A^2B. Et similiter ejusdem Ungulæ portio ipsi ACIhσ insistens (seu plani hujus Momentum respectu Aσ,) est *AB* in *A—C*; hoc est, A^2B-ABC: Quæque portioni SHIC insistit, aciem itidem habens Aσ, (seu plani momentum respectu Aσ,) est *AB* in *C*; hoc est *ABC*.

Habetur itaque, quæ plano interminato, magnitudinis Infinitæ,

 ASHhσ,

Fig. 210, 211. A S H σ, insistit Ungula (aciem habens A σ) magnitudinis Finitæ; nempe Solido $\mathcal{A}^2 \frac{}{}$ æqualis. Ejusdemque Plani (magnitudinis infinitæ) quod conversione circa A σ describitur, Solidum Magnitudinis Finitæ: Quippe, ad ungulam illam, ut (*P* ad *R*, hoc est) ut Circuli Peripheria ad ejusdem Radium; (per prop. 12. hujus:) Estque hoc Torricellii *Solidum Hyperbolicum Acutum.*

F. Hinc etiam sequitur; istius Ungulæ (aciem habentis A σ) sive quæ toti A S H h σ, sive quæ utrivis portioni A C I h σ, vel S C I H, insistit, Centrum gravitatis (nempe si quod sit) seu Planum Æquilibrii, esse in eo plano quod inter extrema medium est. Nempe, primæ, in eo quod medium est inter A σ & S H, (quódque ab A σ seu H S distat $\frac{1}{2}$ *A*;) secundæ, in medio inter A σ & C I, (quódque ab A σ seu C I distat $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C$;) tertiæ, in medio inter C I & S H, (adeoque à C I vel S H distat $\frac{1}{2}C$.) Quippe, cùm singulæ rectæ h s planum complentes æqualiter onerantur (nempe parallelogrammo *A B*,) Centrum gravitatis seu Æquilibrii planum in ipso medio erit (non minus quàm si Parallelogrammi plano insisteret Parallelepipedum, altitudinem habens ipsi *A* æqualem;) per prop. 2. vel 3. hujus.

Atque in quo per aciem plano situm sit, jam supra sæpius ostensum est; (nempe, in eo quod Ungulæ altitudinem bisecat.) *Ergo*, in eâ rectâ quæ est utrique communis: quæ itaque recta, est Axis Æquilibrii.

In quo autem hujus rectæ puncto sit Centrum gravitatis (quod ungulam respiciat ipsi A σ contiguam) si inquiratur: Invenietur, (secundum ea quæ tradita sunt ad prop. 8. hujus) nusquam esse: seu (quod eodem recidit) in distantiâ (ab A S) infinitâ. Est enim Series Magnitudinum, series Æqualium (propter æqualia parallelogramma ipsis s h rectis insistentia,) cujus Index, 0; adeoque Magnitudo, verbi gratia, Ꝓ *P*: Series verò Distantiarum (Centrorum gravitatis) ab A S, (utpote in mediâ longitudine rectarum s h,) Series est reciproca primanorum (qualis est ipsa rectarum series) cujus Index, -1: Et propterea Series Momentorum (ex illis conflata) series item reciproca primanorum; (propter $-1+0=-1$.) Adeoque Momentum integrum, $\frac{1}{-1+1}$ Ꝓ *P D* $= \frac{1}{0}$ Ꝓ *P D*: Ꝓ *P*) $\frac{1}{0}$ Ꝓ *P D* ($\frac{1}{0}$ *D*. Hoc itaque per Magnitudinem Ꝓ *P* divisum, exhibebit distantiam ab A S, $\frac{1}{0}$ *D*; hoc est, quæ sit ad *D* (distantiam centri gravitatis basis ab A S;) seu, in hoc casu, ad $\frac{1}{2}$ *B*; ut 1 ad 0. Quæ ratio est infinita.

Sed,

Sed, (ut ad Planum redeamus,) ostensum est, (§ D.) CSHI, (planum interminatum,) æquale esse aggregato omnium sh, hoc est, omnium $\frac{AB}{A} + \frac{AB}{A-a} + \frac{AB}{A-2a} + \frac{AB}{A-3a}$, &c. usque ad $CI = \frac{AB}{A-C}$. G. Fig. 210, 211.

Est autem $\frac{A}{A-a} = 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in infinitum. (Quod dividendo A per $A-1$ patebit.)

$$A-a)\,A\,(1, +\frac{a}{A}, +\frac{a^2}{A^2}, +\frac{a^3}{A^3}, \&c.$$
$$\underline{A-a}$$
$$+a$$
$$\underline{+a-\frac{a^2}{A}}$$
$$+\frac{a^2}{A}$$
$$\underline{+\frac{a^2}{A}-\frac{a^3}{A^2}}$$
$$+\frac{a^3}{A^2}$$
$$\underline{+\frac{a^3}{A^2}-\frac{a^4}{A^3}}$$
$$+\frac{a^4}{A^3}$$
&c.

Adeoque $\frac{AB}{A-a}$, $= 1 + \frac{a}{A} + \frac{a^2}{A^2} + \frac{a^3}{A^3}$ &c. in B. Et similiter ostendetur $\frac{AB}{A-2a}$, $= 1 + \frac{2a}{A} + \frac{4a^2}{A^2} + \frac{8a^3}{A^3}$ &c. in B. Et $\frac{AB}{A-3a}$, $= 1 + \frac{3a}{A} + \frac{9a^2}{A^2} + \frac{27a^3}{A^3}$ &c. in B. Et similiter in cæteris usque ad $\frac{AB}{A-C} = 1 + \frac{C}{A} + \frac{C^2}{A^2} + \frac{C^3}{A^3}$ &c. in B. Vel, posito $A=1$, (quo ipsius A potestates omnes deleantur,) B in, $1+a+a^2+a^3$ &c. Et B in, $1+2a+4a^2+8a^3$ &c. Et B in, $1+3a+9a^2+27a^3$ &c. Et sic deinceps usque ad B in, $1+C+C^2+C^3$ &c.

Fig. 210, 211.

Erunt ergo, omnes s h (spatium CSHI complentes) posito $A = 1$,

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 \text{ \&c.} \\ 1 + 2a + 4a^2 + 8a^3 + 16a^4 \text{ \&c} \\ 1 + 3 + 9a^3 + 27a^3 + 81a^4 \text{ \&c.} \\ \text{Et sic deinceps usque ad} \\ 1 + C + C^2 + C^3 + C^4 \text{ \&c.} \end{array}\right\} \text{in } B.$$

Quorum omnium Aggregatum (seu ipsum CSHI planum) est (per prop. 1. hujus; vel prop. 64. *Arithmet. Infinitorum*)

$$C + \tfrac{1}{2}C^2 + \tfrac{1}{3}C^3 + \tfrac{1}{4}C^4 + \tfrac{1}{5}C^5 \text{ \&c. in } B. = \text{Plano}.$$

Si verò non ponatur $A = 1$, sed cujuscunque magnitudinis: Erit saltem Planum, seu PL, $= C + \frac{C^2}{2A} + \frac{C^3}{3A^2} + \frac{C^4}{4A^3} + \frac{C^5}{5A^4}$ &c. in B.

Vel, posito $\frac{C}{A} = E$; erit PL, $= 1 + \frac{1}{2}E + \frac{1}{3}E^2 + \frac{1}{4}E^3 + \frac{1}{5}E^4$ &c. in CB.

Res autem ad calculum sic commodissimè referetur.

Cùm C (per constructionem) semper minor sit quàm A (propter CI rectam, rectis $A\sigma$ & HS interjectam; adeoque hujus à CI distantiam minorem quàm ab $A\sigma$:) Posito $A = 1$, erit C in partibus decimalibus quamlibet proximè exprimenda. Hujúsque propterea potestates, C^2, C^3, &c. (quod semper obtinet ubi Radix seu Latus minus est quàm 1,) continuè decrescunt, adeoque in remotiora loca decimalia continuè detruduntur. Quamquam igitur, in plano designando, intelligantur ipsius C potestates, C^2, C^3, C^4, &c in infinitum continuandæ: Postquam tamen aliquousque processum est (& quidem plus minúsve prout major minórve ἀκρίβεια spectetur,) reliquæ, utpote in loca decimalia altiùs detrusæ quàm ut magni sint momenti, meritò possunt negligi.

Exempli

Fig. 210, 211.

Exempli gratia; Positâ A S $= A = 1$. Sit SC $= C = 0,21$. SH $= B = 0,01$.

Erunt $C = 0,21$
$\frac{1}{2} C^2 = 0,02205$
$\frac{1}{3} C^3 = 0,003087$
$\frac{1}{4} C^4 = 0,000486203 -$
$\frac{1}{5} C^5 = 0,000081682 +$
$\frac{1}{6} C^6 = 0,000014294 +$
$\frac{1}{7} C^7 = 0,000002573 +$
$\frac{1}{8} C^8 = 0,000000473 -$
$\frac{1}{9} C^9 = 0,000000088 +$
$\frac{1}{10} C^{10} = 0,000000017 -$
$\frac{1}{11} C^{11} = 0,000000003 +$

Horum Summa, 0,235722333
Ducta in $B = 0,01$

Exhibet planum CSHI, seu $P L = 0,00235722333$ proximè.

Atque ad eandem formam procedendum erit, positâ $A = 1$, quæcunque fuerit C (quæ tamen semper minor est quàm A,) & B (quæ vel major esse potest, vel minor, quàm vel A vel C;) prout expositus casus postulaverit.

Atque huic non multùm absimilem Hyperbolæ quadraturam exhibuit nuper in *Logarithmotechniâ* suâ D. *Nicolaus Mercator*. De quâ verba fecimus in binis literis ad D. Vice-comitem *Brouncker*, (Societatis Regiæ *Londini* Præsidem dignissimum, & harum rerum scientissimum,) datis, *Julii* 8. & *Augusti* 5. 1668. atque in *Transactionibus Philosophicis Londinensibus*, sub idem tempus, insertis.

H.

Habitâ verò, ut dictum est, Figuræ Hyperbolicæ Exterioris magnitudine: Etiam Interioris magnitudo facile obtinetur.

Intelligatur utique ab V vertice, recta VO, ipsi Aσ parallela; portionem abscindens SHVO. Cujus plani magnitudo, (sic ut jam traditum est inventa,) dicatur $P L$. Estque AVO $= \frac{1}{2}$ AOVσ $= \frac{1}{2} A B$. Item AXS $= \frac{1}{2} A^2$ (nempe si sit Triangulum rectangulum; adeoque XS Set A ipsi A, figuræ altitudini, æqualis;) vel saltem (posito SX $= F$,) AXS $= \frac{1}{2} A F$: Ergo HVX $=$ AXS $-$AVO$-$OVHS $= \frac{1}{2} A^2 - \frac{1}{2} A B - P L$, seu $\frac{1}{2} A F - \frac{1}{2} A B - P L$. Sed & hinc etiam, si opus sit, abscindi poterit (per HD ordinatim-applicatam) HDX triangulum; ut habeatur portio HDV.

Si

Fig. 210, 211. Si verò, non quidem ad Axem, ſed ad aliam quamvis Diametrum, ponatur hyperbola: Menſuram ejus non minus aſſequemur.

Nempe; Sumpto, ubivis in Hyperbolâ, vertice I; cui reſpondeat Diameter A I d x. Quippe hic ſimiliter habebitur Magnitudo Triangulorum A C I, A S x, H d x, & ſpatii S C I H: Adeoque & I H x, I H d.

I. Sed &, Propter cognita triangulorum A S X, A O V, A D X, vel A S x, A C I, A d x, tum Magnitudines, tum Centra gravitatis, horúmve momenta reſpectu rectæ A σ; (per prop. . hujus:) Atque etiam (per jam tradita, § G.) Spatii S O V H vel S C I H magnitudinem, Centrique gravitatis ab A σ diſtantiam, ejúſque (reſpectu ejuſdem A σ) momentum: Habebitur etiam portionum H V X, H D V, vel H I x, H d I, momentum Cúmque (ut jam oſtenſum eſt) habeatur & harum magnitudo; habetur (momentum per magnitudinem dividendo) earundem diſtantia Centri gravitatis ab A σ.

K. Porro: Si conſideretur eadem V H D ſemi hyperbola, tanquam ex rectis ipſi H D parallelis, ad axem V D ordinatim-applicatis, conflata. Manifeſtum eſt, ſingularum H D ordinatim applicatarum momenta, ſeu Triangula ipſis inſiſtentia Semiquadrantalem *Ungulam* complentia, aciem habentem V D; earundem Semi-quadratis eſſe æqualia. Adeóque ſemiſumma quadratorum illorum, erit totius V H D ſemi-hyperbolæ reſpectu ipſius V D momentum. (ſeu ſemiquadrantalis Ungula aciem habens V D.)

Poſito itaque pro Axe Tranſverſo, T; pro Latere Recto, L; ſumptis Diametris interceptis, d, arithmetice proportionalibus, ut 1, 2, 3, &c. uſque ad maximum $D = $ V D: Erunt quæ his reſpondent ordinatim-applicatarum (ſemi-hyperbolam complentium) Quadrata (ut in tractatu meo *De Conicis Sectionibus*, prop. 33 oſtenſum eſt:) totidem $dL + \frac{d^2L}{T}$ ſeu $\frac{dT + d^2}{T}L$, ſumptis d arithmetice-proportionalibus, uſque ad maximum $\frac{DT + D^2}{T}L = $ Quadr. H D. Adeóque (propter *Omn.* d, $= \frac{1}{2}D^2$; & *Omn.* d^2, $= \frac{1}{3}D^3$; per prop. 1. hujus;) Omnium quadratorum ſumma $\frac{\frac{1}{2}D^2T + \frac{1}{3}D^3}{T}L$, ſeu $\frac{3T + 2D}{6T}D^2L$: & ſemi-ſumma, ſeu plani momentum, $\frac{3T + 2D}{12T}D^2L$;

Atque

Atque hoc Momentum, per plani magnitudinem (modò exhibitum) divisum; exhibet ejusdem ab V D distantiam Centri gravitatis. Fig. 210, 211.

Sed ejusdem Centri distantia ab A σ, jam exhibita est: Ergo (propter A σ, A V D, non invicem parallelas,) exhibetur ipsum Plani V H D Centrum gravitatis; per prop. 26. Cap. præced.

Et, consequenter; (propter data etiam triangulorum A S X, AOV, HDX, Magnitudines & Centra gravitatis, per prop. 5. vel 6. hujus; ipsiúsque S O V H magnitudinem, jam ostensam;) datur etiam plani SOVH Centrum gravitatis; per prop. 27. Cap. præced.

Vel etiam, in Fig. 214. ubi Hyperbolæ A O, vertex A, Centrum C, Diameter conjugata C δ, Semissis diametri transversæ C A $= S = \frac{1}{2}T$; Ordinatim-applicatæ ad hyperbolæ diametrum D O $= b$; Ordinatim-applicatæ ad diametrum conjugatam δ O $= c$. Ostensum est (in Tractatu meo *De Conicis sectionibus, prop.* 35, 41.) Rectus δ O $= c$, esse totidem $\sqrt{:S^2 + \frac{T}{L}b^2}$: (Sumptis C$\delta$ = DO $= b$, arithmeticè proportionalibus.) Earum itaque quadrata, sunt totidem $S^2 + \frac{T}{L}b^2$; quorum summa (per prop. 1. hujus) $AS^2 + \frac{AT}{3L}b^2$, (posito A pro altitudine figuræ;) Cujus itaque semissis, $\frac{ATb^2}{6L}$, est plani C δ O A (curvæ & diametro conjugatæ interjecti) momentum respectu C A. Fig. 214.

Sed & magnitudo cognoscitur, ex jam traditis; propter cognitam Spatii M C A O fig. 214. hoc est S A V H fig. 210, 211. magnitudinem; & magnitudinem trianguli M C δ fig. 214; adeoque & totius C δ O A.

Hujus itaque momentum per magnitudinem dividendo, habetur Centri gravitatis ejusdem distantia à C δ.

Verùm & Totius Parallelogrammi C D O δ, tum magnitudo tum & Centri gravitatis à C δ distantia habentur. Habetur itaque & partis reliquæ A O D, tum magnitudo tum Centri gravitatis ab eadem C δ distantia; per prop. 27. cap. præced.

Sed & ejusdem distantia sive à C M, sive ab A D, fig. 214. (hoc est ab A S, vel V D fig. 210, 211.) jam ante data est. Ergo & ipsum gravitatis Centrum datur, per prop. 26. cap. præced.

Quæque

Fig. 212, 213. Quæque de Semi-hyperbolâ Rectâ VHD jam ostensa sunt; eadem Scalenæ IHd, facile accommodantur. Est utique Semi-hyperbolæ IHd fig. 213. Centrum gravitatis in eâ rectâ (puta GR) diametro Id parallelâ, quæ ita dividit basin Hd, acsi anguli ad basin recti essent: Puta, ut recta GR fig. 212. (parallela rectæ VD) dividit basin HD.

L. Hinc etiam colligitur Conoidis (vel Pyramidoidis) Hyperbolici tum Magnitudo tum Centrum gravitatis. Cum enim similia plana solidum complentia, basi parallela, sint in duplicatâ ratione ordinatim-applicatarum, seu ut harum quadrata; hoc est, ut totidem $\frac{dT + d^2}{T} L$, sumptis d arithmetice-proportionalibus; Solidúmque Cylindricum seu Prismaticum super eâdem base, æque altum, compleant plana totidem maximo æqualia, $\frac{DT + D^2}{T} L$: Erit Conoides illud seu Pyramidoides, ad Solidum hoc Cylindricum seu Prismaticum, (propter T, L eadem perpetuo utrobique,) ut omnia $dT + d^2$, (sumptis d arithmetice-proportionalibus,) ad totidem $DT + D^2$ (sumptis D maximo æqualibus;) hoc est (ut modò ostensum est, ex prop. 1. hujus,) ut $\frac{1}{2}D^2T + \frac{1}{3}D^3$ ad $D^2 . + D^3$; seu ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. Quod ipsum jam olim demonstravimus, ad prop. 163. *Arithmeticæ Infinitorum* Et perinde obtinet sive Conoides hoc vel Pyramidoides, Erectum sit, sive Scalenum.

M. Sunt autem planorum horum Distantiæ à Vertice, ipsis d diametris interceptis proportionales; adeoque eorum Momenta respectu plani tangentis in vertice, ut totidem $d^2 + d^3$, sumptis d arithmetice proportionalibus; qualia totidem $D^2T + D^3$ sunt momentum Solidi istius Cylindrici seu Prismatici in maximâ distantiâ suspensi; adeoque illorum omnium summa, seu Momentum Solidi (per prop. 1. hujus) $\frac{1}{3}D^3T + \frac{1}{4}D^4$. Quod quidem momentum, per magnitudinem $\frac{1}{2}D^2T + \frac{1}{3}D^3$ divisum; exhibet $\frac{4T + 3D}{6T + 4D} D$ Distantiam Centri gravitatis à vertice Conoidis vel Pyramidoidis (sive Erecti, sive Scaleni,) in ipso Solidi Axe constituti.

$$\tfrac{1}{2}D^2T + \tfrac{1}{3}D^3) \tfrac{1}{3}D^3T + \tfrac{1}{4}D^4 (\frac{4T + 3D}{6T + 4D} D.$$

Eadémque est distantia à Plano Verticem tangente, in Erecto,

s eadem
perbolæ
liametro
ſin recti
vidit ba-

perbolici
lia plana
ordina-
totidem

dúmque

, com-

onoides

aticum,
$+ d^2$,
$+ D^2$
eſt, ex
$+ 2 D$
l prop.
des hoc

iametris
u plani
ice pro-
n Solidi
adeoque
. hujus)
tudinem

n Cen-

vertice
Pyrami-
cti, ſive
o Solidi
ente, in
Erecto,

PRO
Erect
InSc
ftant
C
rabo
olim
Πλα
Paral
A
aliaru
rem,
libere
tracta
bere :
Al
etiam
vitati
magn
Ve
funt :
excog
fister
multò
Mi
jungat
conve
ad Ax
dos re
que Sc

Erecto, (cujus Altitudo eadem est cum T, maximâ diametro interceptâ:) In Scaleno verò, $\frac{4T+3D}{6T+4D}A$, posito A pro figuræ altitudine, seu distantiâ maximâ. Fig. 212, 213.

Cum Hyperbolæ verò Quadraturâ, conjunctam esse Curvæ Parabolicæ Εὐθύνσιν, seu Rectæ huic Curvæ æqualis exhibitionem; jam olim demonstravimus in Tractatu Epistolari *de Curvarum* Εὐθύνσει & Πλατυσμῷ, Tractatui *de Cycloide* subjuncto. Ubi etiam, Conoidis Parabolici Superficiei Curvæ, æqualem Planam exhibuimus. N.

Atque hic quidem pateret Campus satis amplius; si ad Curvarum aliarum Linearum Rectificationem, & Superficierum Complanationem, (vel Rectarum illis, Planarum his, æqualium exhibitionem,) liberet procedere: (Qualia non pauca in illo de Εὐθύνσει & Πλατυσμῷ tractatu strictim indicavimus, & multo plura in promptu esset exhibere:) Centrique gravitatis in illis investigationem. O

Aliaque multa, consimilis argumenti, de figurarum aliarum, aut etiam linearum curvarum, Magnitudinibus, Momentis, & Centris gravitatis, Solidisque aut Superficiebus earundem variâ conversione factis, magnâ varietate adjungi possent.

Verum, ex his non pauca, ibidem (saltem breviter) insinuata sunt: Aliaque, juxta methodos hic suprà traditas, cum opus fuerit, excogitari poterunt, & Calculo subjici. Atque tandem aliquando sistendum videtur, ne in immensum excrescat volumen, quod jamjam multò ultra quàm speraveram excrevit.

Missis itaque aliis; Unam adhuc de Hyperbolâ Speculationem subjungam, quam *Wrennio* nostro debemus: Qui Solidum Hyperbolicum, convexo-concavum, Torni ope acie Dolabræ rectilineâ obliquo ad Axem situ positâ, conficere docuit. Quam rem, ad meas methodos reductam, sic visum est exponere, & paulò fusiùs prosequi: Ejúsque Solidi Sectiones, & Centra gravitatis, considerare.

PROP. XXXII.

A.B. Si in quacunque ab Axe Torni diſtantiâ, ponatur Acies Dolàbræ recta, in ſitu ad illum Axem (non parallelo, ut in Tornando Cylindrum, ſed) quocunque obliquo: Formabitur torno Cylindroides Hyperbolicum Convexo-concavum.

C. Et quidem ea Hyperbola; cujus Semi-axis tranſverſus æquatur minimæ diſtantiæ aciei dolabræ ab Axe Cylindroidis (ſeu Semi-diametro baſis inſcripti Cylindri;) Axíſque conjugatus cum Aſymptotâ eum faciat angulum, quem facit Dolabræ Acies recta, cum rectâ axi torni parallelâ.

D. Unde patet methodus, Cylindroides torno formandi, cujus ſectio per axem, ſit data Hyperbola.

E. Solidi hujus ſectiones Plano factæ; ſi planum illud ſit, ad Axem Solidi, Rectum; ſunt Circuli.

F.L. Si, ad Axem, minus obliquum quam eſt Aſymptota; Ellipſes.

F, H, I. Si ſimiliter inclinatum ſit atque ipſa Aſymptota; ſunt Parabolæ; vel (ſi etiam per Centrum ſit) Parallelogrammum.

F, G, K. Si adhuc Obliquiùs ſecet Axem, vel etiam ſit Axi Parallelum; Oppoſitæ Hyperbolæ; vel (ſi axi parallelum atque per verticem Hyperbolæ Genetricis) oppoſita Triangula.

M. Solidi ſit conſtructi (à Centro utrinque æqualiter continuati) Magnitudo, nota eſt: Quippe ad Cylindrum circumſcriptum, ut $3\,LT + 4\,H^2$, ad $3\,LT + 12\,H^2$. Et Centrum gravitatis in Centro ſolidi, ſeu Axis medio.

Semiſolidi

Semisolidi (plano per Centrum, ad Axem recto, abscissi,) Centrum gravitatis, in Axe situm, abscindit axis sui partem ad Centrum, quæ sit ad totum, ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$. N.

HOc quò commodiùs absolvatur; Lemma præmittam, in meo de Ἐυθύνσει Tractatu; modò memorato, insinuatum; Demonstratione ex meo de *Conicis sectionibus* tractatu, prop. 35, 40. petitâ. Ad hunc sensum; A. Fig. 214.

Si ad Rectæ alicujus puncta quotlibet, æqualibus intervallis sumpta, ordinatim-applicentur Rectæ, quarum Quadrata sint, ut numerorum continuè consequentium 1, 2, 3, 4, *&c. quadrata, eodem aliquo vel æqualibus quadratis aucta: Quæ per harum extrema reliqua transit Curva, est Hyperbola.*

Quippe, (in fig. 27. ibidem, quam hic repeto fig. 214.) Manifestum est rectas δ A, tales esse quales innuit Lemma; (propter C δ, C δ, C δ, &c. ut 1, 2, 3, &c. & C A communem:) Quæ si in situm δ O transferantur, ad C δ δ ordinatim-applicatæ; Hyperbolam A O O designabunt.

Quodsi, manentibus C A, δ O, ordinatim-applicatis, intervalla C δ, δ δ, minora fuerint vel majora quàm nunc sunt; vel etiam angulus A C δ, qui jam rectus intelligitur, fiat obliquus quilibet; prodibit utcunque A O O Hyperbola; sed cujus aliud erit Latus-rectum, aliúsque ad Asymptoton C M angulus δ C M, aliúsque angulus quem cum diametro faciant conjugata diameter & ordinatim-applicatæ.

Demonstratio petitur, ex meis *de Conicis Sectionibus* prop. 35, 41. ubi ostenditur, rectas ad Hyperbolæ diametrum conjugatam ordinatim-applicatas δ O; hoc est, C D distantias, punctorum applicationis ad diametrum, à Centro, quas illic *c* dicimus; (ex Semidiametro transversâ, & diametro interceptâ aggregatas, seu $\frac{1}{2}T + d$;) esse $\sqrt{:\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2}$: Quarum itaque quadrata sunt, $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2$: (Positis T pro diametro transversâ, L pro latere recto, & h pro ordinatim-applicatâ ad hyperbolæ diametrum.) Adeoque, (propter T, L, quantitates permanentes,) si sumantur h, hoc est DO, seu C δ, arithmetice-proportionales ut 1, 2, 3, &c. mani-

festum est, quadrata illa, $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2$, esse, ut *Quadrata aequalia, quadratis arithmeticè-proportionalium aucta.* Quæ itaque cum sit Hyperbolæ generalis proprietas (quæcunque fuerit ratio Diametri-transversæ ad Latus-rectum, & quemcunque ad diametrum angulum faciant ordinatim-applicatæ;) Lemma constat.

B. Fig. 215. His præmissis; Intelligatur (fig. 215.) Acies Dolabræ recta, A O O, in quacunque ab Axe Cylindroidis (torno conficiendi) distantia, situ quocunque obliquo (ad axem illum) posita. Manifestum est, per rectam illam A O O, transituram esse planum aliquod, ut O A α, cui parallelus sit Cylindroidis axis C δ: Rectamque aliquam in eo plano, axi parallelam, ut A α α, (nempe, ex parallelis eam quæ sit axi proxima,) lineam contactûs esse quâ planum illud tangat Cylindrum, (Cylindroidi inscriptum,) cujus Axis C δ; & basis radius C A; (quæ est minima distantia aciei dolabræ, quantum opus sit continuatæ, ab Axe Cylindri seu Cylindroidis formandi.) Sumptisque in Axe C δ δ, partibus continuè æqualibus C δ, δ δ, &c. atque ad eum perpendicularibus C A, δ α, &c. erectisque itidem ad planum C A α perpendicularibus α O, α O, &c. Manifestum est, rectas α O, esse ut 1, 2, 3, &c. numeros continuè consequentes; earumque quadrata ut quadrata horum: Et propterea (propter angulum δ α O rectum, rectasque α δ invicem æquales,) junctis omnibus O δ, quadrata harum esse, ut quadrata numerorum illa æqualibus quadratis aucta.

C. Adeoque; Si Torni ope, circa axem C δ (fig. 215.) describi intelligantur in Cylindroide Circuli, quorum radii sint ipsæ δ O rectæ: Sectio per axem exhibebit ipsum δ C A O (fig. 214.) planum. Erunt utique Circulorum illorum radii, planum complentes, ipsis δ O, utriusvis figuræ, æquales. Nempe si, in binis figuris, sumptis tum A C æqualibus, tum æqualibus C δ respectivis; sumantur α O fig. 215. ipsis C δ fig. 214. respectivis æquales: Quod fit, sumpto O A α fig. 215. angulo semi-recto; (qualis est, in fig. 214. δ C M, quem cum axe conjugato C δ facit Asymptota C M:) Si vero alius sit angulus O A α quam semirectus; illi congruet Hyperbolæ quæ similem habeat angulum, δ C M; ut nempe C δ fig. 214, 215. sint respectivis α O fig. 215. æquales.

D. Constat itaque, non modò Cylindroides hujusmodi torno formari posse cujus sectio per axem sit hyperbola; sed &, quæ sit data Hyperbola. Quippe exponatur Hyperbola A O O (fig. 214.) quælibet, cujus Centrum C, semi-axis transversus C A, axis conjugatus C δ, &

& C M asymptota; cui similem imperatum sit tornô exhibere: Hoc tantum curandum erit; nempe ut C A fig. 215. sit æqualis ipsi C A fig. 214. sitque angulus α A O fig. 215. ipsi δ C M, fig. 214. (quem cum Asymptotâ facit axis conjugatus) æqualis.

Solidum vero sic constructum cum varias admittat sectiones plano factas; eas ut ordine exquiramus, considerabimus hoc idem solidum ut aliâ constructione formatum; conversione scilicet Hyperbolæ OAO fig. 216. circa conjugatum axem δ C δ. Quippe hoc, idem esse solidum atque illud quod Torno constructum iri modo docuimus, ex dictis satis patet. E. Fig. 216.

Cùmque Solidi hujus sectio quælibet plano facta, sit alicui per Axem sectioni recta, seu perpendicularis: Esto ea per Axem sectio OooO; in quâ oppositæ Hyperbolæ (Genetrices) A O, a o; quarum Centrum, C; Axis conjugatus (qui & Solidi Axis est) δ C δ, Asymptotarum altera, C M; Axis Transversus, $A a = 2 C A = T = 2S$; Axis interceptus, $A D = d$; a Centro distantia, $C D = c = \frac{1}{2}T + d = S + d$; Ordinatim-applicata ad hyperbolæ axem, $DO = h$; cujus quadratum, $h^2 = L d + \frac{L}{T} d^2 = \frac{T d + d^2}{T} L = \frac{c^2 - S^2}{T} L$; (quæ sunt itaque, ut series Primanorum aucta serie Secundanorum; aut etiam, ut Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Adeoque $c^2 = S^2 + \frac{T}{L} h^2$: Quod itaque est quadratum rectæ C D (distantiæ a Centro) vel (huic æqualis) O δ, ordinatim-applicatæ ad Axem conjugatum. (Quæ omnia olim demonstravimus, *Con. Sect.* prop. 35, 41.) Et, propterea, sumptis C δ, hoc est $DO = h$, arithmeticè proportionalibus; erunt omnium rectarum δ O, ordinatim-applicatarum ad Axem conjugatum, (spatium O δ C A complentium,) quadrata, totidem $S^2 + \frac{T}{L} h^2$, sumptis h arithmeticè-proportionalibus: Hoc est, Series Æqualium aucta serie Secundanorum.

Sed &, sumpto M in Asymptotâ C M, erit (per *prop.* 39. *ibidem*,) ut L ad T, sic quadratum C δ seu D O, hoc est h^2, ad quadratum δ M. Adeóque quadrata omnium δ M (spatium M C δ complentium) sunt totidem $\frac{T}{L} h^2$; sumptis $C\delta = h$, arithmetice proportionalibus.

Ma-

Fig. 216. Manifestum autem est, (ex constructione solidi,) quæ rectis A a, O o, insistunt erecta plana (solidum complentia) totidem esse circulos; quorum diametri sunt ipsæ A a, O o, rectæ. Quippe Radii C A, δ O, circa Axem δ C δ conversi, totidem describunt Circulos.

F. Intelligatur autem, sumpto, ubivis in δ O rectâ, puncto m, recta per Centrum C m, cui erectum insistat Planum sectionem faciens, quam itaque compleant rectæ *m* (ipsis m punctis insistentes:) Quarum quadrata (utpote, in suis respectivè circulis, inter diametri segmenta O m, m o, mediarum proportionalium, seu ordinatim-applicatarum ad Circuli diametrum,) sunt totidem quadrata δ O, demptis respectivis quadratis δ m; seu $m^2 = \delta O q - \delta m q$.

Sitque 1°, punctum m in δ; adeoque δ m = o, & δ O q − δ m q = δ O q: Et propterea, quæ rectæ C δ insistit sectio, eadem erit atque δ O A C hyperbola.

Sit 2°, puncto m in M, (nempe C m eâdem existente atque C M asymptota;) adeoque δ m = δ M, & $\delta m q = \delta M q = \frac{T}{L} b^2$: Et propterea $\delta O q - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \frac{T}{L} b^2 = S^2 = m^2$: ipsæque *m*, totidem *S*, invicem æquales. Adeoque, quæ Asymptotæ insistit sectio, est Parallelogrammum Rectangulum.

Sit 3°, punctum m inter δ & M; adeoque δ m minor quam δ M, sed eidem ubique proportionalis; putà in ratione *n* ad *b*. Adeoque $\delta m q = \frac{T}{L} n^2$: Et $\delta O q - \delta m q = S^2 + \frac{T}{L} b^2 - \frac{T}{L} n^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2}{L} T = m^2$. Quæ itaque (propter *n* minorem quam *b*) sunt quadrata ordinatim-applicatarum ad hyperbolæ axem conjugatum, (utpote series Æqualium aucta serie Secundanorum;) Quæ quidem Hyperbola Semi-axem transversum habet $S = CA$, seu transversum Axem $T = A a$; & latus rectum $\frac{b^2}{b^2 - n^2} L$: Estque conjugatus axis ipsa C m, recta; Centrum, C.

Sit 4°, punctum m inter O & M, (inter Curvam & propiorem Asymptotam; adeoque C m, continuata, curvam secabit; & quidem utrinque continuata, sectiones oppositas:) Adeoque (propter δ m majorem quam δ M, seu *n* majorem quam *b*,) erunt δ O q − δ m q =

$= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \frac{T}{L}\varkappa^2 = m^2$, hoc est $S^2 - \frac{\varkappa^2 - b^2}{L}T$; quadrata ordinatim-applicatarum ad Ellipseos conjugatum axem, (per *Con. Sect. prop.* 28. utpote series Æqualium mulctata Serie Secundanorum;) cujus axis transversus, T, seu $2S$, = A a; & Latus rectum, $\frac{b^2}{\varkappa^2 - b^2}L$: Et conjugatus axis, ipsa C m recta; quæ curvam A O secabit in eo puncto cui respondet $\frac{\varkappa^2 - b^2}{L}T = S^2$. Fig. 216.

Omnis igitur hujus solidi sectio, plano per Centrum facta, erit vel Circulus, nempe si super rectam C A; vel Ellipsis, si inter CA & CM (seu inter curvam & asymptotam proximam;) vel Parallelogrammum, si in ipsâ Asymptotâ; vel Hyperbola (seu potius Oppositæ Hyperbolæ, infra supraque,) si per C m inter C M & C δ; vel ipsa quidem Genitrix hyperbola, si per Axem C δ.

Intelligatur deinde, Sectio rectæ $\varkappa\mu$, axi parallelæ, insistens. G. Eruntque, & hic, omnia quadrata rectarum punctis μ insistentium (planum complentium,) puta μ^2, $= \delta$O q $- \delta\mu$ q $= \delta$O q—C$\varkappa$q (propter $\delta\mu$ = C $\varkappa$.) Fig. 217.

Ideoque, si $\varkappa$ sit in C; erit (ut prius) sectio per $\varkappa\mu$, eadem quæ per Cδ, hoc est δ O A Genitrix hyperbola (propter $\delta\mu = o$.)

Si $\varkappa$ sit in A vel a; adeoque C $\varkappa$ = C A = S: Erunt δOq—C$\varkappa$q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - S^2 = \frac{T}{L}b^2 = \mu^2$. Quæ itaque sunt quadrata ordinatim-applicatarum in triangulo, (utpote Series Secundanorum;) seu potiùs binis triangulis communem verticem A habentibus, quæ fiunt rectis decussantibus eundem angulum facientibus quem faciunt Asymptotæ se mutuò in plano decussantes.

Si $\varkappa$ sit inter C & A, vel C & a; adeoque C $\varkappa = \sigma$ minor quàm S; Erunt δ O q — C $\varkappa$ q $= S^2 + \frac{T}{L}b^2 - \sigma^2 = \mu^2$, quadrata ordinatim-applicatarum ad conjugatum axem hyperbolæ; (quippe series Æqualium aucta serie Secundanorum:) cujus Semi-axis transversus est $\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$: (Nempe, quæ puncto $\varkappa$ insistit ordinatim-applicata in Semicirculo A a;) Latus rectum, $\frac{2L}{T}\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$, seu $\frac{L}{S}\sqrt{: S^2 - \sigma^2}$: atque axis conjugatus, ipsa $\varkappa\mu$ recta.

Fig. 217. Si κ sit extra Solidum puta ultra A vel a, (adeoque plani secantis pars media etiam extra solidum,) Planum secans in iis punctis occurret ubi est δO (vel δo) $= C\kappa = \delta\mu$; (quæ itaque puncta sunt vertices oppositi:) Atque ultra hæc puncta, existente μ intra solidum, erunt $\mu^2 = \delta O q - \delta\mu q = \delta O q - C\kappa q = S^2 + \frac{T}{L}h^2 - \sigma^2$; hoc est (propter σ majorem quam S,) $\frac{T}{L}h^2 - \sigma^2 + S^2 = \mu^2$; quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola (seu Oppositis hyperbolis) ad suum axem: (utpote Series Secundanorum mulctata serie Æqualium:) Cujus Axis transversus est $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{T} L}$, & Latus rectum, $2\sqrt{\frac{\sigma^2 - S^2}{L} T}$. Centrum verò, ipsum κ; atque Axis, $\kappa\mu$.

Omnis igitur hujus Solidi Sectio, plano quod Axi sit parallelum facta, est, vel Opposita Triangula ad eundem verticem, nempe si per verticem hyperbolæ Genitricis; vel Hyperbolæ Oppositæ, si alibi.

II. Fig. 218. Intelligatur denique, ubivis in Hyperbolæ Genitricis axe Aa, quantumvis producto, sumi punctum κ; unde ducatur (cui insistat sectio) in plano per Axem solidi, recta $\kappa\pi$, solidi Axi $C\delta$ non parallela, sed eidem alicubi occurrens.

Et quidem si sumatur κ in C; fiet sectio per Centrum, de quâ jam supra dictum est: In quâ quadrata ordinatim-applicatarum sunt $m^2 = S^2 + \frac{T}{L}h^2 - \frac{T}{L}n^2$: Adeoque sectio ipsa, vel Hyperbola, vel Parallelogrammum, vel Ellipsis; prout n minor est, vel æqualis, vel major quam h.

Jam vero, cuivis prædictarum C m, parallela intelligatur $\kappa\pi$. Sitque $C\kappa$ $(= m\pi) = \sqrt{\frac{T}{L}F^2} = F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (uti prius erat $\delta m = \sqrt{\frac{T}{L}n^2} = n\sqrt{\frac{T}{L}}$) Adeoque $\delta\pi = \delta m + m\pi$, vel $\delta m - m\pi$, vel $m\pi - \delta m$, (pro vario situ punctorum m, π;) hoc est, æqualis summæ vel differentiæ rectarum δm, $m\pi$; hoc est, ipsarum $n\sqrt{\frac{T}{L}}$, $F\sqrt{\frac{T}{L}}$; (nempe, Summæ, si punctum m sit intermedium inter δ & π: Differentiæ, si secus.) Adeoque ipsarum $\delta\pi$ quadrata, $\delta\pi q = \frac{n^2 \pm 2nF + F^2}{L}T$.

Cum

Cum itaque Quadrata rectarum punctis π insistentium (sectionis planum ipsi $\varkappa\pi$ insistentis complentium,) puta π^2 sint (per prius ostensa) $\delta Oq - \delta\pi q$; erunt ipsa, $\pi^2 = S^2 + \frac{b^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T$: (Nempe, $2nF$ cum signo $-$, si m sit intermedium; cum signo $+$, si secus.) Ubi S^2 & F^2 sunt series Æqualium; $2nF$, series Primanorum; $b^2 - n^2$, series Secundanorum. Fig. 218.

Et quidem 1°, sit $\varkappa\pi$ parallela ipsi CM asymptotæ: Adeoque (propter $\delta m = \delta M$,) $b^2 = n^2$, se mutuò perimentes. I.

Quo casu; si sit etiam $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, (existente scilicet $\varkappa$ in A vel a; adeoque C A $=$ C $\varkappa$:) his item se perimentibus mutuò, solum superest $\frac{2nFT}{L}$, & quidem cum signo $+$: (Nam, posito $\varkappa$ in A vel a, non potest punctum m intermedium esse inter δ & π, quin π erit extra Solidum:) seu (propter $n = b$,) $\frac{2bFT}{L}$; seu (propter $S^2 = \frac{F^2}{L} T$, adeoque $F^2 = \frac{L}{T} S^2$, & $F = S\sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2} T \sqrt{\frac{L}{T}} = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $bT\sqrt{\frac{T}{L}}$, series Primanorum; (ut quadrata ordinatim-applicatarum in parabola.) Adeoque quæ rectæ $\varkappa\pi$, per verticem A vel a transeunti, utrivis Asymptotarum parallelæ, insistit Sectio, est Parabola. Cujus vertex, $\varkappa$; Axis interceptus, $\varkappa\pi$ $=$ C m $= \sqrt{: C\delta q + \delta M q :} = \sqrt{: b^2 + \frac{T}{L} b^2 :} = b\sqrt{\frac{L+T}{L}}$. Latus-rectum, $\frac{2FT}{\sqrt{: L^2 + LT}}$; vel (propter $F = \frac{1}{2}\sqrt{LT}$,) $T\sqrt{\frac{T}{L+T}}$.

Sin (manente $\varkappa\pi$ parallelà CM asymptotæ) punctum $\varkappa$ sit extra solidum (ultra A vel a,) adeoque $\frac{F^2}{L} T$ majus quam S^2: Erit etiamnum $2nF$ seu $2bF$ cum signo $+$, (quippe posito $\varkappa$ extra Solidum, non poterit m intermedium esse, quin π etiam erit extra solidum:) Et $\pi^2 = S^2 + \frac{2bF - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{2bF}{L} T - \frac{F^2T - S^2L}{L}$, series Primanorum mulctata serie Æqualium: Adeoque,

Fig.218. & hîc, sectio erit Parabolâ; sed cujus vertex sit non in $\varkappa$, sed (ubi $\varkappa\pi$, intrando, curvam secat) in V; & $\varkappa$, in axe continuato extra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT}}$: Verticis distantia $\varkappa V = \frac{2F^2 - SL}{4F} \sqrt{\frac{L+T}{L}}$.

Si autem (manente $\varkappa\pi$ parallelâ CM asymptotæ) punctum $\varkappa$ sit intra solidum, (sive inter A & C, sive inter C & a,) erit $C\varkappa$ minor quàm CA; adeoque $\frac{F^2T}{L}$ minus quàm S^2: Potestque m vel m intermedium esse inter δ & π (nempe si $\varkappa\pi$ sumatur citra CM,) vel (si ultra) non esse: adeoque $2nF$ seu $2hF$, vel signo —, vel signo + affici. Adeoque $\pi^2 = S^2 - \frac{F^2}{L}T \mp \frac{2hF}{L}T$; series Æqualium, illic mulctata, hic aucta, serie Primanorum: utrobique, sectio erit Parabola, & $\varkappa$ in axe intra Parabolam: Latus rectum (ut prius) $\frac{2FT}{\sqrt{:L^2+LT:}}$; & verticis distantia $\varkappa V = \frac{SL - 2F^2}{4F}\sqrt{\frac{L+T}{L}}$; illic sursum, hic deorsum.

Omnis itaque Solidi hujus sectio, plano Asymptotæ parallelo facta, est Parabola, verticem habens in rectæ $\varkappa\pi$ illo puncto quo Curvam genitricem secat.

K. Fig.219. 2°. Si Cm cui parallela est $\varkappa\pi$, non sit ipsa CM asymptota, sed quæ obliquiùs secet solidi Axem $C\delta$; sumpto scilicet puncto m inter δ & M: erit n minus quam h.

Quo casu, si sit $S^2 = \frac{F^2T}{L}$, adeoque $C\varkappa = CA$, sumpto scilicet $\varkappa$ in A vel a: His ita se perimentibus mutuò, erunt $\pi^2 = \frac{h^2 - n^2 \mp 2nF}{L}T$, quadrata ordinatim applicatarum in oppositis hyperbolis, (utpote series Secundanorum, mulctata vel aucta serie Primanorum;) quarum quidem axis transversus $\varkappa V$ est extra solidum, vertices habens in eadem Curva genitrice: Signa verò — + respicient, hoc unum; illud, reliquum verticem.

Idem accidet, si sit S^2 minus quàm $\frac{F^2T}{L}$, adeoque $\varkappa$ extra solidum: nisi quòd jam $\varkappa$ non erit in verticum altero, sed in axe transverso alicubi

intra

intra vertices. Quippe tum $\pi^2 = S^2 + \frac{h^2 - \nu^2 \mp 2\nu F - F^2}{L} T$, hoc Fig. 219.

est, $\frac{h^2 - \nu^2}{L} T - \frac{F^2 T - S^2 L}{L} \mp \frac{2 \nu F T}{L}$, erit series Secundanorum mulctata serie Æqualium, mulctata vel aucta serie Primanorum. Qui etiam est Locus ad Hyperbolam: Cujus Axis est ipsa $\kappa \pi$, verticésque illius ea puncta quæ sunt in curva genitrice.

Si S^2 majus sit quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque κ intra solidum: erunt $\kappa^2 = S^2 + \frac{h^2 - \nu^2 \mp 2\nu F - F^2}{L} T$, hoc est $\frac{S^2 L - F^2 T}{L} + \frac{h^2 - \nu^2}{L} T \mp \frac{2\nu F}{L} T$; series Secundanorum aucta serie Æqualium, & mulctata vel aucta serie Primanorum; adeoque Sectio, oppositæ Hyperbolæ: Ipsaque $\kappa \pi$ earundem Axis si curvam genitricem secet, vertices habens in ipsis intersectionibus; vel, si curvam illam non secet, Axis conjugatus.

Omnis igitur hujus Solidi sectio, plano facta quod obliquius secat axem solidi, quam eam secat Asymptota, sunt Oppositæ Hyperbolæ.

3°. Si C m cui parallela est $\kappa \pi$, minus obliquè secet axem solidi quam Asymptota C M; adeoque sit m punctum intra M & O: erit ν majus quam h: rectáque $\kappa \pi$ oppositas curvas genitrices secabit. L. Fig. 220.

Quo casu, si $S^2 = \frac{F^2 T}{L}$, posito scilicet κ in A vel a; (cum non possit m cadere inter δ & π,) erit $\pi^2 = \frac{h^2 - \nu^2 + 2\nu F}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2\nu F T}{L} - \frac{\nu^2 - h^2}{L} T$; eritque sectio, Ellipsis; cujus Axis $\kappa \pi$ V, & verticum alter in κ, reliquus in opposita hyperbola.

Si verò κ sit extra Solidum; adeoque S^2 minus quàm $\frac{F^2 T}{L}$; (nec possit m cadere inter δ & π:) Erunt $\pi^2 = S^2 + \frac{h^2 - \nu^2 + 2\nu F - F^2}{L} T$; hoc est, $+ \frac{2\nu F T}{L} - \frac{\nu^2 - h^2}{L} - \frac{F^2 T - S^2 L}{L}$; Sectio item Ellipsis erit, cujus axis & ipsa $\kappa \pi$, sed neuter verticum in puncto κ, quod est in axe continuato extra Ellipsin: Verticesque in illis rectæ $\kappa \pi$ punctis quibus oppositas curvas genitrices secat.

Sin S^2 majus quàm $\frac{F^2 T}{L}$, adeoque κ intra solidum; erunt $\pi^2 =$

Fig. 220. $S^2 + \frac{b^2 - n^2 \mp 2nF - F^2}{L} T = \mp \frac{2nFT}{L} - \frac{n^2 - b^2}{L} T + \frac{S^2 L - F^2 T}{L}$:
Sectioque Ellipsis erit; cujus axium alter est ipsa $\kappa\pi$ recta, punctumque κ in neutro verticum, sed in axe illo intra ellipsin, cujus vertices sunt in eis ejusdem punctis quibus oppositas curvas genitrices AO, a o, secat.

Omnis itaque hujus Solidi sectio, plano facta quod ad Axem solidi minus obliquum sit quam est Asymptota; est Ellipsis; vel saltem (si rectum sit ad axem) Circulus.

M. Fig. 214. Solidi hujus Centrum Gravitatis quod spectat; si totum spectemus, æqualiter utrinque continuatum, non est quod ambigemus in ipso C centro positum esse; propter tum $\delta C \Delta$ totius axem (in quo propterea Centrum gravitatis situm esse liquet, ex prop. 5. hujus;) tum Circuli planum A a, quod tum axem tum solidum etiam ita dividat ut singulæ segmenti unius particulæ, singulis alterius respectivè sumptis, æquiponderent; utpote æquales, & æqualiter utrinque remotæ; quare & in hoc etiam plano situm esse constat, per prop. 3. vel 4. hujus: adeoque in ipso C puncto quod est utrique commune.

Si vero alterutrum segmentum consideremus; puta O A a o, à dividente plano A a quantumlibet continuatum, vel hujus etiam segmenta quælibet planis ipsi A a parallelis abscissa, vel interjecta: Hic etiam rem facilè obtinebimus.

Cùm enim, verbi gratiâ, in Plano C A O δ, fig. 214. cujus conversione circa C δ axem, istiusmodi semisolidum formatur; rectarum δ O quadrata (quibus & circuli his radiis descripti sunt proportionales) sint, (per § A.) $S^2 + \frac{T}{L} b^2$, vel $\frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L} b^2$, hoc est, series Æqualium aucta serie Secundanorum: Sintque (per prop. 1. hujus) *omnia* T^2 idem atque T^2 (in altitudinem) H ductum, seu HT^2, & *omnia* $\frac{1}{4} T^2 = \frac{1}{4} H T^2$: atque *omnia* b^2, idem atque $\frac{1}{3} H^3$; & *omnia* $\frac{T}{L} b^2$, $= \frac{T}{3L} H^3$: Erunt *omnia* $\frac{1}{4} T^2 + \frac{T}{L} b^2$, $= \frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$, (posito H pro D O $= b$ maximo:) Solidúmque conversione vel Semiconversione factum, ad hanc quadratorum summam, ut Circulus vel Semicirculus ad quadratum radii. Adeoque ad Cylindrum æque altum cujus basis æquetur Circulo radii D O maximi, ut $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{3L} H^3$ ad $\frac{1}{4} T^2 H + \frac{T}{L} H^3$, seu ut $\frac{1}{4} LT^2 + \frac{1}{3} TH^2$ ad $\frac{1}{4} LT^2 + TH^2$. Hoc est, & $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$.

N. Sed & rectarum, adeoque & quadratorum aut circulorum δ O, à C A distantiæ, sunt ut b arithmeticè proportionales: Adeoque (verbi

(verbi gratia) quadratorum δO momenta respectu CA, sunt totidem $\frac{1}{4}T^2h + \frac{T}{L}h^3$ (sumptis h arithmeticè proportionalibus usque ad H maximum;) Adeoque (per prop. 1. hujus) omnium (sive quadratorum sive circulorum) in suis locis suspensorum Momentum, ad momentum totidem maximo æqualium in distantiâ maximâ suspensorum, ut $\frac{1}{8}T^2H^2 + \frac{T}{4L}H^4$ ad $\frac{1}{4}T^2H^2 + \frac{T}{L}H^4$; hoc est $\frac{1}{2}LT^2 + TH^2$ ad $LT^2 + 4TH^2$, seu $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$.

Cum itaque Magnitudinum ratio sit, ut $3LT + 4H^2$ ad $3LT + 12H^2$; & Momentorum ratio, $LT + 2H^2$ ad $2LT + 8H^2$; sitque Momentorum ratio ex rationibus Magnitudinum & Distantiarum composita: erit Distantiarum ratio, (hoc est, distantiæ Centri gravitatis à CA, ad distantiam totam seu altitudinem figuræ,) ut $3L^2T^2 + 18LTH^2 + 24H^4$ ad $6L^2T^2 + 32LTH^2 + 32H^4$ vel (abbreviando per $LT + 4H^2$,) ut $3LT + 6H^2$ ad $6LT + 8H^2$.

$$\frac{3LT+4H^2}{3LT+12H^2}\Bigg)\frac{LT+2H^2}{2LT+8H^2}\Bigg(\frac{3L^2T^2+18LTH^2+24H^4}{6L^2T^2+32LTH^2+32H^4}=\frac{3LT+6H^2}{6LT+8H^2}.$$

Adeoque (cum in Axe Solidi situm esse certum sit,) erit in Axe sic diviso.

Verbi gratia; si ponantur $L = T = H$: Erit ut $3 + 18 + 24 = 45$, ad $6 + 32 + 32 = 70$; seu, ut $3 + 6 = 9$, ad $6 + 8 = 14$; hoc est, ut 9 ad 14: Sic, Solidi Centri gravitatis (in Cδ siti) à C distantia, ad totam Cδ. Atque similiter judicandum erit (mutatis mutatis) quæcunque ponatur ipsorum L, T, H, ad invicem ratio.

Quæque hic de Magnitudine & Centro gravitatis Solidi Erecti, cujusve rectâ Portione ipsi Aa plano adjacente dicta sunt: ad Scalena facile transferuntur; (posito A loco H pro figuræ altitudine;) Atque ad segmenta duobus utcunque planis plano Aa parallelis interjecta; utpote quæ sunt duorum ipsi Plano Aa adjacentium, vel Summa vel Differentia.

SCHOLIUM.

Atque hic tandem pedem figo; neque hoc *De Calculo Centri-Gravitatis* Caput ulteriùs produco. In quo si quispiam causetur me satis aliquando perplexum fuisse; utut id non negem, perplexo (siquod

(siquod aliud) subjecto imputandum erit. Nec dubito quin, qui intricatissimam rerum traditarum naturam intelligunt, me satis dilucidè pro subjectâ materiâ tradidisse, existimabunt; nec speraverint forsan clarius hoc olim ab aliis traditum iri. Si cui nimius fuisse videar; (utut ego is sim qui de hoc omnium maximè conqueri debeam, qui incredibilem intricatissimi calculi laborem, ne dicam infinitum, sustinui solus:) qui tamen multiplicem rerum traditarum copiam perpendit, atque succinctam tradendi methodum; facilè pro me sponsor erit, me, pro tantâ materiæ varietate, etiam brevem fuisse: Dum ea, unico hoc capite, tradi videat, quæ, si, aliorum quorundam exemplum sequutus, in longum protraxisse vellem, ad spissa satis volumina, neque pauca, materiam affatim suppeditarent. Contra verò, siquis istiusmodi alia non pauca adjungi potuisse queratur, quæ tanquam omissa desiderat: neque ego hoc negaverim, (neque id mihi in animo fuit, sic omnia undecunque corradere, ut nullum superesset sequenti spicilegium:) Addo tamen, etiam ea forsan ipsa, quæ tanquam desiderata causantur illi, si rite animum adverterint, ita universaliter tradi perspiciant, ut nihil ultra desit, quàm ut, universaliter tradita, ad particulares casus applicentur: Saltem eas hic methodos tradi, quæ si ad quæsita particularia accommodentur, etiam alia innumera, quæ hactenus pro difficilibus fuerint habita expedire poterunt.

Supersunt adhuc plura ad hanc, quæ præ manibus est, *De Mechanicis*, sive *De Motu* doctrinam spectantia: Sed preli moras atque difficultates jam expertus; hæc interim præmittenda judicavi, dum *Partem Tertiam*, jam inchoatam, absolvant operæ.

FINIS PARTIS SECUNDÆ.

---

n-
tè
an
r;
n,
m,
er-
ſor
ea,
lum
ne-
iſti-
niſſa
uir,
oci-
lide-
tradi
d par
: ſi ad
hacte-

leeha-
s atque
, dum



Rrata Pr
qua ; fe
lculum au
e) accurate
rato exam
ci menda
tera vel en

Pag. 12
notantu
l. 19. Cubo
l. 16. et DP
ceptarum
P. 170. l. 1
P. 175. ma
P. 186. l. 2
licati. P
semicirculi.



ERRATA.

Errata Preli, in opere tam difficili, mirum est quin occurrant aliqua; sed summa cura adhibita est ut sint paucissima, saltem quæ Calculum aut Sensum turbent. Opus totum (postquam absolutum accurate recensere, totúmque Calculum (quod tamen putaverim) examinare, nondum vacavit. Nonnulla tamen quæ animadmenda quomodo emendanda sint Lectorem monendum duxi; vel emendabit ipse, vel condonabit.

Pag. 123. *l.* 15. Æquilibrii. *P.* 125. *l.* 25. incedat. *P.* 139. *l.* 6. notantur. *P.* 142. *l.* 32. duo Axes. *P.* 144. *l.* 12. quæ ex. *P.* 146. *l.* 19. Cuborum se- *P.* 151. *l.* 23. per 26. *l.* 26. datur ipsum. *P.* 154. *l.* 16. DP. *P.* 159. *marg.* Fig. 127, 128, 129. *P.* 160. *l.* 16. inceptarum. *P.* 162. *l.* 5. usque ad. *P.* 166. *marg.* Fig. 129, 131. *P.* 170. *l.* 16. *dele* si. *l.* 26. illis. *P.* 173. *marg.* Fig. 131, 133, 134. *P.* 175. *marg.* Fig. 127, 128, 129, 131, 133. *P.* 184. *l.* 28. $\pm s +\!\!\!- 2$. *P.* 186. *l.* 25. plusquam infinitum. *P.* 191. *l.* 16. prismatici similiter ...rati. *P.* 207. *l.* 13. quadratorum. *P.* 210. *l.* 30. Semicirculo. *l.* 32. Semicirculi. *P.* 212. *l.* 32. *marg.* S. *P.* 224. *l.* 22. *marg.* S. *P.* 229. ... 253. *P.* 233. *l.* 18. $-\frac{1}{2}eR^2$. *P.* 239. *marg.* Fig. 163. *P.* 249. *marg.* Fig. 164. *P.* 251. *l.* 35. prop. 27. *P.* 252. *l.* 32. $\frac{1}{6}c^2R$. *P.* 254. ... $+\frac{1}{12}s^2v\,P +\!\!\!-$. *Cætera nondum perlegi.*

MECHANICA:
SIVE,
De MOTU,
TRACTATUS GEOMETRICUS.

Authore *JOHANNE WALLIS* SS. Th. D. Geometriæ Professore *Saviliano* in Celeberrima Academia *OXONIENSI*; *Regalis Societatis* LONDINI, *pro Scientia Naturali promovenda*, Sodali; & *REGIÆ Majestati* à Sacris.

PARS TERTIA.

IN QUA,

De Vecte; aut unico, aut binis pluribúsve Fulcris sustento.

De Axe in Peritrochio, cum Potentiis cognatis.

De Trochleâ, seu Polyspasto.

De Cochleâ.

De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

De Percussione.

De Cuneo.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

De Hydrostaticis, & Aeris Æquipondio.

Variisque Quæstionibus Mechanicis.

LONDINI,
Typis *Gulielmi Godbid*; Impensis *Mosis Pitt*, ad Insigne *Albi Cervi* in vico vulgo vocato Little-Britain.
M DC LXXI.



MECHANICORUM,

SIVE

Tractatûs DE MOTU.

PARS TERTIA.

Ad Lectorem Monitio.



Ur Partem hanc Tertiam, *(ut priùs* Secundam,*) tanquam ex abrupto inchoemus; continuatis tum Capitum, tum Figurarum, Numeris: Ad Partem Secundam jam dictum est: Nempe, ut Citationes commodiùs peragantur.*



CAP. VI.

De Vecte.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Vectem (*notæ significationis in usu vulgari*) *hic consideramus*, *tanquam* Lineam Rectam Inflexilem, *Ponderibus vehendis*, *sustinendis*, *vel levandis accommodatam: Ponderisque vel nullius*, *vel saltem æquabilis. Græcis* μοχλὸς *dicitur.*

II.

Fulcrum (*Græcis* ὑπομόχλιον) *illud est quo Vectis sustinetur: Vel etiam super quo*, *tanquam immobili*, *movetur.*

VEctis nomen, a *Vehendo* dici videtur, (ut *vector*, *vectis*, *vectura*, *vectigal*, *convexum*, *vexo*, *vexillum*, quæque his cognata sunt;) eúmque præsertim ipsius usum respicere, quo Bajuli (seu *Palangarii*) utrinque adhibiti, *Vecti* (*Palangæ* itidem dictæ) impositum Onus *vehunt*; Aut etiam (quod eodem recidit) quo Vectis, Trabs, seu Tignum, Fulcris utrinque sustentatum, incumbens Grave sustinet.

Vox Græca μοχλὸς, sive à μόχθος *labor*, *molestia*, sive (ut ὀχλεὺς ejusdem significatûs) ab ὀχλεύω *moveo*, dicatur; alterum potius Vectis usum respicit (quem Mechanici potissimum tractant) quo, unius Fulcri ope, Vis alteri Vectis extremo applicata, reliquo impositum Grave, facilius sublevat: Quo respicit & nostratium vox **Leaver**, tanquam à *levando* dicta, quod nostri dicunt **to lift**, vel etiam **to heave**, (quasi à *veho* diceretur inversis literis;) unde & nostratium vox **Heaven**, Cœlum denotans; tanquam *Elatum*, *Altum*, *Elevatum*; (quomodo

(quomodo & Coelum *convexum* dicunt Poetæ.) Eodem sensu nautæ, speciatim de Anchorâ sublevandâ, dicunt **to weigh Anchor**, hoc est, Anchoram sublevare, atque *invehere*; (cui contrarium est **to cast Anchor**, hoc est, projicere.)

A μοχλὸς dicitur μοχλεύω, quod primâ significatione est *vecte moveo*, (unde ad alia etiam molimina transfertur;) atque hinc Latinorum *molior*, *molimen*, *moles*, *molestia*, &c. dici videntur; nisi quis hæc à *moveo* dicta malit.

Nos, utrumque Vectis usum respicientes, quo & Vehendis seu sustinendis ponderibus, & Levandis etiam accommodatur; utrique definitionem accommodavimus.

Quod autem, a μοχλὸς, ὑπομόχλιον dicunt Græci (utpote quod Vecti subjacere solet,) Latinis *Fulcrum* dicitur, quod à *Fulcio*, *fulsi*, *fultum*, formatur eâdem analogiâ quâ à suis Verbis, eorúmve Supinis, formantur alia; nam prout à *lavatum*, *simulatum*, *ambulatum*, *involutum*, *sepultum*, formantur *lavacrum*, *simulacrum*, *ambulacrum*, *involucrum*, *sepulcrum*, (& siqua sunt similia) à *fultum* formabitur *Fulcrum*. Sed &, à *Fulcio*, *fulcivi*, *fulcitum*, etiam *Fulcimen* dicitur, & *Fulcimentum*, eodem significatu. Significat autem vel illud immobile super quo moveri Vectis intelligitur, ubi submovendis ponderibus adhibetur; vel bina illa (sive plura sint.) fulcimina, quibus utrinque incumbens Trabs, seu Vectis, fulcitur seu sustinetur: Prout scilicet vel unico, vel binis (pluribúsve) Fulcris Vectis sustinetur.

III.

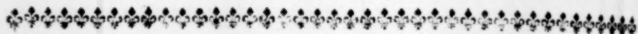
Applicationum puncta, Centrum Æquilibrii, *aliáque hujusmodi, sicubi hic occurrunt, eodem sensu intelligenda erunt quo suprà de Librâ, definitum est.*

Sic, (Fig. 221.) A B, Vectis; O, Onus levandum seu submovendum, vel etiam Obex amoliendus; V, Vis motrix adhibita; B, punctum applicationis ponderis; A, punctum applicationis Vis motricis; F, Fulcrum quo sustinetur; cujus apex C est Centrum motus, Axique Libræ respondet; Onúsque & Vis motrix, oppositis ad Libram Ponderibus respondent. Fig. 221.

Item, (Fig. 222.) A B Vectis, duobus fulcris seu bajulis F, F, sustentatum; O pondus seu onus impositum. Fig. 222.

Vectem autem tanquam rectam lineam (sed non flexilem) eâdem ratione hic habemus, quâ *Libram* suprà sic habuimus: Quoniam

tanquam nullius ponderis æstimatur. Et siquid, reverâ ponderis habeat, id vel oneri movendo, vel Vi motrici, vel partim huic partim illi, (pro vario situ) accensendum erit.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Vectis, (unico fulcro Oneri & Viribus intermedio nixus,) tanquam Libra consideretur; quæ de *Librâ* supra dicta sunt, eadem & Vecti accommodantur.

Fig. 221. PUtà; si Vectis A B, Fulcro sustineatur in C; atque applicentur Onus in B, & Vis in A, (utraque deorsum prementia;) Vis & Onus contra-ponderant; (seu invicem contra-nituntur;) hoc est, Vis deorsum in V, elevat O. per 1. Cap. 3.

Item, tantundem simul gravant seu premunt Fulcrum, quantum est utriusque simul (cum ipso Vecte) Vis (dum suspensum onus in quiete libratur;) per 2. Cap. 3. dúmque est in motu, quantum per 16. Cap. 3. determinatur.

Item, tantundem utrumque suum afficit seu gravat applicationis punctum, cui vel directè imminet, vel directè subest, (vel ipsum, vel ejus Centrum gravitatis,) atque si in ipso esset applicationis puncto. (Quod & alibi perinde obtinet.) Per 30. Cap. 2. vel 4. Cap. 3. & 16. Cap. 4.

Item, in ea ratione valent (Vis agendo, & Onus resistendo,) quæ ex rationibus Graduum (puta Ponderum & Virium,) & Distantiarum punctorum applicationis à Fulcro seu Centro motûs (cæteris paribus;) per 12. Cap. 3.

Item, si Vis (sic æstimata) oneri præpolleat; movebit: Si minus, non movebit. per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad fulcrum sit Onus O, & Vis V remotius, eò minori Vi majus movebitur Onus. per 12. Cap. 3.

Item, si, propter curvatum Vectem (quem rectum supponimus;) vel (quod eodem recidit) propter Centrum motûs extra ipsum Vectem, (hoc est, extra rectam applicationum puncta jungentem;) vel

vel propter non easdem Oneris & Virium Directiones; vel aliàs undecunque, contingat; pro vario Vectis situ, inæquales subinde futuras esse motuum (Oneris & Virium motricium,) Obliquitates: Eædem hic anomaliæ contingent, quæ de Libra ostenduntur, prop. 14. Cap. 3.

Aliaque de Librâ tradita, etiam de Vecte intelligenda erunt. Vectis enim Libra est; & Fulcri vertex, est Libræ Axis, seu Centrum Motûs: Onúsque & Vis Motrix, sunt ut Pondera utrinque Libræ applicata. Adeóque quæ illic de Libra universaliter demonstrantur; speciatim Vecti conveniunt.

SCHOLIUM.

NOtandum interim est; quamquam Vectium præcipuus usus esse soleat ad onera in altum levanda, (quem itaque vocabula horsum accommodata potissimum respicere videantur;) tamen eadem omnino ratio est, mutatis mutandis, Vectium in alio situ adhibitorum, ad quoscunque obices amoliendos; (eadémque & hic demonstratio.) Fig. 223. Puta, si, in situ horizontali, Vectis A B, firmiori fulcro F ad dextram posito nixus, adhibeatur (vi in A applicatâ) ad amoliendum obicem O ad sinistram positum; aut ad fores ibidem perfringendas; aliúdve hujusmodi perficiendum. Eodem modo; si fulcro F, supernè Fig. 224. posito, adhibeatur A B vectis, quo Clavus supernè fixus subducatur, vi adhibitâ in A quæ sursum præmat. Et sic alibi.

Dico autem, *firmiori Fulcro F.* Nisi enim satis firmum sit Fulcrum; Manente O, movebitur F, (ut fiat O fulcrum, & F mobile; de quo in Propositione sequente dicendum erit.) Sicut &, nisi vectis A B sit satis firmus; frangetur vectis A B, vel curvabitur. (Quæ & alibi similiter intelligenda erunt.)

Et quidem sic aliquando inter plura distribuitur motus, ut in ambiguo sit, quod Fulcrum dicatur, quod Mobile. Sic in Navium Remis; dum Vis Manubrio applicatur, Palmula Aquæ ut Fulcro innixa, Scalmum cum conjunctâ Nave submovet: Verum, cùm neque ita firmum fulcrum sit Aqua, quin & ipsa nonnihil pressa cedat; ratione motûs hujus, Scalmus pro Fulcro erit, eritque Aqua pro Mobili: Sed &, cùm neque Remus ipse tam validus aut firmus sit, quin Flectatur nonnihil seu Incurvetur, (etiam cum non frangitur;) tertius hinc oritur motus: Qui quidem tres motus se minuunt invicem. Quippe Aquæ Cessio, & Remi Flexio, motui Navis nonnihil demunt, qui major esset si non adessent illæ; sicut ex adverso, Motus Navis, eadémque Remi Flexio, Cessioni Aquæ; duóque motus reliqui, Flexioni

Flexioni Remi nonnihil demunt: Adeo quidem ut Vis eadem adhibita, quæ jam flectit; si nec Aqua cederet, nec submoveretur Navis, Remum frangeret. Et simile esto in aliis judicium.

Fig. 225, 226. Sed & nonnunquam gemini Vectes, decussatim positi, eidem communi Fulcro nitantur. Ut in Forficibus, & Forcipibus, ad interjectum obicem vel scindendum vel comprimendum adhibitis: Ubi duo Vectes A B, α β, communi fulcro F nixi, (adhibitâ vi in A, α,) comprimunt interjectum obicem O; & quidem eo fortiùs, quò vel O propiùs est ad F, vel A α inde remotiùs.

Quæ autem ad hanc propositionem monemus; etiam in sequentibus obtinent.

Possent quidem hæc omnia deduci, ex prop. 4, 5, 6. Cap. 1. (ubi fundamenta jacta sunt pro Machinarum omnium viribus æstimandis:) Cùm autem id *de Libra* jam factum sit, Cap. 3. potius duxi, ea quæ de Librâ dicta sunt, ad Vectem hic transferre, propter similes utrobique affectiones ab iisdem principiis deductas.

PROP. II.

Si Onus, Vecti applicatum, Fulcro & Vi motrici interjaceat: Quæ de Libra traduntur, etiam huc facilè transferentur. Aut etiam, si Vis Fulcro & Oneri interjaceat.

Fig. 227. Nempe; Si ad A B vectem, inter Vires in V, & Fulcrum in F, applicetur Onus in O: Vis sursum in V, secundum directionem suam procedens, elevat O contra directionem suam; (propter inflexilem A B:) Adeoque contra-nituntur vis & onus. Per 1. Cap. 3.

Fulcrum verò non utrâque vi premitur (vi scilicet oneris, & vi motrice,) quia vis motrix non est deorsum, nec Fulcro impeditur (ut in casu propositionis præcedentis;) sed sursum: Sed neque toto Onere premitur F, sed auxilio virium in V partim sublevatur. (Cui consonum occurrit ad prop. 18. Cap. 3.) Quantam autem oneris partem sustinet F, determinandum erit ex iis quæ post tradentur de Vecte duobus Fulcris sustentato.

Sed

Sed & hic in eâ ratione valent, Vis sursum nitendo, & Onus reintendo, quæ ex rationibus Graduum, & Distantiarum puncti applicationis à Fulcro, componitur. per 11 & 12. Cap. 3.

Atque si Vis (sic æstimata) præpolleat; submovebit Onus: Secus; non movebit. Et quidem si minus polleat, ne sustinebit quidem. Per 11. Cap. 1.

Adeoque, quo propius ad Fulcrum sit Onus, vel Vis remotior; eo minore Vi movetur majus Onus. Quippe sic Oneris Vis minuitur, Vis motrix augetur.

Quæque ad Prop. præcedentem, ex prop. 14. Cap. 3. notantur: etiam hic locum habent.

Eadem fere omnia dicenda veniunt, si Vis V, Fulcro & Oneri intercedat. Hoc saltem interest, quod Fulcrum jam supernè ponendum erit; & minus Onus, nonnisi majore Vi elevabitur: Sed neque tam Onere premitur Fulcrum, quam Virium parte. Fig.228.

PROP. III.

Si (ad Vectem cum unico Fulcro applicatorum) ratio Vis motricis, ad Onus, major sit quam reciproca distantiarum (punctorum applicationis) à Fulcro; Vis Onus movebit: Secus; non movebit: Si minor; ne sustinebit quidem.

$$\frac{n \cdot m}{mn} = \frac{m \cdot n}{nm} \qquad \frac{2 \cdot 3}{6} = \frac{3 \cdot 2}{6}$$

Verbi gratia. Si Vis Motrix ad Vim Oneris, sit ut 2 ad 3; seu n ad m; sitque distantia VF ad OF, ut 3 ad 2, seu ut m ad n: Æquipollebunt quidem Vires (propter $2 \times 3 = 3 \times 2$, seu $mn = nm$;) sunt utique (ut jam ostensum est, ad prop. 1 & 2.) illarum valores in ratione ex graduum & distantiarum rationibus compositâ. Adeoque, nondum movebit. Sed si Vis motrix vel tantillum augeatur, aut minuatur Onus: Vis præpollebit, adeoque movebit Onus. Sin minuatur Fig.229, 230, 231.

nuatur Vis, vel Onus augeatur; Vis Onus ne sustinebit quidem, per 9, & 11. Cap. 1.

Demonstratio perinde valet, sive Onus ultra fulcrum intelligatur; ut in fig. 229. sive citra; ut in fig. 230. Aut etiam (ut in fig. 231.) si Vis utrique intercedat; nisi quod, hoc casu, Vis motrix semper major esse debeat quam Vis Oneris (propter minorem a Fulcro Distantiam) quo possit Vis Oneri æquipollere: sicut ex adverso, ubi Onus citra Fulcrum est (Vi motrici & Fulcro interjectum) Vis motrix minor, majori Vi ponderis æquipollet; (propter minorem Oneris à Fulcro Distantiam:) Ubi autem Fulcrum intermedium est, potest utrumvis contingere.

PROP. IV.

Datum Pondus, datâ Vi, Vecte movere.

$$\begin{array}{c} n \\ m \\ \hline nm \end{array} = \begin{array}{c} m \\ n \\ \hline mn \end{array} \qquad \begin{array}{c} nV \\ mD \\ \hline mnDV \end{array} = \begin{array}{c} mO \\ nD \\ \hline mnDO \end{array} \qquad \begin{array}{c} 2V \\ 3D \\ \hline 6DV \end{array} = \begin{array}{c} 3O \\ 2D \\ \hline 6DO \end{array}$$

Fig. 229. Intelligatur vis *V*, oneri *O*, æquipollere; sitque expositum Onus *m O* (quod utique sit ad *O* ut *m* ad 1;) & *n V* vis exposita, (puta quæ sit ad *V*, ut *n* ad 1;) sitque onus *m O*, vi *n V* movendum. Si Vectis A B (fig. 229) ita dividatur in puncto F, (quod Fulcro incumbat,) ut sit A F ad F B, ut *m* ad *n*; Vis *n V* in A adhibita, Oneri *m O* applicato in B æquipollebit; per 3. hujus. (Propter rationem virium ad onus, *n* ad *m*, reciprocam rationis distantiarum *m* ad *n*; adeóque, quæ ex utrisque componitur, momenti ad impedimentum rationem æqualitatis, per 6. Cap. 1.) Si itaque, vel tantillum ad Fulcrum versus admoveatur Onus, (quo minuatur Impedimentum,) vel inde remotiùs applicetur vis (quo Momentum augeatur,) vel denique Fulcrum tantillum promoveatur ad Onus (quo utrumque fiat,) Momentum Impedimento præpollebit, & Vis exposita (sic adhibita) expositum Onus movebit. Per 9 & 11. Cap. 1.

Fig. 230, 231. Idem fiet, si Vectis A B ita in O dividatur, ut sit A B ad O B ut *m* ad *n*. Quippe tum, posito Fulcro in B, æquipollebit vis *n V* in A, ponderi

P

pc
rc
ti
bi
no

Vi
Fig
& (
non
veb

—

Si V
H
n
tı
rı
u
e
di
Adec
&
gi
co
Si ve
Fu
gra
det
Idémc
vis
cet
non

ponderi *m* O in O; (propter Vis & Oneris à Fulcro distantiis ipsis reciprocas;) Adeoque si vel Fulcrum Oneri, vel Onus Fulcro, tantillum admoveatur, vel remotius applicetur Vis; hæc Oneri præpollebit, adeoque movebit. Quippe tribus saltem hisce modis (ne plures nominem) augebitur ratio distantiarum A F ad O F.

Patet autem, in hac posteriori via, si Vis Oneris major sic quam Vis motrix; debere Onus Fulcro & Vi Motrici intercedere, ut in Fig. 230. Si Vis Motrix Vi Oneris major sit, potest Vis illa Fulcro & Oneri interponi, ut in Fig. 231. Verùm ubi hoc contingit, Vecte non opus erit; quippe Vis Motrix, Oneri immediatè applicata, movebit Onus.

PROP. V.

Si Vectis (Tignum, Palanga, seu Trabs oblonga,) situ Horizontali jacens, utroque sui extremo Fulcris sustineatur: Fulcra bina sustinentia, onus inter se partiuntur; idque in ea ratione quæ est reciproca distantiarum suarum à Vectis Centro gravitatis: Et quidem utrumvis eam totius portionem sustinet quæ ad totum eam habeat rationem, quam habet contrarii Fulcri distantia ad distantiam totam, seu Vectis longitudinem.

Adeoque, si Vectis, vel Trabs illa, sit æquabiliter gravis; & propterea Centrum gravitatis habeat in media longitudine; (aut etiam, si hoc propter aliam causam contingat;) Onus inter se æqualiter partiuntur.

Si verò Centrum gravitatis in mediâ longitudine non sit: Fulcrum illud magis premitur cui propius est Centrum gravitatis; atque in ea ratione quæ hac propositione determinatur.

Idémque valet, si Vecti ubivis applicetur Pondus quodvis. Nempe, si Pondus præcisè Vectis medio applicetur; æqualiter ab utroque Fulcro sustinetur. Si non in ipso medio, in eâ ratione premitur, ab incum-

 bente

bente Pondere, utrumvis Fulcrorum, quæ est reciproca distantiarum suarum à puncto applicationis. In ea verò ratione ad totum Pondus absolutè consideratum, quâ est contrarii Fulcri Distantia (à puncto applicationis ponderis) ad Fulcrorum ab invicem Distantiam, seu Vectis longitudinem.

Si autem in pluribus punctis, plura applicentur Pondera; de singulis seorsum simile fiet judicium (nempe, quantam partem cujusque Ponderis, utrumvis ferat Fulcrum;) atque inde de omnibus simul sumptis. Vel etiam (quod eodem recidet) ibidem omnia applicata censeantur, ubi est commune omnium Centrum gravitatis.

Fig. 232. ESto duobus Fulcris in A & B, Vectis A B sustentus; cujus Centrum gravitatis sit O punctum medium: Vel (quod eodem recidit, per prop. 16. Cap. 4.) Intelligatur A B Vectis tanquam linea recta nullius ponderis, quæ in sui puncto medio O, onusta intelligatur totius Vectis (Tigni seu Trabis) pondere, cujus Centrum gravitatis ibidem esse intelligatur: Vel denique (nam & hoc tantundem valet) Vectis puncto medio O, intelligatur Pondus quodlibet applicatum. Dico utrumvis Fulcrum semisse totius Ponderis onerari; adeoque Fulcra duo totum onus æqualiter inter se partire.

Manifestum utique est, Onus fulcro A incumbens, tantum esse, quanta Vis est quæ ibidem foret necessaria huic sustinendo oneri, si (manente fulcro B) fulcrum A abesset. (Quippe tantum Onus est, quanta Vis est quæ sustinendo sufficit: per prop. 11. Cap. 1. vel prop. 18. Cap. 2.) Hoc est; (propter distantiam A B, duplam distantiæ O B,) quæ dimidio Oneri æquipollet, (per prop. 3. hujus.) Idémque similiter ostendetur de Fulcro B. Adeoque totum onus æqualiter inter se partiuntur duo Fulcra A, B. Quod ostendendum erat.

Si verò Punctum O (quod sit vel totius Vectis seu Trabis Tigni ve aut Palangæ Centrum gravitatis, vel punctum applicationis impositi Ponderis) non sit in ipso Vectis puncto medio: Utcunque tanto Onere

Fig. 233. premitur fulcrum A, quanta Vis est quæ huic ibidem sustinendo par esset, si abesset A fulcrum: Hoc est, (per prop. 3. hujus,) quod sit, ad totum Pondus, in ea ratione quæ est reciproca distantiarum A B, O B; hoc est, ut O B ad A B. Et similiter ostendetur eo onere præmi fulcrum B, quod sit ad Pondus totum, in ratione reciproca distantiarum

tiarum B A, O A; hoc est, ut O A ad eandem A B. Et propterea (ob eundem utrobique consequentem) onera fulcrorum A, B, sunt ad invicem, ut O B ad O A; hoc est, in reciproca ratione suarum (ab applicationis puncto) distantiarum. Quæ itidem erant demonstranda.

Sin plura applicentur Pondera, puta alterum in O, alterum in I. Similiter ostendetur, Fulcrum A, eam partem ponderis O sustinere, quæ sit ad totum ut O B ad A B; eamque partem ponderis I, quæ ad totum sit ut I B ad A B: Et Fulcrum B, eam sustinere ponderis O partem, quæ sit ad totum, ut O A ad B A; eamque partem ponderis I, quæ sit ad totum ut I A ad B A. Fig. 234.

Vel etiam si per prop. 27. Cap. 4. quæratur commune simul-utriusque Centrum gravitatis; atque ibidem utraque censeantur tanquam unum Pondus applicari: Hujus eam partem sustinebit utrumvis fulcrum, quam indicant reciprocæ distantiæ; (per modò demonstrata) Tantundem utique gravant utcunque applicata pondera atque si ibidem essent ubi est commune omnium Centrum gravitatis: per prop. 16. & 17. Cap. 4.

SCHOLIUM.

Dico autem disertè, *In situ Horizontali jacens.* Quamquam enim de hac conditione prorsus tacere soleant Mechanicorum Scriptores (quantum scio, Omnes:) rationem onerum ad A & B, eandem assignent in Obliquo Vectis situ, quam assignant in situ Horizontali: Est tamen onerum, alia plane ad invicem ratio, in hoc, atque in illo, situ. (Ut ex dicendis ad prop. 8. patebit.) Quod quidem eousque verum est, ut, prout alteruttrum Vectis extremum A altius elevatur, ita continuò minuatur Onus; donec tandem, Vecte ad situm perpendicularem redacto, Fulcrum A nihil prorsus oneris sustineat, sed B totum. Quod in erigendâ prælongâ Perticâ, vel Scalâ, facile quis deprehendat. Fig. 235.

PROP. VI.

Hinc sequitur; Ita posse ad eundem Vectem (duobus Fulcris sustinendum, vel duobus Bajulis ferendum,) applicari Pondus; ut unius Fulcri (seu Bajuli) onus, ad onus reliqui, eam habeat rationem quam quisque velit.

Fig.233. PUtà, si Gigas & Infans (seu Fulcra firmitudinum utcunque inæqualium) adhibeantur (ille quidem in B, hic in A,) eidem portando oneri, imponendo Vecti A B: quod ita moderandum sit ut ferentium viribus justâ proportione consulatur: Id fiet, si ita dividatur, in O, vectis A B, ut sit distantia B O ad O A, ut sunt vires A ad vires B. Quippe, tum erunt Onera Viribus proportionalia: per præced. Sed ipsius Vectis hic nulla habetur ratio.

PROP. VII.

Inde etiam Calculo colligetur; Quanta cuique Vectis puncto Firmitas requiratur, ne rumpatur.

Fig.233. EXempli gratia. Vectis A B, duo segmenta B O, O A, firmitate conjunctionis suæ in communi O puncto, impediuntur ne rupto Vecte ruant. Tanta igitur conjunctionis firmitudo ibidem requiritur, quanta si disjuncta essent vis fulcri foret necessaria utriusque segmenti extremo sustinendo. Si autem, disjunctione in O factâ, supposito Fulcro sustinendum esset utriusque segmenti extremum; onerandum foret (per prop. 5. hujus) fulcrum illud, tum semisse ponderis B O (propter Vectem B O, duobus fulcris in B & O sustentum;) tum semisse ponderis O A, (ob similem causam:) Hoc est, semisse totius A B. Tanta itaque firmitudinis Vis in O requiritur, ne Vectis suo pondere rumpatur.

Intelligatur deinde, eidem O puncto (præter ipsum Vectis seu Trabis pondus) imponi vel suspendi pondus aliud quantumvis. Manifestum est onerandum fore subjectum fulcrum illud, tum semisse

totius

totius A B, (ob causam jam dictam,) tum toto onere Ponderis ibidem incumbentis. Tanta itaque Vectis firmitudo ibidem requiritur, quæ simul utrique (sui semissi, & toti ponderi imposito) æquipolleat.

Intelligatur demum proponi punctum quodvis aliud expendendum (extra punctum applicationis appensi ponderis) ut I. Manifestum est, si disjunctione ibidem factâ supponendum esset in I Fulcrum, onerandum fore fulcrum illud (ob causam modo dictam) tum semisse ponderis B I, tum semisse ponderis I A, (hoc est, semisse totius B A,) tum etiam (per prop 5. hujus) ea parte oneris O (inter B & I suspensi) quæ sit ad totum ut B O ad B I; (atque similiter, si plura adhuc pondera sive inter B & I, sive inter I & A, imponi aut suspendi intelligantur, de singulis fiet judicium; adeoque, additione factâ, de omnibus:) tanta itaque firmitas in I requiritur quæ oneribus illis æquipolleat. Atque sic alibi, prout res tulerit.

SCHOLIUM.

Atque hinc, in re Architectonicâ, facienda erit æstimatio, quam trabis cujusque partem oporteat fortiorem facere, prout imponendi oneris & disponendi ratio postulaverit.

PROP. VIII.

Si intelligatur Vectis obliquo situ positus; Fulcrum elatius, eam totius Oneris impositi partem sustinebit, quæ sit ad totum, in ea ratione quæ componitur ex ratione Distantiæ Oppositi Fulcri ab applicationis puncto, ad totam Fulcrorum ab invicem Distantiam; &, ratione quam habet ad Radium Sinus rectus istius anguli quem cum recta ad horizontem perpendiculari facit Vectis; seu Co-sinus inclinationis Vectis ad horizontem: Reliqúmque oneris sustinebit inferius fulcrum.

Nempe (in fig. 236.) Oneris O eam partem sustinet Fulcrum A, quæ sit ad totum ut B ω ad B H; B verò, quæ est ω H ad B H. Adeoque Onus Fulcri A, ad Onus Fulcri B, ut B ω ad ω H.

Intelligatur

Fig. 236. INtelligatur enim Vectis A B = *R*, situ ad Horizontem Obliquo positus, fulcris A, B, sustentus; cui applicetur, in O, pondus quodvis; Vectem dirimens in duo segmenta, A O = *a*, & O B = *b*. Manifestum est (per demonstrata ad prop. 5.) Onus fulcri elatioris A, tantum esse, quanta Vis esset eidem ibidem sustinendo necessaria, si (manente fulcro B) abesset A fulcrum. Hoc est; propter rectæ A B divisionem in O; in ea ratione ad totum pondus, quæ est distantiarum B O ad B A, seu *b* ad *R*: per prop. 2. hujus, vel prop. 7. Cap. 2. & prop. 11. Cap. 3. Sed & porro; propter Obliquum situm ad Horizontem, adeoque Obliquum Descensum si (manente B) moveretur A, (puta in arcu A H, cujus Tangens A T;) in ea ratione quam ad Radium habet Sinus rectus anguli quem facit Vectis cum perpendiculari, vel Co-sinus anguli Inclinationis ad Horizontem: per prop. 13. Cap 3. vel prop. 21. Cap. 2. Hoc est A b ad B A; seu O β vel B ω ad B O; puta ut *s* ad *R*. Adeoque; propter simul utramque causam; in ea ratione quæ ex utrisque componitur; *s* ad *R*, & *b* ad *R*; hoc est, ut *s b* ad R^2: Seu ex β O ad B O, & B O ad B A; hoc est, ut β O ad B A, seu B ω ad B H.

Adeoque Oneris reliquum quod sustinet B fulcrum, est ad totum, ut ω H ad B H.

Et propterea Onus fulcri A, ad Onus fulcri B, ut B ω ad ω H. Quæ erant demonstanda.

Hic nota, rectam B α (Co-sinum anguli inclinationis A B H) in eadem ratione secari in ω, qua secatur B A in O.

SCHOLIUM.

Fig. 236. CAusa diversæ rationis in Obliquo Vectis situ, ab ea quæ est in situ Horizontali; hinc oritur, quòd, manente B fulcro, fulcrum A impedit tantummodo Rotationem puncti O circa B centrum, quæ in hoc situ æquipoliet Obliquo Descensui secundum tangentem O T, (per prop. 15. Cap. 2.) non descensui recto in recta O α.

Fig. 235. Fulcrum verò B, (ut in fig. 235.) impedit, non tantum Rotationem ipsius O circa centrum A; sed etiam ejusdem Descensum Obliquum secundum rectam A O B, cui fulcrum A non obstat. Nam, nisi obstaret B fulcrum, posset, manente fulcro A, non modo punctum O circa A rotari, sed etiam totus A B Vectis deorsum labi; adeóque punctum O ferri in motu composito ex motu Rotationis & motu Vectis Labentis, cui utrique obstat Fulcrum B.

Si verò intelligatur Vectis A B, non tantum fulcro A inniti, (quò impediatur

impediatur rotatio,) sed & (ut fig. 237.) cum illo sic ligari, aut unco Fig. 237.
aliásve sic conjungi, ut, etiamsi B abesset, non posset alias, quàm circa
A rotando, moveri punctum O: alia prodibit ratio. Quippe jam
fulcra A, B, obliquum lapsum secundum A B rectam æqualiter im-
pediunt: rotationem vero impediunt in oppositarum distantiarum ra-
tione.

Sed & porrò; si intelligatur, non modò A fulcrum, sed & ful- Fig. 238.
crum B, sic esse comparata, ut non impediant obliquum illum se-
cundum rectam A B Descensum (puta si intelligatur A B Vectis ex-
tremo tantùm fulcri B angulo incumbere:) labetur Vectis simul cum
annexo pondere, descensu illo obliquo. Rotationem verò impedient
in ea ratione Fulcra quæ est Oppositarum Distantiarum; (quæ con-
tinuè variabitur prout O propius ad B feretur.) Totúmque quod
inter se partiuntur Onus, non est totius Ponderis impositi, sed ea pars
totius quæ determinanda erit ex diminuto descensu in obliqua recta
OB (fig. 235.) præ eo qui esset in Oω perpendiculari (fig. 236.) juxta
leges prop. 17. & 21. Cap. 2. traditas. Puta, quæ sit ad totum, ut (in
fig. 42.) P R ad P F, propter obliquum descensum in F B recta:
hoc est (in fig. 236.) ut B O — Oω ad B O.

Si verò, (fulcro B id permittente,) intelligatur Vectis A B, ful- Fig. 239.
cro A sic suspendi (aliásve cum illo sic connecti) ut hoc solo impedi-
atur Vectis A B, ne secundum A O B rectam descendat; (fulcro B
nonnisi rotationem circa A impediente:) erit onus fulcri B, ad onus
totius ponderis impositi in ea ratione, quæ ex s ad R, & a ad R,
componitur; hoc est, ut sa ad R^2, (quod similiter de B probabitur,
atque supra probatum erat, in casu propositionis, rationem oneris A,
esse ad totum, ut sb ad R^2;) reliquúmque oneris sustinebit A.

Denique; si intelligatur Fulcri B facies superior horizontalis, sic Fig. 240.
ab omni asperitate lævigata, ut quamvis non permittat Vecti descensum
per A O B rectam, permittat saltem ut Vectis extremum B (verbi
gratia) in horizontali recta H B labetur, (neque huic obstet aliqua
connexio cum A fulcro,) unde aliqualis saltem descensus puncto O
permittatur: minus propterea premetur fulcrum B, propter descen-
sum non penitus impeditum. Idem verò est quod prius fulcri A
Onus; sed quod continuo variabitur, partim Auctum (propter situm
Vectis minus obliquum) partim Diminutum (propter majorem ratio-
nem distantiæ A O ad O B) prout Vectis extremum B remotiùs in
H B rectâ retro lapsum fuerit; dummodò (quod hic intelligendum
erit) Vectis pars O A intelligatur ultra A quantum opus fuerit pro-
longata; secus enim, retro labente extremo B, alterum A fulcrum
suum deseret, nec eo sustinebitur. Et

Et quidem similiter, mutatis mutandis, in aliis casibus judicandum erit, quos omnes sigillatim prosequi nimis molestum esset.

PROP. IX.

Si pluribus Fulcris (Vectium invicem commissarum ope) sustineatur impositum Pondus; Onus cujusque, prout singulorum situs postulaverit, calculo æstimabitur, cui ferendo par esse debet ne fatiscat.

Fig. 241. EXempli gratia: Si tribus Vectibus seu Tignis, A O, B O, C O, in communi O puncto firmiter conjunctis, impositum pondus O, tribus fulcris in A, B, C, sustineatur. Manifestum est, si A B C sit triangulum æquilaterum, sitque O in Trianguli medio, æqualiter à singulis angulis remoto; Onus hoc inter tria Fulcra (ob similem omnium situm) æqualiter distribui; adeoque quodlibet Fulcrum trientem totius Oneris sustinere.

Sin secus fuerit; singulorum tamen Onus sic habebitur. Intelligatur (verbi gratia) Vectis A O continuari, donec in D occurrat rectæ B C. Cúmque fulcri A id unicum munus sit, ut impediatur Oneris O rotatio circa B C rectam (ut ex prop. 1. Cap. 4. liquet:) perinde est (quantum ad fulcrum A) sive id fiat ope continuati Vectis A O D, in ejusdem B C rectæ puncto D suffulti, sive fiat ope duorum B O, C O: Utrovis enim modo eadem præcisè Rotatio impeditur. Si vero id fiat (sublatis fulcris B, C,) ope continuati Vectis A O D (supposito Fulcro ipsi D puncto;) erit Oneris A, ea pars totius quæ sit ad totum ut O D ad A D; per prop. 5. hujus. Tantundem itaque erit, si, sublato D, fulcris B, C, idem obtineatur. Atque similiter ostendetur, (continuatis B O ad E in recta A C, & C O ad F in recta A B,) onus fulcri B, eam esse totius O partem, quæ sit ad totum in ratione O E ad B E; onúsque fulcri B, ad totum, ut O F ad C F: Cujuscunque formæ fuerit Triangulum A B C.

Et simili modo procedendum erit, prout res postulaverit, quotcunque Fulcris quomodocunque sitis, sustineri intelligatur Pondus O. Quippe id semper prospiciendum erit, Quam Rotationem impediat quodlibet Fulcrum; &, quidem, Num Unum aliquod an Plura id præstent. Quippe si Plura sint; utut unum eorum non satis valeat Oneri sustinendo, tamen si simul omnia (suis cujusque Viribus ritè computatis) ferendo Oneri saltem æquipolleant; Onus sustinebitur.

Puta;

. VI.

andum

---

ope)
prout
r, cui

CO,
lus O,
C sit
liter à
n om-
trien-

ntelli-
currat
diatur
uet :)
Vectis
e duo-
impe-
Vectis
ea pars
antun-
Atque
O ad F
l totum
d CF:

uotcun-
dus O.
npediat
Plura id
t Oneri
compu-

Putà;

PRO

Pu
telliga
rum r
Sta
vebitu
fum el
Quor

ut C

eft, a
circa

Pondu

Et Fu

ut I L

confid

bunt h
tetur.
Fulcra
Sin
nifi c

B, G,

Fulcr

patet,

$\frac{HA}{AO}$

AC

Iter
circa

A, G,

G, $\frac{G}{C}$

Putà; si non tantùm in A, B, C, (ut modò) sed & in G, H, I, intelligantur Fulcra; (cæteraque constructa ut in fig. 242.) Quorum respectivæ Vires sunto a, b, c, g, h, i. Fig. 242.

Stantibus Fulcris A, B, vel A, G, B; non aliter Descendendo movebitur Pondus O, quàm circa A B rectam rotando, (ut modò ostensum est ex prop. 1. Cap. 4.) Huic autem obstant Tria Fulcra C, H, I. Quorum quidem C, Pondus in O sustinebit, quod ad Vires suas sit ut CF ad FO; puta $\frac{CF}{FO}c$: per 2 vel 3 hujus: (tantundem utique est, acsi continuata Vectis C O F, fulcrum haberet F, in ea recta A B circa quam facienda esset Rotatio.) Similiter Fulcrum H, sustinebit Pondus in O, quod sit ad Vires suas, ut HA ad HO; putà $\frac{HA}{AO}h$. Et Fulcrum I, similiter Pondus in O sustinebit quod sit ad Vires suas ut IL ad LO, putà $\frac{IL}{LO}i$. Si itaque totum Pondus O (simpliciter consideratum) majus non sit quam $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}h + \frac{IL}{LO}i$; valebunt hæc tria Fulcra C, H, I, onus in O sustinere ne circa A B rotetur. Sin majus fuerit Pondus O, quàm ut dictum est; fatiscent Fulcra C, H, I, ponderi sustinendo imparia.

Similiter; Stantibus Fulcris A, C, seu A, I, C; non descendet O, nisi circa A C rectam rotando. Huic autem obstant Tria Fulcra B, G, H. Quorum, Fulcrum B, sustinebit $\frac{BE}{EO}b$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HA}{AO}h$: (ut ex modò dictis, & Schematis inspectu patet.) Si itaque majus non sit Pondus O, quàm $\frac{BE}{EO}b + \frac{GC}{CO}g + \frac{HA}{AO}h$; satis valebunt B, G, H, Fulcra, Oneri sustinendo ne circa AC rotetur: Si secùs; fatiscent.

Item; Stantibus Fulcris B, C; non descendendo movebitur O, nisi circa BC rectam rotando. Huic verò obstant Quatuor Fulcra, A, G, H, I. Quorum A, sustinebit (per ante dicta) $\frac{AD}{DO}a$: Fulcrum G, $\frac{GC}{CO}g$: Fulcrum H, $\frac{HD}{DO}h$: Fulcrum I, $\frac{IK}{KO}i$. Si itaque ma-

jus non sit Pondus O, quàm $\frac{AD}{DO}a + \frac{GC}{CO}g + \frac{HD}{DO}h + \frac{IK}{KO}i$; satis valebunt Fulcra A, G, H, I, ne circa BC rotetur O: si secus; sub onere fatiscent.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, instituetur Calculus, quotcunque fuerint Fulcra, & quomodocunque sita.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, (quo rectius intelligantur omnia,) Onus seu Pondus quod intelligitur ad punctum O applicari; & Vectibus AO, BO, &c. invicem compactis sustineri; posse vel Tabulatum esse (gravatum vel non gravatum incumbente aut dependente pondere quovis alio) vel aliud quodvis Grave cohærens; cujus saltem Centrum gravitatis vel sit in ipso O puncto, vel huic directè subsit aut immineat: per prop. 18. Cap. 2. & prop. 16. Cap. 4.

Item Vectes, AO, BO, &c. non semper alios esse ab ipso onere; sed vel ipsius Tabulati seu Gravis rectas, vel imaginarias saltem rectas à suis respectivè Fulcris ad O pertingentes, & prout opus fuerit continuatas, secundùm quas Fulcrorum A, B, &c. distantias tum ab O onere, tum ab oppositis respectivè Fulcris imaginariis in Axe Rotationis, æstimemus. Neque aliud innuunt, quam quod Gravis partes ita sint inter se sat firmiter cohærentes ut puncti O, ab ipsis A, B, C, &c. distantiæ, eædem maneant: sive id fiat totidem rectis inde in O coeuntibus ibique connexis, sive per curvos circuitus, aliasve, id fiat.

Fulcra verò, quæ punctis A, B, C, &c. supposita intelligimus; considerantur solummodo ut Fulcra, non item ut Retinacula: impedientia scilicet ne quod illis imponitur ibidem Descendat, non autem ne inde Assurgat. Adeoque, utut Fulcrum H (verbi gratia) intelligatur impeditivum Rotationis circa BC, (quoniam non deprimetur O, nisi depresso H;) non tamen intelligitur Fulcrum G, impeditivum rotationis circa AB, quoniam ut hæc fiat rotatio (descendente O) non fiet Fulcri G depressio, sed sursum assurget quod illi incumbit; cui Fulcrum non obstat.

Si verò, quod huic impositum est, non tantùm subjecto fulcro incumbat, sed cum eo ita connexum sit ut nonnisi ruptâ copulâ possit assurgere; (alióve quovis Retinaculo, aut Impedimento, vel onere superimposito idem eveniat:) Hoc quicquid est Retinaculi, Impeditivum erit Rotationis circa AB, fulcrísque C, H, I, suppetias feret: (quippe,

(quippe, stante rectâ A B, non poterit O descendere nisi ascendente Gravis puncto G; propter rectam O G quam supponimus inflexilem, seu totum Grave ita compactum ut non luxetur; per Schol. prop. 1. Cap. 4.) Cujus quidem Retinaculi vires si ponantur r; sustinebunt illæ, pondus in O, quod sit ad r, ut G F ad F O, (per prop. 1. vel 3. hujus,) puta $\frac{GF}{FO}r$. Adeoque jam, non modò, si O non sit majus quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i$, (ut priùs;) sed si majus non sit quàm $\frac{CF}{FO}c + \frac{HA}{AO}b + \frac{IL}{LO}i + \frac{GF}{FO}r$: Satis valebunt Fulcra C, H, I, unà cum Retinaculo in G, impediendæ rotationi Oneris O circa A B. Similéque erit in reliquis judicium.

Rotationes autem nonnisi Tres in Calculo consideravimus; nempe circa A B, A C, B C: non quòd plures esse non possint, (ut circa A G, G B, &c.) sed quoniam instituto sufficiant hæ tres; in quibus considerandis Fulcrorum omnium vires sub calculo veniunt. Quippe si saltem tria puncta, (ut A, B, C,) intra quæ sit ipsum Grave ejusve Centrum gravitatis O, satis sustineantur, (sive suis singula fulcris, ut in fig. 241. sive cum succenturiatorum subsidiis, ut in fig. 242.) totum sustinebitur Grave: per prop. 1. Cap. 4.

PROP. X.

Contignationem planam ex Tignis multò Brevioribus quàm sit Areæ Latitudo invicem conjunctis construere: Et computo æstimare, Quantum cuique Juncturæ Onus incumbat.

Contignationis seu Tabulati Constructio.

Potest quidem hoc variis modis fieri. Eam verò formam præ cæteris seligendum putavi, quam jam olim Anno 1644. *Cantabrigiæ* primum delineabam, in Collegio *Reginensi*, in quo tum temporis *Socius* eram: & quam non ita multò pòst Tigillis ligneis construendam curabam, (quò manifestiùs indicarem Theoriam posse in Praxin reduci:) eámque in Vesperiis Comitiorum *Oxoniæ* Anno 1652. (postquam ad munus illud quod etiamnum sustineo vocatus Fig. 243.

 eram)

eram) solenni Prælectione exponebam; ejusque Calculum Vesperiis Comitiorum Anni sequentis, 1653. similiter explicabam: Quamque ex eo tempore tum Nostratium tum Exterorum non pauci satis approbarunt, aliqui etiam imitati sunt: Quam & Serenissimus Rex noster, CAROLUS *Secundus*, post auspicatum suum in *Angliam* reditum, oblatam sibi Octobr. 18. 1660. inter Κειμήλια sua dignatus est reponere.

Specimen exhibet Areæ quadratæ, cujus Latitudo est fere quadrupla longitudinis Tignorum longissimorum; quæ ita sunt invicem intertexta, ut se mutuo sustineant. Et quidem, quò supra planitiem non assurgant, quâ parte tignum quodvis aliud sibi supernè impositum sustinet (quod sui partibus intermediis fit) supernè (ad mediam quasi partem) excavatur: quâ parte verò alii impositum sustinetur, (quod in sui extremis fit) tantundem quasi excavatur infernè: quò fit, ut, sibi mutuò impacta, aream planam faciant. Si tamen metuendum videatur, ut, propter ligni naturam flexilem partes mediæ, onere pressæ, nonnihil subsidant: huic incommodo cavebitur, si excavationes non præcisè ad mediam tigni crassitiem pertingant, sed paulo citra medium desinant. Quippe, hoc pacto, assurget paululum in singulis juncturis contignatio, quò compensetur illa exigua depressio quæ ex curvaturâ oriatur.

Fig. 244, 245. Faciem lateralem Tigni Longioris, exhibet fig. 244. Brevioris, fig. 245. Facies superna in ipsa fig. 243. satis apparet.

Fig. 243. Quo autem ordine disponantur; ex Schematis intuitu (fig. 243.) faciliùs intelligatur, quàm possit multis verbis explicari.

Videre enim est, si ab Extremis ordiri libeat, totam Aream *Muro* circumseptam; vel etiam (siquis id malit) Muri loco, totidem quot opus erit *Columnis*, quibus imponantur Trabium sive Tignorum exteriora Capita. Quorum capita altera, introrsum spectantia, Tignis aliis imposita sustinentur; atque horum porro, ab aliis; atque hæc ab aliis; & sic deinceps donec ad oppositos muros perveniatur.

Verbi gratia, Tigni S&, extremum alterum muro sustinetur, alterum tigno &Z: Hujus alterum extremum muro itidem sustinetur, reliquum tigno QP. Sed & tigni UY, extremum alterum muro sustinetur; reliquum eodem QP tigno. Hujus verò QP sed & tigni ON, extrema altera tigno SR, altera tigno KI sustinentur. Atque horum item extrema (uti videre est) tignis alteris superimposita sustinentur; horumque alteris; & sic porro, prout ex inspecto Schemate luculentiùs patet quam ut multis verbis explicatu opus fit.

Si-

Similiter; si à medio libeat ordiri, quodlibet Tignorum AB, ut & tignorum CD, sustinentur alteris extremis in altero AB, alteris in tigno EF: atque hujus item, ut & tigni LM, extrema altera tigno GH, altera tigno NO: atque horum, aliis; & sic porro usquedum ad muros perveniatur; ut ex Schemate liquet.

Notandum interim, eâdem methodo, aream istiusmodi construi posse vel ex paucioribus, vel etiam ex pluribus tignis; sed & in alia formâ, (puta oblongâ non minùs quam quadratâ;) prout res postulaverit.

Verbi gratia; poterit ibidem continuus Murus collocari, ubi jam habentur Tigna SR, VU, &S; aut ubi Tigna &Z, ML, PQ; quo area reddatur minus lata, ut paucioribus tignis à muro in murum perveniatur: idque eousque ut non nisi *Quaternis* tignis opus sit; ut in fig. 246. Vel etiam (quæ est forma omnium simplicissima) Fig. 246,
Ternis tignis; ut in fig. 247. 247.

Verùm etiam, si id opus erit, poterunt tigna XR, WV, (cæ- Fig. 243.
teraque quæ reliquis breviora sunt, atque hic in muro terminantur,) ad parem cum reliquis longitudinem protrahi, tignaque secunda (ipsis SR, VU, parallela, & extra hæc posita) sustinere; eorumque sic protractorum extrema, vel muris (extra promotis) ibidem transeuntibus sustineri, vel etiam (ampliatâ adhuc areâ) tignis aliis, (ipsis ML, PQ, parallelis;) atque sic porro prout opus videbitur.

Hoc autem ne in infinitum protrahi possit, impediunt, non tam rationes Mathematicæ, (quæ in contrarium non eunt,) quàm Materiæ Physicæ conditio. Quippe in protractâ areâ, auctâ Tignorum multitudine, augetur Onus; donec eò tandem perveniatur, ut majus evadat, quam ut, quæ sustinendo paria sint, Tigna conquiri possint, quæque sub tanto onere non fatiscant & rumpantur.

Quousque autem tutò liceat hac ratione procedere; ex calculo facienda est æstimatio. Quippe si constet tum quanto oneri ferendo sufficiant Tigna quæ adhibenda veniant; (quod periti Architecti, experimento docti, docebunt:) tum quantum oneris, prout sitûs ratio postulat, cuique Tigno ferendum imponatur; (quod calculus indicabit:) hinc optimè fiet judicium, quid tutò fieri possit. Qui quidem calculus, in tignis numero paucioribus, faciliùs instituetur; operosiùs autem in pluribus.

Quò autem quâ methodo fieri possit ostendam; expositæ contignationis juncturas singulas calculo subjeci; perplexo quidem, propter tignorum multitudinem; sed qui in paucioribus tignis multò citiùs ad exitum pervenisset.

Calculus, expositæ Contignationi accommodatus.

Fig. 243. Quò Calculus (Synopsi sequente tradendus) rectiùs intelligatur; notandum est (quod oculi judicium satis indicabit,) Tignorum alia aliis longiora; atque ita quidem ut longiora sint breviorum quasi sesquialtera. Et propterea, cum Tigni cujusque ex longioribus pondus designemus symbolo T; cujusque ex brevioribus symbolum erit $\frac{2}{3} T$.

Onus autem cuique Tignorum juncturæ incumbens, eâ literâ indicatur quam sibi in Schemate ascriptam habet ea junctura.

Notandum porro erit; cùm manifestum sit, (Schema vel mediocriter consideranti,) quaterna semper puncta esse, quæ (propter similem situm respectu totius contignationis) æqualiter onerata censenda sint: ea semper (ne, præter necessitatem, symbolorum numerus cresceret, & calculus proinde redderetur multò perplexior,) eisdem symbolis designamus. Unde habeantur quatuor A, (similiter sita, atque æqualiter onerata,) atque totidem B, & sic de reliquis.

Cum itaque habetur, verbi gratia, (ad Num. 2. seu Æquationem secundam,) $B = \frac{1}{2} T + \frac{2}{3} C + \frac{1}{3} A$; tantundem est atque si diceretur, subjecti Tigni A B, punctum B, (præter eam firmitatem quæ ibidem requiritur ne suo pondere rumpatur tignum, quam hæc æquatio non involvit,) tantum onus impositum sustinere, quantum est tum $\frac{1}{2} T$ (semissis ponderis incumbentis tigni longioris AB,) tum $\frac{2}{3} C$ (bessis oneris eidem A B tigno impositi in C puncto; utpote quod in C, A, punctis trifariam sectum intelligitur;) tum $\frac{1}{3} A$, (triens oneris eidem A B tigno, in A, impositi.) Item ubi habetur (ad num. 21.) $W = \frac{1}{3} T + \frac{1}{2} V$: innuit hoc, Tigni, L M, puncto W, onus impositum tantum esse, quantum est tum $\frac{1}{3} T$ (semissis incumbentis tigni brevioris, qui idem est atque tigni longioris triens,) tum $\frac{1}{2} V$ (semissis oneris quod incumbentis tigni puncto medio V super imponitur.) Quæ omnia singulatim demonstrantur ex prop. 5. vel 7. hujus Capitis. Quod similiter obtinet in Æquationibus primoribus Viginti-quinque.

Æquatio 26. & quæ sequuntur; ex præcedentibus derivantur, (quas per numeros æquationibus illis adscriptos citavimus, quo dilucidior esset totius processus ratio.) Quæ inserviunt partim ad abbreviandas fractiones, (quoties tum numeratores tum denominatores possunt communi aliquo divisore dividi,) partim verò (& quidem potissimùm) ad reducendas & exponendas æquationes præcedentes (substituto

ſtituto ſymboli alicujus valore, aliis ſymbolis explicato, (quo, diſ-junctis ſubinde aliquot ſymbolis, ſymbolorum numerus reſiduorum ſenſim minuatur, donec tandem unum aliquod ſymbolorum à principio ignotorum, per notam quantitatem T (pondus unius tigni longioris, ſimpliciter conſiderati,) exponatur; ejuſque demum ope (repetendo præcedentium aliquot æquationum veſtigia) reliquorum etiam ſymbolorum (onerum primitus ignotorum) valores innoteſcant.

Verbi gratia; cum habeatur (num. 1.) $A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}C$; manifeſtum eſt (propter A in æquationis utraque parte repertum) ſublato utrinque $\frac{2}{3}A$, ſupereſſe $\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C$; hoc eſt (utrinque per 3 multiplicando) $A=\frac{3}{2}T+C$; quam itaque Æquationem (num. 26.) habemus, tanquam derivatam ex Æquatione prima, (num. 1.) quam itaque citamus.

Similiter; cum ſit (num. 2.) $B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A$; ſitque (per num. 26.) $A=\frac{3}{2}T+C$; adeoque $\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C$: erit B $(=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{2}T+\frac{1}{3}C)=T+C$. Quam itaque æquationem ($B=T+C$) habemus num. 27. tanquam ex num. 2, 26, derivatam. Et ſimiliter in aliis. Fig. 243.

Nonnunquam vero (ut modò dictum eſt) ſola fit Fractionis abbreviatio (ſeu ad minores terminos per communem diviſorem reductio.) Ut, cum (num. 64.) habeatur $H=\frac{6912T+672G+552I+279O}{2907=3\times 969}$; poſſintque omnia membra per 3 dividi: habetur, num. 65. (tanquam ex num. 64. derivata) æquatio, $H=\frac{2304T+224G+184I+93O}{969}$. Et ſic alibi.

Quoniam autem has omnes Æquationum reductiones atque abbreviationes ſingulatim exponere (prout has paucas expoſuimus) Lectori tædium crearet, (cum illud poſſit ſuo marte quilibet præſtare:) contenti ſumus omnes unâ Synopſi breviter exhibere; indicatis iis æquationibus antecedentibus ex quibus quæque immediate dependeat.

Calculi Synopſis.

1	$A=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}A+\frac{1}{3}C$.	6	$F=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}D+\frac{1}{3}B$.
2	$B=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}C+\frac{1}{3}A$.	7	$G=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}E+\frac{1}{3}L$.
3	$C=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}G+\frac{1}{3}I$.	8	$H=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}L+\frac{1}{3}E$.
4	$D=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}I+\frac{1}{3}G$.	9	$I=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}N+\frac{1}{3}P$.
5	$E=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}B+\frac{1}{3}D$.	10	$K=\frac{1}{2}T+\frac{2}{3}P+\frac{1}{3}N$.

11 $L = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}W + \frac{1}{3}X.$

12 $M = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}W.$

13 $N = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}F + \frac{1}{3}M.$

14 $O = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}M + \frac{1}{3}F.$

15 $P = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Y + \frac{1}{3}Z.$

16 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Z + \frac{1}{3}Y.$

17 $R = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}O + \frac{1}{3}Q.$

18 $S = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}Q + \frac{1}{3}O.$

19 $V = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}H + \frac{1}{3}K.$

20 $U = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}K + \frac{1}{3}H.$

21 $W = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}V.$

22 $X = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}R.$

23 $Y = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}U.$

24 $Z = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}\&.$

25 $\& = \frac{1}{3}T + \frac{1}{2}S.$

Per Prop. 5. vel 7. hujus Cap.

26 $A = \frac{1}{2}T + C.$ per 1.

27 $B = T + C.$ per 2, 26.

28 $B = \frac{1}{2}T + \frac{2}{3}G + \frac{1}{3}I.$ per 27, 3.

29 $E = \frac{15T + 5G + 4I}{9}.$ per 5, 28, 4.

30 $F = \frac{12T + 4G + 5I}{9}.$ per 6, 4, 28.

31 $W = \frac{7T + 4H + 2K}{12}.$ per 21, 19.

32 $X = \frac{7T + 4O + 2Q}{12}.$ per 22, 17.

33 $Y = \frac{7T + 2H + 4K}{12}.$ per 23, 20.

34 $\& = \frac{7T + 2O + 4Q}{12}.$ per 25, 18.

35 $Z = \frac{7\frac{1}{2}T + O + 2Q}{12}.$ per 24, 34.

36 $L = \frac{39T + 8H + 4K + 4O + 2Q}{36}.$ per 11, 31, 32.

37 $M = \frac{39T + 4H + 2K + 8O + 4Q}{36}.$ per 12, 31, 32.

38 $P = \frac{39\frac{1}{2}T + 4H + 8K + O + 2Q}{36}$ per 15, 33, 35.

39 Q=

39 $$Q=\frac{20T+H+2K+O+2Q}{18}.$$ per 16, 33, 35.

40 $$Q=\frac{20T+H+2K+O}{16}.$$ per 39. Fig. 243.

41 $$N=\frac{94\frac{1}{2}T+16G+2H+20I+K+4O+2Q}{54}.$$ per 13, 30, 37.

42 $$O=\frac{45T+4G+2H+5I+K+4O+2Q}{27}.$$ per 14, 30, 37.

43 $$O=\frac{45T+4G+2H+5I+K+2Q}{23}.$$ per 42.

44 $$G=\frac{213T+40G+8H+32I+4K+4O+2Q}{108}.$$ per 7, 29, 36.

45 $$G=\frac{213T+8H+32I+4K+4O+2Q}{68}.$$ per 44.

46 $$H=\frac{48T+G+4H+4I+2K+2O+Q}{27}.$$ per 8, 29, 36.

47 $$H=\frac{48T+5G+4I+2K+2O+Q}{23}.$$ per 46.

48 $$I=\frac{658\frac{1}{2}T+64G+20H+80I+28K+19O+14Q}{324}.$$ per 9, 38, 41.

49 $$I=\frac{658\frac{1}{2}T+64G+20H+28K+19O+14Q}{244}.$$ per 48.

50 $$K=\frac{294T+16G+14H+20I+25K+7O+8Q}{162}.$$ per 10, 38, 41.

51 $$K=\frac{294T+16G+14H+20I+7O+8Q}{137}.$$ per 50.

52 $$G=\frac{1724T+65H+256I+34K+33O}{8\times 68=544}.$$ per 45, 40.

53 $$H=\frac{788T+80G+H+64I+34K+33O}{16\times 23=368}.$$ per 47, 40.

54 $$H=\frac{788T+80G+64I+34K+33O}{367}.$$ per 53.

55 $$I=\frac{5408T+512G+167H+238K+159O}{244\times 8=1952}.$$ per 49, 40.

56 $$K=\frac{608T+32G+29H+40I+2K+15O}{137\times 2=274}.$$ per 51, 40.

57 $K=\frac{608T+32G+29H+40I+15O}{272=8\times34}$. per 56.

Fig. 243. 58 $O=\frac{380T+32G+17H+40I+10K+O}{23\times8=184}$. per 43, 40.

59 $O=\frac{380T+32G+17H+40I+10K}{183}$. per 58.

60 $G=\frac{14400T+32G+549H+2088I+279O}{544\times8=4352}$. per 52, 57.

61 $G=\frac{14400T+549H+2088I+279O}{4320=9\times480}$. per 60.

62 $G=\frac{1600T+61H+232I+31O}{480}$. per 61.

63 $H=\frac{6912T+672G+29H+552I+279O}{367\times8=2936}$. per 54, 57.

64 $H=\frac{6912T+672G+552I+279O}{2907=3\times969}$. per 63.

65 $H=\frac{2304T+224G+184I+93O}{969}$. per 64.

66 $I=\frac{47520T+4320G+1539H+280I+1377O}{1952\times8=15616}$. per 55, 57.

67 $I=\frac{47520T+4320G+1539H+1377O}{15336=27\times568}$. per 66.

68 $I=\frac{1760T+160G+57H+51O}{568}$. per 67.

69 $O=\frac{54720T+4512G+2457H+5640I+75O}{183\times136=24888}$. per 59, 57.

70 $O=\frac{54720T+4512G+2457H+5640I}{24813=3\times8271}$. per 69.

71 $O=\frac{18240T+1504G+819H+1880I}{8271=3\times2757}$. per 70.

72 $G=\frac{13799040T+46624G+529920H+1977152I}{480\times8271=3970080}$. per 62, 71.

73 $G=\frac{13799040T+529920H+1977152I}{3923456=64\times61304}$. per 72.

74 $G=\frac{215610T+8280H+30893I}{61304}$. per 73.

75 $H=\frac{6917568T+664192G+25389H+565568I}{969\times2757=2671533}$. per 65, 71.

76 $H=\frac{6917568T+664192G+565568I}{2646144=64\times41346}$. per 75. Fig. 243.

77 $H=\frac{108087T+10378G+8837I}{41346}$. per 76.

78 $I=\frac{15487200T+1400064G+513216H+95880I}{568\times8271=4597928}$. per 68, 71.

79 $I=\frac{15487200T+1400064G+513216H}{4602048=96\times47938}$. per 78.

80 $I=\frac{161325T+14584G+5346H}{47938}$. per 79.

81 $G=\frac{9809571420T+859298040G+1350472338I}{61304\times41346=2534675184}$. per 74, 77.

82 $G=\frac{9809571420T+1350472338I}{2448745344=162\times919\times16448}$. per 81.

83 $G=\frac{65890T+9071I}{16448}$. per 82.

84 $I=\frac{7247976552T+658470852G+472426021I}{47938\times41346=1982044548}$. per 80, 77.

85 $I=\frac{7247976552T+658470852G}{1934801946=18\times919\times116963}$. per 84.

86 $I=\frac{438156T+39806G}{116963}$. per 85.

87 $I=\frac{9829607228T+361080226I}{116963\times16448=1923807424}$. per 86, 83.

88 $I=\frac{9829607228T}{1562727198=4594\times340167}$. per 87. Hoc est, ordine Alphabetico.

89 $I=\frac{2139662}{340167}T$. per 88.

90 $G=\frac{2542709}{340167}T$. per 83, 89.

91 $C=\frac{2578443\frac{1}{2}}{340167}T$. per 3, 89, 90.

92 $D=\frac{2444094\frac{1}{2}}{340167}T$. per 4, 89, 90.

$A=9\frac{27191}{340167}T$.

$B=8\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$C=7\frac{197274\frac{1}{2}}{340167}T$.

$D=7\frac{62925\frac{1}{2}}{340167}T$.

	93	$B = \frac{2918610\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 27, 91.	$E = 8\frac{209186}{340167}T.$
Fig. 243.	94	$A = \frac{3088694}{340167}T.$	per 26, 91.	$F = 8\frac{51014}{340167}T.$
	95	$E = \frac{2930522}{340167}T.$	per 5, 92, 93.	$G = 7\frac{161540}{340167}T.$
	96	$F = \frac{2772350}{340167}T.$	per 6, 92, 93.	$H = 5\frac{283977\frac{1}{2}}{340167}T.$
	97	$H = \frac{1984812\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 77, 89, 90.	$I = 6\frac{98660}{340167}T.$
	98	$O = \frac{1895418\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 71, 89, 90, 97.	$K = 4\frac{329646\frac{1}{2}}{340167}T.$
	99	$K = \frac{1690314\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 57, 89, 90, 97, 98.	$L = 3\frac{236331\frac{1}{2}}{340167}T.$
	100	$V = \frac{2056730}{340167}T.$	per 19, 97, 99.	$M = 3\frac{181326\frac{1}{2}}{340167}T.$
	101	$U = \frac{1958564}{340167}T.$	per 20, 97, 99.	$N = 7\frac{37757}{340167}T.$
	102	$W = \frac{1141704}{340167}T.$	per 21, 100.	$O = 5\frac{194583\frac{1}{2}}{340167}T.$
	103	$Y = \frac{1092671}{340167}T.$	per 23, 101.	$P = 3\frac{50382\frac{1}{2}}{340167}T.$
	104	$Q = \frac{879012\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 40, 97, 98, 99.	$Q = 2\frac{198678\frac{1}{2}}{340167}T.$
	105	$R = \frac{1726700}{340167}T.$	per 17, 98, 104.	$R = 5\frac{25865}{340167}T.$
	106	$S = \frac{1387898}{340167}T.$	per 18, 98, 104.	$S = 4\frac{27230}{340167}T.$
	107	$X = \frac{976739}{340167}T.$	per 22, 105.	$V = 6\frac{15728}{340167}T.$
	108	$\& = \frac{807338}{340167}T.$	per 25, 106.	$U = 5\frac{257729}{340167}T.$
	109	$Z = \frac{517058}{340167}T.$	per 24, 108.	$W = 3\frac{121253}{340167}T.$
	110	$I = \frac{1256832\frac{1}{2}}{340167}T.$	per 11, 102, 107.	$X = 2\frac{296405}{340167}T.$

111 M=

111 $M = \frac{1201827\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 12, 102, 107.

112 $N = \frac{2418926}{340167}$ T. per 13, 96, 111.

113 $P = \frac{1070883\frac{1}{2}}{340167}$ T. per 15, 103, 109.

$Y = 3\frac{72170}{340167}$ T. Fig. 243.

$Z = 1\frac{176891}{340167}$ T.

$\& = 2\frac{127004}{340167}$ T.

Onera Columnis seu Muris incumbentia, non erat necesse distincto calculo designare; utpote quæ eadem planè sunt quæ eorundem tignorum alteris capitibus conveniunt. Cum enim (verbi gratia) Tignum X R, non nisi in medio sui puncto R oneretur; sustinet utrumvis Fulcrum (tum quod est ad X, tum quod est in Muro,) tum semissem Tigni, tum semissem oneris in R impositi: per prop. 5. hujus.

Patet, ex hoc calculo, juncturas A, medio proximas, omnium maximè urgeri. Utpote quorum onus peculiare, est plusquam *Novem* Tignorum longiorum; (reliquorum verò, minora saltem quam novem:) Cui quidem adhuc addendum erit (per prop. 7. hujus) onus *Unius* tigni pro firmitate debitâ ne suo pondere rumpatur: Atque porro semissis oneris juncturæ B incumbentis, (per eandem prop. 7.) paulò plus quam *Quatuor* tignorum. Adeoque (computatis omnibus) firmitas ibidem requisita ne rumpatur tignum, plus quam æquipollet ponderi Tignorum *Quatuordecem:* Nempe $1 + 9\frac{27191}{340167} + 4\frac{394549}{1360668} = 14\frac{503313}{1360668}$: (tigni sui pondere computato.)

Cum itaque nulli dubium esse possit, quin Tigna, etiam satis longa, tantæ firmitudinis esse possint, ut valeant Onus longè gravius in eodem sui puncto sustinere quam est Quatuordecuplum sui ponderis: Neque poterit esse dubium, quin hujusmodi Contignatio tutò possit usui accommodari.

Alia Constructionis Forma.

Aliam formam exhibet, Fig. 248. Quæ à præcedente in hoc differt, quòd quæ illic duorum Tignorum Capita Tigno tertio incumbunt, ejusdem duobus distinctis punctis applicantur (quibus trifariam secatur tignum;) ipsáque Tigna sic suffulta ad easdem partes jacent: Fig. 248.

 Hic,

Hic, ad idem ſubjecti Tigni punctum medium applicantur utraque; ſed ad contrarias partes.

Fig. 249. Tignorum Faciem Lateralem exhibet fig. 249. Facies ſuperna, in ipſa fig. 248. ſatis apparet. Sunt autem omnia longitudine invicem æqualia, atque inter ſe ſimilia.

Fig. 248. Poteſt autem hæc, ut præcedens, plus minuſve continuari prout opus videbitur; atque materiæ conditio ferre poterit. Quippe hic etiam, prout, protractâ areâ, augetur trabium multitudo; ſic & augetur Pondus.

Habet autem hæc forma, præ præcedente, hoc incommodum; quod, propter utrumque ponderum incumbentium eidem ſubſtrati tigni puncto applicatum, hoc fortiùs premitur, (utpote quod ſuſtinet utrumque onus integrum; cum, in formâ præcedente, punctum idem ſuſtinuerit onus alterum integrum, alterum dimidium;) ſed & propterea etiam eodem loci plus excavandum erit tignum ſuſtinens, quo admittantur utriuſque incumbentium capita. Quod quadantenus fortè compenſari videatur, propter tigna incumbentia ad contrarias partes poſita; quæ, in præcedente forma, jacebant ad eaſdem partes utraque: Quamquam & hoc non multum interſit; præſertim ſi incumbentium tignorum capita, non ad ſubjecti mediam tantum latitudinem, ſed uſque ad remotiorem marginem, aut etiam ultra, extendantur; quod pro Architecti arbitrio vel fieri poteſt, vel non fieri.

Sed neque admodum metuendum erit illud incommodum; nam, eo non obſtante, ſatis valere poterunt tigna oneri ſuſtinendo; prout ex ſubjecto calculo patebit.

Fig. 243. Aſpectum quod attinet; præcedens fortè gratior videbitur: tum propter tigna ſic diſpoſita ut totius operis textura ſit oculo magis conſpicua, (quæ in poſteriore forma vix aut ne vix obſervabitur;) tum propter intervalla, ibidem, uniformi difformitate variata; quæ, hic, ſunt quadrata omnia.

Calculus, iiſdem principiis nititur in hac formâ atque in præcedente: Sed expeditior hic eſt, propter tigna omnia ejuſdem longitudinis, eadémque in uno tantum puncto medio onerata, pluráque puncta æqualibus oneribus preſſa: Quæ omnia conducunt ad reddendum calculum expeditiorem.

Calculus huic constructioni accommodus.

Ad calculum hic expeditiùs inſtituendum, notandum erit; non tantum ea puncta (ſive bina, ſive quaterna,) quæ ſunt reſpectu totius

Schematis similiter sita (& propterea æqualiter onerata) eodem symbolo designari; (quod in calculo præcedente factum erat:) Sed etiam, propter tigna singula in medio tantum sui puncto onerata, utraque ejusdem tigni capita æquali onere subjecta fulcra gravare, (per prop. 5. hujus;) quæ itaque analogis symbolis designavimus, onera invicem æqualia indicantibus. Cætera quæ de præcedente Calculo dicta sunt, etiam hic (prout opus erit) locum habent.

Calculi Synopsis.

1 $A = \alpha = \frac{1}{2}T + B$.
2 $B = \beta = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}K + \frac{1}{2}F$.
3 $C = \frac{1}{2}T + A$
4 $D = \delta = \frac{1}{2}T + L$.
5 $E = \varepsilon = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}R$.
6 $F = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}G$.
7 $G = \gamma = \frac{1}{2}T + E$.
8 $H = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}D$.
9 $I = \iota = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}N$.
10 $K = \kappa = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}I$.
11 $L = \lambda = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\kappa$.
12 $M = \mu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}P$.
13 $N = \nu = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}M$.
14 $P = \pi = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\iota$.
15 $Q = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\gamma$.
16 $R = \varrho = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}Q$.
Per prop. 5 vel 7 hujus Cap.
17 $C = T + B$. per 3, 1.
18 $D = T + \frac{1}{2}\kappa$. per 4, 11.
19 $F = \frac{5}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}E$. per 6, 7, 17.
20 $H = \frac{5}{4}T + \frac{1}{2}B + \frac{1}{4}\kappa$. per 8, 1, 18.
21 $M = \frac{3}{4}T + \frac{1}{4}\iota$. per 12, 14.
22 $N = T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{4}P$. per 13, 11, 12.
23 $N = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}\kappa + \frac{1}{8}\iota$. per 22, 14.
24 $Q = \frac{3}{4}T + \frac{1}{2}E$. per 15, 7.
25 $R = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}E + \frac{1}{4}\iota$. per 16, 14, 24.
26 $B = \frac{9}{8}T + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}E + \frac{1}{2}K$. per 2, 19.
27 $B = \frac{9T + 2E + 4K}{6}$. per 26.
28 $E = \frac{29}{16}T + \frac{7}{24}E + \frac{1}{8}I + \frac{1}{3}K$. per 5, 25, 27.

29 $E=\frac{87T+6I+16K}{34}$. per 28.

30 $H=2T+\frac{1}{6}E+\frac{7}{12}K$. per 20, 27.

Fig. 248.

31 $I=\frac{17}{16}T+\frac{1}{2}\iota+\frac{1}{16}I+\frac{1}{8}\kappa$. per 9, 23.

32 $I=\frac{17T+8\iota+2\kappa}{15}$. per 31.

33 $K=\frac{11}{15}T+\frac{7}{20}E+\frac{43}{120}K$. per 10, 30, 32.

34 $K=\frac{248T+42E}{77}$. per 33.

35 $I=\frac{361T+140E}{3\times 77=231}$. per 32, 34.

36 $E=\frac{11389T+952E}{34\times 77=2618}$. per 29, 34.

37 $E=\frac{1627T+136E}{34\times 11=374}$. per 36.

38 $E=\frac{1627}{238}T$. per 37.

39 $G=\frac{1746}{238}T$. per 7, 38.

40 $Q=\frac{992}{238}T$. per 15, 39.

41 $K=\frac{1654}{238}T$. per 34, 38.

42 $L=\frac{946}{238}T$. per 11, 41.

43 $D=\frac{1065}{238}T$. per 4, 42.

44 $B=\frac{2002}{238}T$. per 27, 38, 41.

45 $A=\frac{2121}{238}T$. per 1, 44.

46 $C=\frac{2240}{238}T$. per 3, 45.

47 $F=\frac{2112}{238}T$. per 6, 39, 46.

48 $H=\frac{1712}{238}T$. per 8, 43, 45.

49 $I=\frac{1318}{238}T$. per 32, 38, 41.

50 $P=\frac{798}{238}T$. per 14, 49.

51 $M=\frac{518}{238}T$. per 12, 50.

52 $N=\frac{851}{238}T$. per 13, 42, 51.

53 $R=\frac{1014}{238}T$. per 16, 40, 50.

Hoc est.

$A=8\frac{217}{238}T$.
$B=8\frac{98}{238}T$.
$C=9\frac{98}{238}T$.
$D=4\frac{113}{238}T$.
$E=6\frac{199}{238}T$.
$F=8\frac{208}{238}T$.
$G=7\frac{80}{238}T$.
$H=7\frac{46}{238}T$.
$I=5\frac{168}{238}T$.
$K=6\frac{226}{238}T$.
$L=3\frac{232}{238}T$.
$M=2\frac{42}{238}T$.
$N=3\frac{117}{238}T$.
$P=3\frac{84}{238}T$.
$Q=4\frac{40}{238}T$.
$R=4\frac{62}{238}T$.

Patet, ex hoc calculo; Ponderum singularium maximum esse $A = 8\frac{217}{238}T$. Cum itaque eidem puncto (tigni C C medio) incumbant duo A, (utrinque unum,) hoc est $17\frac{196}{238}T$; idemque porro (ne pondere tigni sui rumpatur) Uno adhuc tigno onerari censendum sit, (per prop. 7. hujus Cap.) Firmitas ibidem requisita, (ne rumpatur tignum) æquipollet ponderi Tignorum $8\frac{217}{238} + 8\frac{217}{238} + 1 = 18\frac{126}{238} = 18\frac{14}{17}$.

Quod quidem Onus non tantum est ut propterea metuamus ne non ferendo sufficiat tignorum robur: Quippe tigna, etiam satis longa, multò gravius onus sustinere valebunt quam est *Octodecuplum*, seu *Novendecuplum* sui ponderis.

Est autem gravius quam onus maximum formæ præcedentis; utpote quod ad *Quindecuplum* ponderis unius tigni non pertigisse, supra deprehensum est.

Paucioribus interim Tignis in hac forma res absolvitur, (utut areæ hujus latitudo intra muros, duodecima sui parte superet latitudinem illius, eâdem manente longissimi tigni longitudine:) Quippe hic adhibentur tigna omnino 49 æqualia; illic verò, ex longioribus 40, et brevioribus 20.

Constructiones adhuc aliæ plures.

Tertia constructionis forma, quam exhibet fig. 250. in hoc potissimum à Primâ differt, quod quæ diversis ejusdem subjacentis tigni punctis sustinentur tigna incumbentia; sint, illic, ad easdem partes posita; hic, ad contrarias. Fig. 250.

A Secundâ verò, in hoc potissimum differt, quod, quæ ad contrarias partes subjecti tigni jacent tigna incumbentia, applicentur illic ad idem subjecti tigni punctum medium; hic verò, ad diversa puncta, quibus tigni longitudo trifariam secatur.

Quarta, Quinta, & Sexta, similiter ex figura trilatera fig. 247. derivantur; ut, ex quadrilatera fig. 246. derivantur prima, secunda, & tertia.

Forma Quarta, quam exhibet fig. 251. est analoga Tertiæ; mutatis Quadratis (propter angulos non rectos) in Triangula & Hexagona. Fig. 251.

Forma Quinta, quam exhibet fig. 252. est magis analoga primæ; propter duo tigna incumbentia, ad easdem partes tigni sustinentis posita: In hoc autem cum secunda convenit, quòd ad idem sustinentis punctum medium, applicentur utraque. Fig. 252.

Forma Sexta, quam exhibet fig. 253. est Secundæ plane analoga; propter incumbentium ad contrarias partes tignorum capita, eodem Fig. 253.

subjecti

subjecti tigni puncto medio suffulta: Atque in hoc potissimum à Quartâ differt; quod, hic, ad idem sustinentis punctum applicantur utraque; illic, ad diversa In Schemate autem, necesse habui tignorum capita amputare, paulò citra tigni sustinentis puncta media, (quibus suffulcienda intelliguntur:) Quippe aliàs, coeuntibus ad idem punctum tignis contrariis, una fieret continua recta, nec ad oculum pateret tigni sustinentis ab incumbentibus distinctio, nisi vellem in majori forma Schema dilineare (ut in fig. 248 factum est) quo possint tignorum oppositorum capita sustinentis medio disterminari.

Possunt autem hæ Formæ (sicut præcedentes) plus minusve continuari, prout opus erit, atque expedire videbitur.

Possuntque, quæ singulis incumbunt juncturis onera sustinenda, similiter ad calculum revocari, ut ad formam primam & secundam factum est.

Sed & aliis mille modis possunt hæc omnia vaiari, prout vel conditio loci, vel scopus Architecti postulaverit. Nobis, hæc pauca sufficiat exhibuisse specimina.

CAP.



CAP. VII.

De Axe in Peritrochio, & Machinis cognatis.

Definitiones.

Def. I.

Axem in Peritrochio *vocant Machinam, seu Instrumentum Mechanicum, ponderibus levandis aptum; in quo Cylindrus (quem* Axem *vocant,) Fulcris per extrema sustinetur, circumpositum habens Tympanum, (quod* Peritrochium *vocant,) in cujus ambitu, foraminibus ad id factis, infiguntur* Scytalæ; *quibus applicata Vis, Peritrochium unà cum Axe vertit, cui convoluti Funes Onus elevant.* Fig. 254.

C*Ylindrus* (κύλινδρος) à κυλίνδω seu κυλινδέω dicitur, (atque hoc à κυλίω *volvo*,) ob formam teretem, aptè volubilem: quam autem in Geometriâ figuram sic appellant, notum est.

Cylindri autem, saltem qui pro magnitudine breves sunt, (in Mechanicis præsertim) etiam *Tympana* (τύμπανα) dici solent: ob similitudinem, credo, Instrumentorum pulsatilium sic dictorum, quæ & etiamnum in usu sunt. Ea verò sive à τύπτω sic dicantur (unde Scholiastes Aristophanis τύμπανον deducit, cùm pro *fuste* sumitur quo quis verberetur;) seu potiùs ab Hebræo תוף (quod tantundem significat) non disputo. Certè à Syrorum תופים, Græcorum τύμπανα originem traxisse, non videtur ambigendum; quæ Romanis postea aliisque gentibus in usum venerunt. Neque satis convenit inter interpretes num illud ἐτυμπανίσθησαν Hebr. c. 11. innuat quòd *fustigati* fuerint

feu

Fig. 254. ſeu *fuſtibus caſi*, an quod fuerint quaſi in equuleo *torti* atque *extenſi*, haud ſecus atque Membranæ Tympanorum capitibus impoſitæ.

Cylindrum autem (in Mechanico hoc Inſtrumento) minorem, ſed & longiorem, *Axem* (ἄξονα) appellant. *Axis* autem ſeu ἄξων, ab ἄγω, ἄξω, videtur deveniſſe; utpote circa quem *agatur* Rota. Quippe de rotarum axe vox ea primâ ſignificatione dicitur; atque inde ad Circulorum, Sphærarum, aliorúmque Solidorum Axes transfertur.

Tympanum vero ſive Cylindrum majorem, ſed & breviorem, *Peritrochium* (περιτρόχιον) vocant; (quod quin à τρόχος *rota*, atque hoc à τρέχω *curro* dicatur, non eſt ambigendum;) quòd Rotarum inſtar circa Axem (περιτρέχει) circumcurrit: cum eo tamen diſcrimine, quod curruum Rotæ circa manentem Axem (hoc eſt, non converſum,) convertuntur; hoc autem Peritrochium unà ſecum & Axem ſuum volvit.

Et quidem Axem hunc, utut alibi tornatum, eâ tamen parte quâ Peritrochio infigitur, quadratum relictum vult Pappus, (aptatum ſimili in Peritrochio Foramini quadrato,) quò Peritrochio firmiùs jungatur, certiúſque cum eo converſo convertatur.

Axis autem Extrema, (quæ & axis *Capita* dicuntur, aut etiam *Poli*,) in foramina (τρύματα) immoti Pegmatis quo ſuſtinentur immiſſa, circumpoſitis axique fixis munimentis æneis armari jubet quas *Chœnicidas* (χοινικίδας) vocat, (dicitur autem χοινικίς à χοῖνιξ, ab formæ, ut videtur, ſimilitudinem; atque in eodem ſenſu uſurpatur χοίνιξ:) Sed &, in pegmatis foraminibus, eiſdem Chœnicidibus ſubjectos vult τρίβεις æneos, ſic enim eſt in codicibus græcis; Commandini verſio τρύβεις habet; quod a τρίβω *tero*, dictum videtur: In eum verò finem utraque, tum ut Axium extrema in Foraminibus expeditiùs vertantur, tum ut minus terantur utraque.

Idem verò, ubi *Gloſſocomum* deſcribit, pro Axium extremis, habet *Digitos* æneos *Pyxidibus* æneis acceptos, Δακτύλους dicit ob formæ ſimilitudinem; & πυξίδας ſimiliter. Utut enim πυξὶς à πύξος dicatur, quoniam primitùs è *buxo*, ut videtur, fiebant *pyxides*; poſtea tamen non ex quovis ligno tantùm ſed ex quavis materia cùm fierent, idem tamen nomen retentum eſt.

Eoſdem idem ibidem etiam *Tormos* τόρμους videtur appellare: quod ſive à τείρω *tero* dicatur, (quòd verſando teratur) ſive à τερέω vel τορέω *terebro*, *perforo*, perinde eſt; ſive etiam cognatæ ſignificationis ſint τόρμος, τέρμα, τέρμις, τέρμων, & *terminus*. Vitruvius, *Cnodacas* appellat; Hero, κνώδακας; ut ejuſdem forte originis ſint κνώδαξ,

&

& κνώδων, *mucro* ſeu *cuſpis gladii*, quod à καίνω & ὀδοὺς dictum volunt.

Hi autem ſive δάκτυλοι, ſive τόρμοι, ſive κνώδακες dicantur; non tam videntur fuiſſe continuati axis (qui ligneus eſſe ſolebat) partes, in minorem formam tornatæ; quàm Clavi ferrei vel ænei ibidem impacti, adacti, aut etiam implumbati; quò fortiùs axem ſuſtinerent quam ſi lignea eſſent hæc axis Capita. Quare & *ſubſcudes* quædam ſeu *ſubſcudicula* rotundæ dicuntur eſſe. *Subſcus* autem à *ſuccudendo* dici perhibetur; quòd quaſi *cudendo*, mallei ictibus percuſſa, immittatur.

Scytalæ (σκυτάλαι) dicuntur, Fuſtes ſeu Baculi teretes, qui pro Manubriis ſunt, in foramina in Peritrochii ambitu facta immiſſi fixíque. Α αὐτὸς (*corium*) σκυτάλην dictum volunt; eo præſertim ſignificatu quo *Flagrum coriaceum* ſeu *ſcuticam* ſignificat. Sed & *clavam corio obductam* ſignificare volunt; (atque, hinc, ſimpliciter *clavam* vel *fuſtem*.) Et quidem fieri poteſt, ut hæc manubria non rarò fuerint corio obducta (quò tractantium manus minimè læderentur,) indéque *Scytalæ* dicta. Sed (quicquid ſit de orgine ſeu cauſa nominis) *Scytale* vox pro *baculo* ſeu *ligno tereti* paſſim adhibetur. Atque hinc Lacedæmoniorum *Scytale*, (à multis paſſim ſcriptoribus memorata,) modum innuit oculte ſcribendi. Quippe Segmentis Membranæ (quod quaſi Corii genus eſt) bacillo tereti circumpoſitis, ſive Spirali forma circumvolutis, Epiſtolam inſcribebant: quibus inde ſolutis confuſæ literæ non legerentur niſi baculo ſimili ſimiliter circundarentur.

Quæ autem Pappo σκυτάλαι, Ariſtoteli (in quæſtionibus Mechanicis) κόλλοπες vocantur. Habétque & hæc vox, neſcio quo pacto, cum Corio connexionem. Quippe κόλλοψ primâ ſignificatione Corium durius ſignificat, quod in boum cervicibus & dorſis eſt; quod ita dictum volunt quòd ex eo cocto fiebat κόλλα *gluten*. Hinc & Citharæ *verticilla*, quibus chordæ intenduntur, κόλλοπας dici volunt, *ex materiâ quâ fiebant:* niſi potiùs dicendum ſit, *quâ tegebantur*. Hoc utique putaverim potiùs; quippe corium utcunque durum & calloſum, non tantæ firmitatis eſt ut ex eo fiant hæc verticilla; quæ lignea ſaltem eſſe debent, aut ſi mavis metallina. Sed tum hæc Verticilla tum illa Manubria corio tecta fuiſſe nihil impedit; atque inde tum κόλλοπας dici, tum & σκυτάλας.

Dum verò *Collopas* appellat Ariſtoteles hæc manubria; idem σκυτάλας vocat inſtrumenta quædam alia; Qualia ſcilicet nos exhibemus fig. 260. item, qualia innuit figura 258, R, S, oneribus trahendis ſuppoſita,

quo minùs in subjectam terram offensent; eáque vel rotulis quasi capitibus affixis, vel etiam sine his. Cum enim *Scytala* pro *ligno tereti* habebatur, mox ea pluribus instrumentis ex ligno Cylindraceo factis accommodata est.

Funes σχοινία, quæ Axi circumposita etiam ad Onus sublevandum (φορτίον dictum) annexa erant, ὅπλα appellat Pappus; hoc est *Arma*; (pro quo in Commandini versione, errore credo Typographi, *Arna* legitur: quod quid sit, nonnullis forsan facessat negotium.) Sic enim & Rudentes seu funes nautici majusculi ὅπλα dicebantur; &, Latinè, *navis Armamenta.* Quæ & *Sparta* σπάρτα dicebantur; hoc est, ut quibusdam videtur *Sata*; (tanquam à σπείρω, pro *sero, sevi*;) quia ex *cannabe* aliisque rebus sativis fiebant: malim à σπείρω *necto*, hoc est, *sero, serui.* Nam, ut σπείρω, sic *sero* (quod inde factum videtur) utrumque significatum habet; sed in altero est *sevi, satum*, ubi pro *semino* usurpatur; in altero, *serui, sertum*, ubi pro *jungo*, aut *necto*, dicitur; (quâ significatione etiam ab εἴρω *necto* dici poterit; ut & *sermo, series*, &c. & quidem *serere sermones*, fortassis ab ἔρω dico.) Idémque & in compositis videre est; quia ab *insero*, pro diversâ significatione, dicitur *insitus*, & *insertus*; à *consero, consitus*, & *consertus*; à *dissero, dissitus*, & *disertus*; à *desero, desitus*, & *desertus*; ab *assero, assitus*, & *assertus*; ab *exero, exertus*; (sed *exitus*, potiùs ab *exeo.*) *Funis* autem seu *spartum* in hoc & hujusmodi instrumentis, dicitur & *Funis tractorius*, & *Funis ductarius.*

II.

Fig. 256. *Axem cum Scytalis, sed sine Peritrochio*, Suculam *vocant.*

SUculam, sive *Succulam*, (nam utroque modo scribitur,) dici volunt, ob *Suis* nescio quam (volutando forsan) similitudinem. Græcis, ob *Asini* potiùs (in ferendis oneribus) similitudinem, ὄνος, ὀνίσκος, ὄνιος, appellatur. Scytalas autem vel ad alteram vel ad utrumque extremum, pro arbitrio, habere poterit.

Fig. 257. Neque huic absimile est *Jugum* textorum (ζυγός) de quo Aristoteles in Mechanicis quæstionibus, aliique ad illum, scribunt.

III.

Suculam erectam, Ergatam *vocant.*

Fig. 258. SI nomen spectemus, *Machinam Operariam* dixeris; (est utique ἐργάτης *operarius*, ab ἐργάζω:) sed huic speciatim Organo nomen impofuit

impofuit ufus. In quo erecta Sucula, vectibus quaternis, (feu, quod eundem eft, duobus transverfim pofitis & utrinque extantibus,) vel etiam pluribus, converti folet ; atque ponderibus Attrahendis, (potius quàm elevandis aut attollendis,) adhiberi.

IV.

Huc referenda erunt ejufmodi alia Inftrumenta innumera ; ex Cylindris feu Tympanis confecta (feu quæ horum inftar funt,) eifque vel Dentatis vel non-Dentatis ; & quidem utcunque multiplicatis : idque five circa eundem motûs axem rotentur, five circa diverfos. Talia funt Terebra, Tympanum manubrio inftructum, Tympanum cum axe, *aut etiam hujufmodi plura invicem commiffa, (ut in Automatis fieri folet,)* Geranium, *aliaque multa, quæ vel ex figuris fatis intelligantur, vel quæ Lector ex fuo penu huc referre poffit.* Fig. 259, 260, 261, 262, 263.

ET quidem *Terebra* feu *Terebrum* ; à *Tero* dictum, (ut Græcorum τέρετρον à τερέω *perforo*, atque hoc à τείρω *tero*,) vel à Græco τρῆτρον immediatè ; vix aliud eft quàm vel *Sucula* vel *Ergata* cum *Scytalis binis* ; cujus ope acies quâ fecat premitur feu protruditur. Fig. 259.

Tympanum manubrio inftructum, eft inftar *Suculæ* cum unicâ *Scytalâ*. Fig. 260.

Tympanum cum Axe, eft *Axis in Peritrochio* fed fine *Scytalis* : (faltem nifi, in *Tympanis dentatis*, ipfi Dentes fint pro Scytalis :) fed & hujufmodi plura invicem committi folent ; quò Vis Vi addatur. Fig. 261.

Geranium appello, Inftrumentum illud cujus in Navigiis onerandis & exonerandis (atque Oneribus aliàs fublevandis) frequens eft ufus ; (ubi Rotâ magnâ, ab hominibus calcatâ, porrigitur longa Cervix, unde ad Onus demittitur Tractorius Funis.) Noftrates vocant à *Grue*, (Gruem ;) cui refpondent Machinæ Græca nomina *γέρανος*, *γεράνιον* ; &, Latinorum, *Grus*. Fig. 262.

Sed & vulgaris Ferrei *Mallei* ufus, evellendis Clavis adhibiti, poteft & huc referri. Aliáque iftiufmodi plurima. Fig. 263.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Fig. 254, In Axe cum Peritrochio, (& cognatis Potentiis, quibus
255, eadem est ratio,) ut est Perimeter Axis, cui applicatur
256, Pondus movendum; ad Perimetrum Orbis Extimi, cui
257, applicatur Vis Motrix; (seu illius Diameter vel Semi-
258, diameter, ad Diametrum vel Semidiametrum hujus:)
259, sic, vice versâ, Vis æquipollens, ad Pondus Moven-
260, dum. Quæ itaque vel tantillum aucta movebit; aut
261, etiam, si tantillum minuatur Pondus: Secùs; non mo-
262, vebit: Et, si adhuc minor sit, vel Pondus augeatur; ne
263. sustinebit quidem.

PRopositionem sic universaliter conceptam, eâdem operâ pluribus Machinis seu (ut dici solent) Potentiis accommodandam censui (cùm in omnibus eadem sit ratio;) potiùs quàm ut eadem de singulis toties repetantur.

Solent autem plerique omnes Mechanicorum scriptores Potentiam hanc ad Vectem reducere, (de quo in superiore Capite dictum est:) Neque id incommode. Quippe si C Centrum seu Axis Motûs pro Fulcro seu Hypomochlio habeatur; rectæque C A, C B pro Distantiis punctorum applicationis, Virium & Ponderis, ad eandem rectam ceu Vectem A C B: Eadem omnia quæ de Vecte superiùs demonstrantur, etiam hic locum habebunt. Est utique hoc Organon tantundem atque Vectis continuus, seu alius atque alius continuo ordine subinde succedentes. Quippe ut, vertente Machinâ, (fig. 254, 255.) aliud atque aliud erit Perimetri axis punctum B cui applicatur Pondus; similiter alius atque alius succedit Vectis A C B, cujus reliquo extremo applicetur Vis motrix. Si verò non quidem ad ipsum A punctum oppositum applicetur Vis, sed ad aliud quodvis extimi Orbis Punctum,

ut

αa: si tamen ad hoc punctum quodvis sic applicetur Vis ut linea directionis suæ, ut αV, sit secundum Tangentem hujus Orbis; res eodem planè recidit, per ea quæ de Librâ Demonstravimus, ad prop. 14. Cap. 3. Si autem non secundum rectam quæ Orbem tangat, sed quamvis aliam, ut αv, applicetur Vis; eadem pro singulis respectivè casibus locum hic habebunt, quæ illic de Libra demonstrantur. Sive enim ad Libram referatur hæc potentia (quod mihi potius videtur) sive ad Vectem (qui & ipse Libra est,) eodem res recidit.

Verùm ego, ut rem ad prima principia revocem, malim ex prop. 5 & 6. Cap. 2. demonstrare; utpote quod universale principium est, ex quo omnium Machinarum vires æstimandæ sunt.

Si itaque intelligatur (quod hic supponimus) in unâ Machinæ conversione tantundem Elevari (seu contra propensionem suam moveri) Pondus appensum P, quantum tractorii funis illud est quod Axem semel ambiat, (quod itaque ipsius Ambitui æquale supponitur;) unaque tantundem Descendere (seu secundum propensionem suam procedere) Pondus contrarium seu Vim Motricem V, quantus est Extimi Orbis Ambitus cui vis hæc applicatur, (quod pariter intelligendum erit:) Manifestum est sic esse Descensum ad Ascensum, ut est Ambitus hic ad illum, seu ut hujus diameter vel semidiameter ad diametrum vel semidiametrum illius: putà ut *m* ad *n* seu mD ad nD. Si itaque ponatur (vice versâ) Pondus ad Vim Motricem, ut *n* ad *m*, seu ut nP ad mP: Erit Motûs illius Magnitudo ad Magnitudinem hujus, (utpote in ratione ex duabus illis rationibus composita, per prop. 5. Cap. 2.) adeoque & Momentum illius ad Momentum hujus (per prop. 7. Cap. 2.) ut $nP \times mD$ ad $mP \times nD$, seu ut $mnPD$ ad $mnPD$; nempe æquale.

$$\frac{nP \quad mD}{mnPD} = \frac{mP \quad nD}{mnPD}$$

Hoc est, Virium ut nP, Descensus (seu latio secundum directionem suam) ut mD, æquipollebit Ponderis ut mP Ascensui (seu lationi contra directionem suam) ut nD: Qui itaque cum sint contrarii, pro nullo simul vel Descensu vel Ascensu reputandi sunt; per prop. 6. Cap. 2. adeoque (per prop. 7. ejusdem.) Momentum in neutram partem præpollens; & Vires contrariæ se mutuò sustinebunt. Si verò vel Augeatur Vis Motrix, vel Minuatur Pondus; præpollebit Vis Motrix & Pondus elevabit: Sin contra; præpollebit Pondus, & Vis Motrix ne sustinendo par erit: per prop. 8, & 12. Cap. 1. Quæ erant demonstranda.

SCHO-

SCHOLIUM.

NOtandum hic, ſi ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione propoſitâ nonnihil recedendum eſſe. Nam Funis longitudo quæ unâ revolutione convolvitur aliquanto major eſt quàm axis ambitus: Tum quia, propter funis craſſitiem, extra Axis ambitum ſupereminet, (adeóque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præcisè circularem peripheriam efficit; ſed Spiralis circa Cylindrum converſionem, quæ circuli peripheriâ major eſt. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipſis earundem punctis extimis applicatur, ſed paulò citra extremum. Verùm hujuſmodi minutiæ in Mechanicis negligi ſolent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis; tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta eſt longitudo funis unâ converſione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis deſcriptus, quantus ab eo illarum puncto deſcribitur cui Vis cenſenda erit applicari. Hæc utique ſupponit Demonſtratio.

Notandum porro; Demonſtrationem hanc ſpectare potiſſimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeóque propter gravitatem ſuam agit ut Vis contraria; quæ itaque ut Pondus elevetur, ſuperanda erit à Vi motrice; & ſaltem æquanda, quo ſuſtineatur.

Si verò, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum ſit (in Plano Horizontali) non Elevandum; vel aliud obſtaculum amovendum ſit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebrâ ſcindendum erit, quo poſſit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus eſt;) conſiderandum erit hoc Pondus, vel Obſtaculum; non ut Vis contraria, (quippe ut non horſum ſuâ ſponte nititur quò trahitur, ſic neque ad partes contrarias,) ſed ſimpliciter ut *Impedimentum.* Quo caſu utut Vis major quàm quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obſtaculum movendum vel amoliendum: quò tamen ſuſtineatur (hoc eſt, impediatur ne feratur in oppoſitum,) nulla Vis requiritur; ſupponitur utique vel non aliorſum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde ſuſtineri (putà ſubjecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eò feratur. Alia ſiquidem habenda eſt ratio nudi *Impedimenti,* ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contrariæ,* ut in prop. 12. ejuſdem.

Si verò, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriuſque habenda erit ratio: Nam, præter amoliendum Impedimentum (ex ſcabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minúſve eſſe poteſt, prout magis vel aſperum vel glabrum ſit ſubjectum quo nititur fundamentum;) ſuperanda etiam eſt Vis contraria deorſum tendens; quæ aſcenſui non opponitur tantùm ſed contrariatur. Quæ quidem Vis contraria

contraria major minórve erit (eodem manente pondere) prout major minórve fuerit motûs acclivitas; secundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17, & alibi.

Et quidem illud ipsum Impedimentum quod quò Trahatur pondus superandum erit à Vi motrice; quò tamen sustineatur, (ne à Vi contrariâ in Oppositum moveatur,) Adjumento esse potest: Quippe eadem, verbi gratiâ, asperitas Terræ quæ impedit tractionem sursum, impediet etiam lapsum deorsum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Tractrici opponatur ut Impedimentum; Retentrici tamen ut Adjumentum associandum erit.

Si autem peragenda sit Tractio in plano (non, ut priùs, Acclivi, sed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; sed quæ superetur vis contraria, à Ponderis gravitate orta, nulla est: imò ea ipsa quæ in gravitate illâ est Vis Motrix deorsum, Impedimento illi contraria erit; illúdque magis minúsve minuit, prout major est aut minor declivitas; quæ & tanta esse poterit ut hæc ipsa Impedimentum superet, ut Vi Tractrice opus non sit. Utcunque; Vi Tractrici eousque adjumento erit, ut ei nihil ultra superandum relinquatur quàm id quo Impedimentum illud superat hoc ex Gravitate Momentum pro eâ plani declivitate.

Verùm hæc omnia sunt extra considerationem hujus Propositionis: quæ (cæteris ritè computatis prout ex suis quodque principiis æstimandum erit) hoc potissimum probatum it; Vim quamlibet in A directè applicatam, ad eandem directè applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet C A distantia ad distantiam C B, vel eo radio descripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio descriptam.

Dico autem *directè applicata*; (hoc est, secundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens sit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum est:) quippe si Obliquè applicetur; minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; secundum Obliquitatis leges Cap. 2. expositas. Nempe, Vis per $\alpha\, v$ obliquè applicata, ad eandem per α V tangentem directè applicatam, in eâ ratione valebit quam habet α V ad $\alpha\, v$; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per α a, ad Vim eandem per α V vel A V applicatam; valebit ut C a, ad C α vel C A; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* seu *Gruem* speciatim spectat. Ubi Vis motrix adhibita, hoc est, hominis calcantis pondus, non directè applicatur secundum Orbitæ tangentem, sed obliquè. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α, quàm si esset in A; Cùm enim agat hoc Pondus, Fig. 262.

propter

SCHOLIUM.

NOtandum hic, si ad Mathematicum rigorem res exigatur, à ratione propositâ nonnihil recedendum esse. Nam Funis longitudo quæ unâ revolutione convolvitur aliquanto major est quàm axis ambitus: Tum quia, propter funis crassitiem, extra Axis ambitum supereminet, (adeóque peripheriam majorem efficit;) Tum quia non præcisè circularem peripheriam efficit; sed Spiralis circa Cylindrum conversionem, quæ circuli peripheriâ major est. Item quæ Scytalis applicatur Vis, non in ipsis earundem punctis extimis applicatur, sed paulò citra extremum. Verùm hujusmodi minutiæ in Mechanicis negligi solent. Si autem ad Mathematicum rigorem exigere velis; tantus reputandus erit Axis Ambitus, quanta est longitudo funis unâ conversione convoluti: Atque tantus reputandus ambitus à Scytalis descriptus, quantus ab eo illarum puncto describitur cui Vis censenda erit applicari. Hæc utique supponit Demonstratio.

Notandum porro; Demonstrationem hanc spectare potissimum fig. 254, 255, &c. ubi Pondus dependet, adeóque propter gravitatem suam agit ut Vis contraria; quæ itaque ut Pondus elevetur, superanda erit à Vi motrice; & saltem æquanda, quo sustineatur.

Si verò, ut in fig. 258. Pondus humi jacens Trahendum sit (in Plano Horizontali) non Elevandum; vel aliud obstaculum amovendum sit; (ut fig. 259. ubi lignum Terebrâ scindendum erit, quo possit Terebra converti; & fig. 263. ubi clavus evellendus est;) considerandum erit hoc Pondus, vel Obstaculum, non ut *Vis contraria*, (quippe ut non horsum suâ sponte nititur quò trahitur, sic neque ad partes contrarias,) sed simpliciter ut *Impedimentum*. Quo casu utut Vis major quàm quæ æquipolleat requiratur ad Pondus illud vel Obstaculum movendum vel amoliendum: quò tamen sustineatur (hoc est, impediatur ne feratur in oppositum,) nulla Vis requiritur; supponitur utique vel non aliorsum niti, vel (quod tantundem hic erit) aliunde sustineri (putà subjecto pavimento, vel alio quovis modo,) ne eò feratur. Alia siquidem habenda est ratio nudi *Impedimenti*, ut in prop. 11. Cap. 1. alia *Vis contrariæ*, ut in prop. 12. ejusdem.

Si verò, ut in fig. 256. partim Trahatur, partim Elevetur; utriusque habenda erit ratio: Nam, præter amoliendum Impedimentum (ex scabritie terræ vel aliunde ortum quod majus minúsve esse potest, prout magis vel asperum vel glabrum sit subjectum quo nititur fundamentum;) superanda etiam est Vis contraria deorsum tendens; quæ ascensui non opponitur tantùm sed contrariatur. Quæ quidem Vis

contraria

contraria major minórve erit (eodem manente pondere) prout major minórve fuerit motûs acclivitas; secundum ea quæ Cap. 2. tradidimus, prop. 16, 17, & alibi.

Et quidem illud ipsum Impedimentum quod quò Trahatur pondus superandum erit à Vi motrice; quò tamen sustineatur, (ne à Vi contrariâ in Oppositum moveatur,) Adjumento esse potest: Quippe eadem, verbi gratiâ, asperitas Terræ quæ impedit tractionem sursum, impediet etiam lapsum deorsum in eodem obliquo plano; & quamquam Vi Tractrici opponatur ut Impedimentum; Retentrici tamen ut Adjumentum associandum erit.

Si autem peragenda sit Tractio in plano (non, ut priùs, Acclivi, sed) Declivi: Superandum & hic erit quod à Terræ Scabritie (vel aliunde) oritur impedimentum; sed quæ superetur vis contraria, a Ponderis gravitate orta, nulla est: imò ea ipsa quæ in gravitate illâ est Vis Motrix deorsum, Impedimento illi contraria erit; illúdque magis minúsve minuit, prout major est aut minor declivitas; quæ & tanta esse poterit ut hæc ipsa Impedimentum superet, ut Vi Tractrice opus non sit. Utcunque; Vi Tractrici eousque adjumento erit, ut ei nihil ultra superandum relinquatur quàm id quo Impedimentum illud superat hoc ex Gravitate Momentum pro eâ plani declivitate.

Verùm hæc omnia sunt extra considerationem hujus Propositionis: quæ (cæteris ritè computatis prout ex suis quodque principiis æstimandum erit) hoc potissimum probatum it; Vim quamlibet in A directè applicatam, ad eandem directè applicatam in B, eam Momenti rationem habere ad Pondus P movendum, quam habet C A distantia, ad distantiam C B, vel eo radio descripta Perimeter ad Perimetrum hoc radio descriptam.

Dico autem *directè applicata*; (hoc est, secundum rectam quæ ad Orbis ambitum in puncto applicationis Tangens sit; ut ad prop. 14. Cap. 3. explicatum est:) quippe si Obliquè applicetur; minuitur Vis pro ratione Obliquitatis; secundum Obliquitatis leges Cap. 2. expositas. Nempe, Vis per αv obliquè applicata, ad eandem per αV tangentem directè applicatam, in eâ ratione valebit quam habet αV ad αv; per prop. 14. Cap. 3. vel prop. 21, aut 25. Cap. 2. Et quidem, Vis per αa, ad Vim eandem per αV vel A V applicatam; valebit ut C a, ad C α vel C A; per prop. 13. Cap. 3.

Atque hoc, *Geranium* seu *Gruem* speciatim spectat. Ubi Vis motrix adhibita, hoc est, hominis calcantis pondus, non directè applicatur secundum Orbitæ tangentem, sed obliquè. Et propterea minus agit Pondus calcantis in α, quàm si esset in A; Cùm enim agat hoc Pondus, Fig. 262.

propter

propter gravitatem suam, secundum rectam quæ sit Horizonti perpendicularis; adeóque, si ad Horizontalis rectæ C A punctum A applicata foret, orbitam tangeret ea recta; atque æquipolleret calcantis Pondus Oneri in P, quod ad ipsum sit ut C A ad C B, per modò demonstrata: idem ad punctum α applicatum, minus valebit (ob causam jam dictam) quam si in A foret. Et quidem si foret α ipsi C directè subjectum, nihil omnino ageret ad convertendum Tympanum aut Pondus elevandum; sed eò plus agit quo propius ad A promovetur; atque in eâ quidem ratione quam jam ostendimus ex prop. 21. Cap. 2. & prop. 13. Cap. 3.

Dico etiam, in eâ ratione valere *ad Pondus* P *movendum:* quoniam ubi ad materiam Physicam perventum erit, nullum erit tam in omnibus expeditum Organum (utcunque affabrè detornatum fuerit, omnésque mobilium commissuræ ad glabritiem redactæ, & perfuso Oleo aliâsve adjutæ,) quin aliqua supererit scabrities, aliave inæqualitas, aut impedimentum, quod faciet ut Virium nonnihil impendendum fuerit ad ipsum Organum movendum; atque hoc, quantumcunque sit, summæ Virium in A applicatarum detrahendum erit, illúdque quod superest Virium reputandum erit adhibitum ad Pondus movendum quod ad B applicatur.

Quæque hic monemus, alibi prout opus fuerit intelligenda erunt.

Fig.263. Mallei verò usum illum quem innuit fig. 263. cur huc reducimus, ratio manifesta est: Quoniam, etiam hic, virtus in A adhibita, movet in circumferentiâ radio C A descriptâ (propter C Centrum motus,) B verò, unà cum Impedimento seu Obstaculo, (hoc est clavo evellendo,) in circumferentiâ descriptâ radio C B. (Adeoque quò propius sit B ad C, eò fortiùs aget vis eadem in A.) Atque idem dicendum erit de quovis alio organo consimili, ubi eadem ratio.

Si tamen Mallei usum illum (aliáque similia) ad Vectem referas (aut Libram etiam) cujus Centrum Motûs extra Vectem (Libráмve) sit: perinde est. Quam rem ad prop. 14. Cap. 3. consideravimus.

PROP.

PROP. II.

Datum Pondus, datâ Vi, Axe in Peritrochio (alióve quod hujus instar sit Organo) movere. Fig. 254, 255, &c.

Fiat, ut Pondus *P*, ad Vires *V*, sic (reciprocè) hujus distantia C A, ad C B: atque æquipollebunt in hoc situ Vis & Pondus, (utpote in distantiis reciprocè proportionalibus,) per præcedentem. Adeóque si distantia C A vel tantillum augeatur; auctum sic erit Virium Momentum, Ponderique præpollebit, illúdque movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Quod erat propositum.

SCHOLIUM.

Patet hinc; quò minor fuerit Axis ambitus cui applicatur Pondus, vel major ambitus Peritrochii extimus (seu quod hujus instar est) cui Vis Motrix applicatur, eò minori Vi movebitur Pondus.

Verum hic recordandum erit, præsertim vastis Ponderibus exigua Vi movendis, quod in Schol. prop. 18. Cap. 2. monuimus; nempe probè curandum esse, ut omnia, Vi & Ponderi intermedia, sint pro suis respectivè oneribus sustinendis satis firma: secùs, rumpetur ipsa Machina, ejúsve aliqua Armamenta, potiùs quàm efficiatur motus imperatus.

Item, quod ad prop. 28. Cap. 1. monuimus; nempe, motum hunc quò minori Vi peragatur, eò tardiorem fieri; adeóque defectum Virium Temporis impensi longitudine redimendum esse: Quod & in omnibus omnino Organis mechanicis locum habet. Adeóque, ubi Tempori parcendum erit, ut plus Virium addatur necesse est.

Denique; quoniam, ubi Virium & Ponderis magna est inæqualitas, haud commodè poterit quod in hujus Propositionis constructione Imperatum est ad praxin redigi unâ vice (pro Physicæ materiæ imperfectione;) ideo pluribus sive tympanis sive rotulis invicem commissis id præstant: De quo in sequenti propositione agitur.

PROP. III.

Si pluribus commissis Rotulis, aliisve Ponderis levandi mediis adhibitis, motus facilitetur: calculo nihilominùs constabit, quanta sit illa facilitatio.

Fig. 264. Esto, verbi gratiâ, Centro (seu motûs Axe) C, Tympanum seu Rota C A, cui in ambitu (ut moris est) Asserculi seu Pinnacidia affigantur; quibus impingens in A, Aqua currentis Fluvii, Rotam convertat. Sitque ad eundem motûs Axem C, Rota minor C B dentata; quæ ita cum priore conjuncta sit ut circa communem Axem junctim moveantur. Sitque C B ad C A, (verbi gratia,) ut *a* ad *b*, seu ut 1 ad 3: valebit igitur, (per prop. 1. hujus) Vis in A ad æqualem in B; ut *b* ad *a*, seu ut 3 ad 1. Adeóque *Uncia* in A, æquipollebit *Quadranti* (hoc est, tribus Unciis) in B.

Esto porro; Centro (seu motûs Axe) D, alia Rota D B; ita dentata, ut dentes sui aptè congruant dentibus rotæ C B; eisque sic implicentur ut earum ope convertatur rota D B circa Centrum suum seu Axem D. (Sic autem congruent, si in eâ sit ratione Numerus Dentium rotæ D B, ad Numerum Dentium rotæ C B; quâ est istius Ambitus, ad Ambitum hujus; seu ut Radius, ad Radium.) Sitque circa eundem motûs-Axem D, Rota minor seu Orbita D E; quæ cum D B junctim moveatur; habeátque sibi circumpositum Funem Tractorium E P, quo Pondus P trahatur. Sitque Radius D B ad D E, ut *c* ad *b*; puta ut 4 ad 1. valebit igitur Vis in B, ad æqualem in E (per prop. 1. hujus) ut *c* ad *b*, seu 4 ad 1. Adeóque *Quadrans* in B, æquipollebit *Assi* in E. At (per modò ostensa) *Uncia* in A, æquipollet *Quadranti* in B. Ergo, *Uncia* in A, æquipollebit *Assi* in E, aut etiam (per prop. 18. Cap. 2.) in P. Adeóque *Vis Uncialis* in A, sustinebit *Pondus Assis* in P; eadémque Vis, tantillum aucta, movebit.

Vel, universaliter; propter C A ad C B, ut *b* ad *a*; vis V in A tantundem valebit atque $\frac{b}{a}V$ in B: Item, propter D B ad D E, ut *c* ad *b*; vis $\frac{b}{a}V$ in B (seu V in A) tantundem valebit atque $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a}V$ $= \frac{c}{a}V$, in E. Hoc est, Vis in A, æquipollebit Ponderi in E vel P,

quod

quod ad illam sit in eâ ratione quæ componitur ex C A ad C B, & D B ad D E. Atque eodem modo procedendum erit quotcunque porro fuerint Rotæ invicem Commissæ.

Si verò Pondus illud non ex E directè dependeat, ut in P; sed, ut in Π, obliquo Plano F O incumbat: Pondus in Π, ad idem in P, in ea ratione po[illegible]bit quâ est F I (perpendicularis æque-alta) ad F O; puta ut [illegible] *d*, seu 3 ad 4; (per prop. 21, vel 25. Cap. 2.) Adeóque cum vis V in A, æquipolleat Ponderi $\frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{c}{a} V$ seu 12 V, in P; eadem æquipollebit Ponderi $\frac{d}{c} \times \frac{c}{b} \times \frac{b}{a} V = \frac{d}{a} V$, seu 16 V, in Π. Hoc est, Ponderi quod ad eum sit in ratione quæ componitur ex A C ad C B, & BD ad D E, & O F ad F I.

Atque ad eandem formam, mutatis mutandis, in aliis casibus Calculo æstimanda est Vis in A, quæ Ponderi in P vel Π æquipolleat; (quæ utique, tantillum aucta, Pondus movebit.) Quod faciendum erat.

SCHOLIUM.

§ 1. AD hanc formam de quibusvis Machinis, ex Tympanis dentatis confectis, fiet judicium; qualia sunt varia Automatum genera, aliáque instrumenta in usum passim adhibita. Et speciatim *Glossocomum* illud quod ex Heronis Alexandrini *Barulco* describit Pappus, Collectionum lib. 8. prop. 10. Et quæ sunt istiusmodi.

2. Hanc autem de *Rotulis* doctrinam priusquam dimittam; locus hic haud incommodus erit alias adhuc de Rotis speculationes subjungere; quæ quamquam hujus loci directè non sint, huc tamen quadantenus spectare non immeritò videantur.

3. Observatum est in usu communi (quod & Aristoteles attigit in Mechanicis Quæst. 9.) *majores Rotas, Cylindros, Tympana, Sphæras, &c. facilius moveri quam Minores.* Quod utut per omnia verum non sit (limitatione utique opus erit;) ritè tamen intellectum, concedi potest. Quippe, dummodo idem sit utrobique Pondus, (id utique manifestò interponendum erit) id non rarò videmus in Curruum Rotis, in Cylindris Sphærísve humi volutis, in Trochlearum Orbiculis, aliísque contingere. Saltem si & Axium siqui sint circa quos moventur, eadem sit utrobique magnitudo; aliáque quæ sunt Impedimentorum loco, sint utrobique æqualiter constituta. Nam nisi hæc ita sint, res omnino secus esse poterunt.

 4. Ubi

4. Ubi autem hoc contingit; si de causâ quæratur: quilibet fere proclivis est eam ex hac de Axe in Peritrochio doctrinâ assignare. Neque hoc prorsus incommodè; (quippe & huic considerationi locus erit:) Sed alia etiam in considerationem advocanda erunt, si res penitiùs inspiciatur. Quippe hæc de Axe in Peritrochio doctrina, non de Rotis separatis invicem comparandis agit; sed de duabus (pluribúsve) conjunctis, quarum motus alter ab altero dependet: & quidem ubi Agens secundum unam, Patiens secundum alteram, consideratur.

5. Ut igitur ad suum Principium res referatur; intelligatur primò Cylindrus ejusmodi (*Scytalen* vocat Aristoteles) qualem in Hortis (& alibi) ad complanandam terram volvendo solent adhibere: qualem (si manubrium demas) in fig. 260. exhibuimus. Ex hujusmodi Cylindris, Pondere æqualibus (& longitudine) Majorem faciliùs volvas (cæteris paribus) quàm minorem. Idémque de Rotis intellige, aliisve Tympanis, aut etiam Sphæris.

6. Sunto enim ejusmodi duo Cylindri, (vel, si mavis, duæ Rotæ; Fig. 265. Sphæræve,) ut A B, $\alpha\beta$, in fig. 265. qui vel Trusione vel Tractione movendi sint, super B β plano.

Manifestum est, si nulla esset medii resistentia superanda; nullúmque à scabritie subjecti (super quo movetur) impedimentum, aut quod horum instar sit; pondus idem, ab eâdem Vi, eadem facilitate antrorsum propelli, aut retrorsum trahi; per prop. 22. Cap. 1.

7. Si autem Resistentiæ Aëris ratio habeatur: Manifestum est, Cylindrum (cæteris paribus) mole majorem, majori Aëris portioni obviam ire, unde major igitur erit Resistentia; & propterea Major Cylindrus difficiliùs movebitur: contra quam expectandum erat. (Quod in duobus Globulis, plumbeo putà & ligneo, ejusdem ponderis, per aerem missis, omnino obtinebit.) Adeóque hæc consideratio dissimulanda potiùs esset, quam in causæ partem advocanda. Sed tantilla potest hæc esse differentia, ut aliunde superari possit.

8. Si verò Subjecti (super quod movetur) Scabrities seu Asperitas in considerationem advocetur.

Dico, primò, hinc potissimum esse (si non solummodo,) quòd Rotunda præsertim corpora humi volvantur multo faciliùs quàm labantur vel possint sine volutione trahi. Cùm enim nullæ sint tam perfectè tersæ & glabræ Superficies, ut nihil prorsus asperitatis habeant, quâ se mutuò impediant detineántque: hinc fit, quòd Cylindrus A B, impeditus (contactu plani) ad partes B, sed non item ad partes A; quà potest expeditè, præceps fertur; (A celeriùs quàm B moto.)

moto.) Atque hoc continuè: Quod eſt, Volvi. Haud ſecus acſi Dentata Rota D B fig. 264. ſuper Dentatâ ſuperficie movenda eſſet: ubi ne labatur, impediunt impliciti dentes; (ut ad B videre eſt;) non item, ne volvatur. Id utique, niſi dentibus vel alterutris vel utriſque ruptis, fieri non poteſt: hoc poteſt; ne deſerente quidem ſuum tramitem Centro C. Atque eadem ratio eſt aſperitatum minutiorum tametsi minùs obſervabilis.

9. Idémque (ob eandem cauſam) in Curruum Rotis ſufflaminatis videre eſt; quæ multò difficiliùs ita trahuntur renitentes, (rotæ ambitu, terræque ſuperficie ſe mutuò radentibus,) quam ubi circa axem volvuntur.

10. Fallor, an non ob eandem cauſam ſit, quòd projecta in Aere volvantur etiam; nempe, quia pars aeris ea quæ projecti partibus inferioribus obviam fit, humilior ſit adeóque pauxillo craſſior, magiſque propterea renitatur, quàm quæ ſuperioribus.

11. Quamquam, & id etiam aliunde fieri poſſit; nempe ob impetum in projectione impreſſum. Cùm enim quæ ex Fundâ (verbi gratiâ) projiciuntur, circulari motu priùs lata fuerint, quàm relictâ fundâ per iſtius circuli tangentem procedant; projecti partes ab hujus circuli centro remotiores, majores propterea circumferentias eo motu deſcripſerant, adeóque velocioris motûs conceperant impetum, quàm quæ propiores; qui quidem impetus inæquales, ubi ex peripheriâ ad rectam tangentem tranſitur, volutionem inchoant, (projecti centro per rectam procedente, partibúſque ſuperioribus concitatiùs reliquis,) eadémque cepta, cum nihil impediat, perſeverat, (per prop. 11. Cap. 1.) Intelligatur enim (ut Schemate rem exponam,) Fundâ C B A, versari A B projectile, circa C centrum motûs, in ſitum $\alpha\beta$; ibique desertâ fundâ, centro ſuo c (quod priùs arcum deſcripſerat c κ) ſecundùm rectam tangentem $\kappa\tau$ deinceps ferri. Cùm itaque majorem impetum conceperit A, per A α arcum majoris circuli delatum, quàm B per ſimilem circuli minoris arcum B β: ubi ad parallelas rectas $\alpha\tau$, $\beta\tau$, perventum erit; impetus in α velocior quàm in β, volutionem protinus inchoabit, circa centrum κ; eadémque, non impedita, perſeverabit: ut dictum eſt. Idémque, ſi non ſemper, non rarò tamen, in aliis projectionibus contingit. Fig. 268.

12. Quod autem facit in Cylindris, Rotis, Sphæris, &c. humi volutis, Aſperitas Soli; idem facit in Trochlearum Orbiculis Aſperitae Funis ductarii, ejúſque propterea cum Orbiculo cohæſio. Unde fit ut faciliùs cum Fune convertatur Orbiculus, quàm manente Orbiculo ſolus Funis ducatur. Quod & in aliis ſimilibus converſionibus pariter obtinet.

13. Dico

Fig. 265. 13. Dico porro; ob eandem quam diximus superficierum Asperitatem esse, quòd Cylindri Rotæve aut Sphæræ mole majores, (sed pondere æquales;) faciliùs volvantur quam minores.

14. Intelligantur enim in eandem asperitatem seu eminentiam P O impingere, A B Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) major, atque $\alpha\beta$ minor: Quæ quidem eminentia P O (quò possint A B, $\alpha\beta$, procedere) vel superanda erit, vel deprimenda, vel propellenda.

Manifestum primò est, cùm sic impingit $\alpha\beta$, propiùs esse ad P punctum β; quàm est punctum B, cum sic impingit A B. Si enim intelligeretur β in B; totus circulus minor (propter mutuum contactum in B) intra majorem esset; adeóque ad O non pertingeret; ut in fig. 267. (& minùs adhuc, si esset β ultra B.) Adeóque (quò superetur eminentia P O) Acclivior erit Ascensus (& proptereà difficilior, per 25. Cap. 2.) à β ad O, quàm à B ad O. Et quidem illic per Circuli minoris Tangentem O τ; hic per Tangentem majoris O T.

15. Vel etiam sic idem aliàs colligitur. Facto O centro motûs, circa quod (quò superetur punctum O) rotandæ sint A B, $\alpha\beta$; seu, quod tantundem est (per prop. 16. Cap. 4.) eorundem Centra gravitatis C, γ; in peripheriis C c, $\gamma\kappa$: eadem erit Obliquitas motus in punctis C, γ, quæ est Tangentium C T, $\gamma\tau$; (quæ quidem ipsis O T, O τ, parallelæ sunt.) Adeóque cum major sit Obliquitas in C T quàm in $\gamma\tau$; (propter angulum O $\gamma\beta$, majorem angulo O C B, ut mox videbitur;) etiam facilior Ascensus erit. Et quidem in ea ratione faciliùs movebitur C, quam γ, (hoc est, A B quam $\alpha\beta$,) quam habet Secans Anguli T C A hoc est C O V, vel T O P; ad Secantem Anguli $\tau\gamma\alpha$, hoc est γ O V, vel τ O P; (per prop. 25. Cap. 2.) hoc est (quippe hæc eadem est ratio) in reciproca ratione Co-sinuum, seu Sinuum Complementorum; (Nam Secantes Angulorum sunt Complementorum Sinibus proportionales: Nempe in fig. 42. ut F T ad F S, seu F V ad F O, hoc est F V ad F B, sic est F Q ad F R; ut ad prop. 14. Cap. 2. ostensum est:) hoc est, ut Sinus Anguli O $\gamma\beta$, vel O τ P; ad Sinum Anguli O C B, vel O T P. Quæ quidem nec eadem est cum ratione Diametrorum; neque eadem ubique ratio; sed alia atque alia pro variâ ipsius P O altitudine. Sed quò minor est altitudo P O, adeóque & minores anguli O C B, O $\gamma\beta$; eò minor hinc est inæqualitas: eademque, si consideretur P vel O in ipsis B β punctis, protinus evanescit.

16. Manifestum item est, Arcum β O majorem esse (proportione ad

ad suam peripheriam integram) quàm est (ad suam) B O. Quippe PO, hoc est B V, vel β υ, sinus versus erit arcûs (proportione) majoris in circulo minore, quàm in majore. Adeóque (junctis C O, γ O,) major erit Obliquitatis Angulus β γ O, quàm B C O. Et propterea, si deprimenda sit P O eminentia; fortiùs ad hoc valebit Pondus idem Cylindri (Rotæve aut Sphæræ) majoris, prementis secundum rectam CO minùs Obliquam; quàm minoris, prementis secundum magis Obliquam rectam γ O: per prop. 21, vel 25. Cap. 2. (Quippe ibidem, quoad hoc, censendum erit Grave constitutum, ubi est ipsius Centrum gravitatis; per prop. 16. Cap. 4.) Non quidem in eâ ratione quæ est Diametrorum, (ut ubi de Axe in Peritrochio agitur) sed in eâ quam habet sinus Anguli C O V, ad sinum anguli γ O V, (per prop. 21. Cap. 2.) quæ alia atque alia erit, pro variâ altitudine rectæ P O, manente eâdem Diametrorum ratione. Sed inæqualitas continuò minor, prout P O propiùs est ad puncta B, β; atque, in his, protinus evanescit.

17. Estque hic forsan angulus B C O vel β γ O, quem vult Aristoteles cùm dicit, ***Angulum majori circuli, nutum quendam habere ad angulum circuli minoris:*** (quod Interpretes alio trahunt; putà, ad Angulum Contactus, vel Angulum Semicirculi, &c. de quibus videantur Monantholius, Baldus, Guevara;) Nam & minor est angulus BCO quàm β γ O, adeóque C directiùs imminet; & obliquior angulus OP quàm γ O P, adeóque C minùs offensat. Si verò de Angulo contactûs intelligeretur; plus offensaret rota vel sphæra major quam minor quia pluribus subjectis partibus simul incumbit Cylindrus seu Sphæra Materialis; ut post dicetur.

18. Sive igitur Superanda sit, sive Deprimenda, eminentia P O; (quorum, ut plurimum, vel alterum vel utrumque faciendum erit, quo volutio continuetur;) magis ad hoc valebit Cylindrus seu Rota major, cæteris paribus, quàm minor. Idque magis in eminentiis majoribus quàm in minoribus.

19. Sin abrumpenda esset eminentia P O, vel Propellenda: cùm hoc per pulsum lateralem faciendum sit, & potissimum in Horizontali recta, ut V O, secundum quam (vel huic parallelam) fit tractio horizontalis; (quæ magis hic spectanda est quàm perpendicularis pressio;) id potiùs fiet per rectam γ O, (quæ à situ horizontali minùs recedit,) quàm per C O. Adeòque, hoc respectu, Cylindrus (vel Rota) minor, prævalebit majori. Verùm hoc in hujusmodi volutationibus rariùs contingit, & vix nisi in altioribus obstaculis. Sed eminentiæ minores, vel deprimi solent, vel superari, potiús quàm propelli;

cui

cui magis conducit (ut jam est demonstratum) major quàm minor Rota vel Cylindrus.

20. Sed & alia consideratio est, quæ Majori favet præ Minore: Nempe dum ab eminentiâ unâ ad alteram transitur, magis deprimitur minor quàm major Rota seu Cylindrus: Adeóque plus illi ascendendum erit (quoniam ex depressiore valle) quo secundam superet.
Fig. 266. Sunto enim (ut in fig. 266.) eminentiæ duæ, M N, & P O: quarum quum altera superata est sed nondum reliqua; manifestum est (propter majorem in arcu minoris circuli curvedinem) altiùs depressum iri β quam B, (adeóque & Centrum γ quàm C, totúmque propterea Solidum;) Adeóque non modò Accliviorem sed & Altiorem ascensum habebit Cylindrus (vel Rota seu Sphæra) minor quàm major. Hic itaque faciliùs volvetur.

21. Huc accedit & alia ratio. Utut enim Circulus Mathematicus supponatur Planum in Puncto contingere; in Corpore tamen Physico res secus esse solet. Quippe Corpus grave deprimit gravitate suâ subjectam planitiem; & quidem plus minúsve pro majore vel minore pondere cæteris paribus. Intelligatur itaque Cylindrus seu Rota
Fig. 267. minor (fig. 267.) planitiem N V O deprimere usque ad B vel β. Necesse itaque est ut subjectæ materiæ tantundem deprimat seu loco suo pellat (quo sibi locum paret) quantum est Segmentum Q R B. Quò autem major eò penetret, tantundem deprimendum erit seu loco pellendum, quantum est segmentum N O B: quod segmento Q R B majus est. Hoc itaque ut fiat, majore Pondere opus erit. Ponitur autem utriusque Pondus æquale. Non igitur fiet. Non itaque tam altè penetrat Cylindrus seu Rota Major, quàm penetraverat minor: Adeóque & hoc nomine faciliùs volvetur.

Atque hactenus Cylindrum seu Rotum consideravimus ut Grave; pondere suo vel agens vel renitens: Atque eâ ratione Majorem faciliùs motum iri quam Minorem ostendimus: Et, quibus de causis id fiat.

22. Potest autem, seclusâ illâ Gravitatis consideratione, ut Vectis considerari; non quidem quatenus hoc ipsum Solidum, stante Obice; sursum movendum sit quò superetur obex, (quippe hac ratione considerandum erit ut Grave movendum;) sed quatenus amoliendus est
Fig. 265. Obex iste seu Obstaculum P O. Intelligatur enim (in fig. 265.) AB vectis, cujus fulcrum B; sitque Vis applicata sive in A, sive (ut in Cylindris plerumque fit) in C: & pondus movendum, seu Obex amoliendus, in V; non quidem immediatè, sed mediante rectâ inflexili V O. (Eadémque de α υ γ β, quæ de A C V B, intelligantur.)

Erit

erit igitur, (per prop. 2. Cap. præced.) ut A B vel C B, ad B V hoc est P O; sic Vis in A vel C, ad huic æqualem in V, vel O. Atque similiter, ut $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$, ad $\beta\upsilon$, hoc est P O; sic vis in α vel γ, ad eandem in υ vel O. Et consequenter (propter eosdem consequentes) ut A B vel C B, ad $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$; sic vis in A vel C, ad eandem in α vel γ applicatam. In eadem igitur ratione (nempe Diametrorum, vel Semidiametrorum,) facilius movebit vis eadem Cylindrum seu Rotam Majorem A B, quàm Minorem $\alpha\beta$; quantum ad moliendum obicem P O. Atque hoc, ubicunque contigerit obstaculum P O; putà, sive propiùs sive remotiùs à puncto B, vel β.

13. Verum hic nulla ratio habita est Ponderis in utrovis Cylindro, (nisi quod hujus ope puncta B, β, fixa sint tanquam ab Hypomochlio seu Fulcro, ne resiliant;) sed rectarum solummodo A B $\alpha\beta$, tanquam vectium nullius ponderis. Neque ad onus movendum, sed ad moliendum obicem tantummodo spectatur. Sin spectetur Onus ipsum, quod tanquam in C vel γ constitutum (quæ centra gravitatis sunt) intelligendum erit: nihil hinc emolumenti habebitur. Quippe eadem utrobique ratio erit tum A B vel C B ad C B, tum $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$ ad $\gamma\beta$. Adeóque si Vectium A B, $\alpha\beta$, Fulcra intelligantur B, β, & Pondera movenda in C, γ; Vires autem vel in A, α, vel in C, γ: quæ Ponderi æquipolleat Vis utrobique vel dimidia vel æqualis erit.

14. Sin concipiatur A B vel $\alpha\beta$ ut Libra cujus Centrum motûs sit B vel β: Ad quam (utpote per Centrum transeuntem) quæ utrinque ponantur solidi partes æquiponderant; adeóque ipsa A B seu $\alpha\beta$ libra, in neutram partem præponderans, quantumvis parvo pondere (nisi quod medii resistentia, solique inæqualitas quâ detinetur, impedirent,) in utramvis partem moveri posset: Vis applicata in A vel C, (utpote à Centro motûs remotior,) in eâdem ratione plus valebit, quam in α vel γ, qua sunt ipsæ A B vel C B longiores quàm $\alpha\beta$ vel $\gamma\beta$: per prop. 12. Cap. 3. Ob quam rationem etiam ostendimus, longiorem Libram exactiorem esse; Schol. prop. 14. § 6. Atque ad hoc respexisse videtur Aristoteles quum eandem hic valere rationem dicit ob quam longiores Libræ sunt brevioribus exactiores. Fig. 267.

15. Estque hæc consideratio etiam Trochlearum Orbiculis communis; sed cum hoc discrimine: In Cylindris Sphærisque humi volutis, Obstacula seu Impedimenta motûs (ob soli asperitatem) sunt in ipsarum orbitis, putà prope B, β; quæ itaque pro Fulcro, seu Libræ motusque Centro habentur; ut dictum est: Sed in Trochlearum Orbiculis, quorum ambitus ab offensionibus liberi sunt, motûs Impedimenta sunt ad Axem, circa quem immotum volvuntur Orbiculi; &

 præ-

præſertim, in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte ſuperiore, ad ſuperiorem Axis partem ſuper quam incumbit Orbiculus, moléque ſuâ & dependentis ponderis eam premit; ad partem verò Axis inferiorem (ob ſimilem rationem) in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quò minus Orbiculus circa Axem ſuum expeditè volvatur.

26. Et quidem eò magis, quò Axis major eſt; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum eſt, ut exiſtimaverit Baldus ob hanc ſolam cauſam expeditius moveri Orbiculos majores quàm minores, quoniam Majorum Axes in minori ut plurimum ſunt ratione ad Orbes ſuos quàm ſunt Axes Minorum: quod ſi Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi ſit in eâdem ratione in majoribus atq; minoribus Orbiculis, nihilo facilius motum iri exiſtimat majores quàm minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, ſi intelligatur Orbiculi Centrum pro Vectis Fulcro, Viréſque ad ſupremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc ſeu adhæſionem pro Onere ſubmovendo; in eâ ratione plus minúſve valebit, Vis ad Onus ſubmovendum, quâ major eſt aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta; Si ſit, ut C B ad C A, fig. 269, ſic (reciprocè) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eadémque aucta præpollebit, adeóque movebit: Atque hoc perinde ſive in majore ſive in minore Orbiculo.

Fig. 269.

27. Quam quidem Demonſtrationem ego admitto. Verùm hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid ſit quod ſupra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quàm in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus diſtantiâ applicatum. Ut modò oſtenſum eſt, ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejuſdem.

28. Eadémque Frictionis conſideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante conſideravimus Soli Aſperitatem,) in Plauſtrorum Curruúmve Rotis non minùs locum habet quàm in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere preſſa, ita premunt foraminum imo, ut non poſſit ſine Frictione converti Rota circa Axem ſuum, in parte præſertim inferiori. (Quam cauſam aſſignat Ariſtoteles, Mechan. Queſt. 11. *Cur ſuper Scytalas,* quales R, S, fig. 258. nos (*Rollers* vocamus) *facilius geſtantur onera, quàm ſuper curribus*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majúſque ex Frictione Impedimentum. Eáque Frictio majorem quæ æquipolleat vim poſtulat, ubi major eſt Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem cau-

ſam

II.

ore,
que
rio-
rum
rbi-

rem
ma-
ma-
um
ne-
tq;
iam
culi
um
no-
um,
ne-
is in
qui-
hoc

hoc
llen-
; ur-
Ut
ejuf-

ræter
orum
n Or-
antur,
ftione
Quam
talas,
nera,
uidem
npedi-
t, ubi
n cau-
fam

præſertim, in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte ſuperiore, ad ſuperiorem Axis partem ſuper quam incumbit Orbiculus, moléque ſuâ & dependentis ponderis eam premit; ad partem verò Axis inferiorem (ob ſimilem rationem) in Orbiculis illis qui ſunt in Trochlearum parte inferiore. Quæ hinc oritur Frictio, impedit quò minus Orbiculus circa Axem ſuum expeditè volvatur.

26. Et quidem eò magis, quò Axis major eſt; propter majorem propterea frictionem. Quod quidem eatenus verum eſt, ut exiſtimaverit Baldus ob hanc ſolam cauſam expeditiùs moveri Orbiculos majores quàm minores, quoniam Majorum Axes in minori ut plurimum ſunt ratione ad Orbes ſuos quàm ſunt Axes Minorum: quod ſi Diameter Axis ad Diametrum Orbiculi ſit in eâdem ratione in majoribus atq; minoribus Orbiculis, nihilo faciliùs motum iri exiſtimat majores quàm minores Trochlearum Orbiculos. Nempe, ſi intelligatur Orbiculi Centrum pro Vectis Fulcro, Viréſque ad ſupremum diametri punctum applicatas, & Frictionem hanc ſeu adhæſionem pro Onere ſubmovendo; in eâ ratione plus minúſve valebit, Vis ad Onus ſubmovendum, quâ major eſt aut minor Semidiameter Orbiculi ad Axis Semidiametrum. Puta; Si ſit, ut C B ad C A, fig. 269, ſic (reciprocè) Vis in A, ad impedimentum à frictione ortum in B; Vis Impedimento æquipollebit, eadémque aucta præpollebit, adeóque movebit: Atque hoc perinde ſive in majore ſive in minore Orbiculo.

Fig. 269.

27. Quam quidem Demonſtrationem ego admitto. Verùm hoc addo; Augmentum illud Virium quicquid ſit quod ſupra Æquipollentiam accedit, plus valiturum in Radio majore quàm in minore; utpote ad Libram in majori à Centro motus diſtantiâ applicatum. Ut modò oſtenſum eſt, ex Cap. 3. prop. 12. & Schol. prop. 14. ejuſdem.

28. Eadémque Frictionis conſideratio quæ ad Axem fit, (præter eam quam ante conſideravimus Soli Aſperitatem,) in Plauſtrorum Curruúmve Rotis non minùs locum habet quàm in Trochlearum Orbiculis. Nam Axium extrema quæ Rotarum Modiolis immittuntur, onere preſſa, ita premunt foraminum imo, ut non poſſit ſine Frictione converti Rota circa Axem ſuum, in parte præſertim inferiori. (Quam cauſam aſſignat Ariſtoteles, Mechan. Queſt. 11. *Cur ſuper Scytalas*, quales R, S, fig. 258. nos (*Rollers* vocamus) *faciliùs geſtantur onera, quàm ſuper currus*; nempe ob evitatam axis frictionem. Et quidem ad Axem majorem major erit Frictio, majúſque ex Frictione Impedimentum. Eáque Frictio majorem quæ æquipolleat vim poſtulat, ubi major eſt Diametri Axis ad Diametrum Rotæ ratio; ob eandem cauſam

II.

ore,
éque
trio-
rum
rbi-

rem
ma-
ma-
ıum
me-
atq;
ıam
culi
um
no-
um,
me-
is in
qui-
hoc

hoc
llen-
; ut-
Ut
ejus-

ræter
orum
n Or-
artur,
ctione
Quam
ptalas,
snera,
uidem
npedi-
t, ubi
n cau-
sam

ſim quam in Trochlearum Orbiculis jam oſtendimus. Quódque ſupra æquipollentiam accedit virium Augmentum, perinde in majoribus Rotis, atque in majoribus Trochlearum Orbiculis, plus valebit quàm in minoribus; atque ob eandem cauſam.

29. Neque huic adverſatur, quòd Trochlearum Axes fixi maneant, Axes Rotarum promoveantur. Quippe, dummodo Centrum Converſionis (quem motum ſolummodo hic conſideramus) in Axe ſit; perinde eſt ſive manente Solo promoveatur Axis (ut in Plauſtrorum Rotis;) ſive (ut in Trochlearum Orbiculis) manente Axe ducatur Funis tractorius, ſive etiam utrumque fiat. Quæque de Rotarum Axibus dicta ſunt; eadem etiam Cylindris aliiſve facilè accommodantur, ubi ſtiones per Axes fiunt.

30. Supereſt adhuc alia ratio, etiam à Frictionis hujus conſideratione petita, quæ majoribus Rotis (Cylindris, Tympanis, Orbiculis, Sphæris, &c.) præ minoribus favet. Poſitâ nempe eâdem utrobique axis magnitudine; quod ex Frictione oritur Impedimentum, non modò difficiliùs in Rotâ minore ſuperatur (ob cauſam jam traditam;) ſed & hoc ſæpiùs repetendum erit. Cum enim tantundem tractione promoveri ſoleat Axis in unâ Rotæ converſione quantum ipſius Rotæ ambitum proximè æquet; ſæpiùs eodem tractu converti oportebit Rotam minorem quàm majorem, totámque integræ converſionis frictionem ſæpiùs repeti: & quidem in eâdem ratione ſæpiùs quâ minor eſt rotæ ambitus. Et propterea, ob frictionem ſæpiùs repetendam, difficiliùs movebitur Rota minor.

31. Atque hinc eſt quod Plauſtrorum Curruúmque Rotæ & Axes anteriores (cùm minores eſſe ſoleant) citiùs terantur, ſæpiúſque reparari debeant, quàm majores. (Cui tamen nonnihil conferre poteſt, quod cùm Axis prior minùs Altus ſit quàm poſterior, ideo magis prematur, cæteris paribus, ab onere quod utrique incumbit. Ob eaſdem cauſas quas Cap. præced. aſſignavimus, cur duobus Fulcris inæqualiter altis incumbens Vectis, depreſſius magis premat.) Eademque Trochlearum Orbiculis facilè accommodantur: quippe, dum tantundem elevatur pondus, ſæpiùs convertendus erit Orbiculus minor, cæteris paribus, quàm major; adeóque & difficiliùs.

32. Atque hactenus de Cylindrorum, Rotarum, Tympanorum, Sphærarum, &c. converſionibus egimus, tum cur fiant, tum cur in Majoribus faciliùs fiant quàm in Minoribus, cæteris paribus. Quorum utriuſque cauſas conjecimus in ſuperficierum Aſperitatem, atque hinc ortam Cohæſionem; ſive quâ cum Solo (aut quod hujus inſtar eſt) cohæret Orbita exterior; ſive quâ cohæret Axis cum eo cui immittitur

mittitur Foramine. Quippe si nihil horum esset; nihil est cur tracta Rota non rectà procederet absque volutatione, Funísque ductorius immotus Trochlearum Orbiculos præterlaberetur, atque in reliquis similiter. Et quidem, nisi hoc esset, (nec impediret medii resistentia) Rotam quantumvis gravem, Vis quantumvis exigua, in situ Horizontali, vel traheret vel propelleret: in situ vero Declivi, etiam nullâ Vi adhibitâ, ferretur sponte suâ: in Acclivi verò, eâ saltem Vi quam postulat tracti Pondus cum Acclivitatis gradu comparatum; (per ea quæ tradimus Cap. 2. prop. 27.) nullâ habitâ ratione vel Magnitudinis vel Figuræ; nullâque volutatione superadditâ.

Fig. 270. 33. Restat alia non obsimilis Quæstio; nempe, *Cur Plaustrorum Curruúmve Rotæ Anteriores sint Posterioribus Minores*; atque cui bono hoc sit.

Videri fortè possit nonnullis, id fieri propter Declivem Plaustri positionem; quasi cùm B rota præcedens humilior sit quàm sequens A, Plaustrum per A B rectam descendere proclive sit. Atque hoc quidem valeret, si, manentibus A B rotis, labi oporteret Plaustrum secundùm A C B rectam. Quippe tum deorsum ferretur C Centrum, totúmque Grave; fierétque Centro terræ propius. Verùm ut jam se res habet, omnino secus est. Cùm enim simul ferendum sit Plaustrum cum Rotis, puta à situ A C B in situm $\alpha\,\gamma\,\beta$, (Centro-gravitatis C describente rectam Horizontalem C γ,) nullus hoc motu acquiritur Descensus, adeóque nulla est ad illum propter Gravitatem propensio: per prop. 9. Cap. 2. vel prop 16. Cap. 4.

34. Aliunde igitur petenda est ratio. Et quidem, quantum ad Rotarum posteriorum altitudinem, res ex antè dictis jam satis patet. Quoniam (præterquam quòd hac ratione Plaustrum altiùs ex luto elevatur) Majores Rotæ faciliùs moventur quàm minores; ob rationes jam traditas.

35. Quòd verò Anteriores Rotæ minùs Altæ sint, duæ saltem sunt causæ. Prima est, quoniam, cùm propter viarum flexus Plaustra sint sæpenumerò nunc dextrorsum nunc sinistrorsum ducenda; huic conducit multùm anteriorum Rotarum parvitas; Quippe si anteriores eâdem essent magnitudine cum posterioribus, incommodè admodum fierent ejusmodi flexiones, & nonnisi magno circuitu facto. Quod vel Aurigæ, experimento docti, testabuntur: ipsáque Plaustrorum inspectio satis docebit.

36. Altera paulò altiùs petenda est. Considerandum itaque est, Lora, quæ Plaustrum Equis alligant, affixa esse (saltem mediatè) ad

Axem

Axem anteriorem ejúsve Capita; saltem non inferiùs quàm sit Axis ille. Cúmque Applicationum puncta virium ad Pondus ibidem censenda sint: si Axis ille tam altus sit quàm Pectus Equi; linea tractûs (secundum quam Vis applicatur) puta B D, Horizontalis esset. Et propterea, dum per planum Horizontale trahatur Plaustrum, erit ea virium Directa Applicatio, (cùm eadem sit *Directio Moventis* seu Virium Applicatarum, & *Directio Motûs.*) Sed quoniam non ita complanatæ sint Viæ, quin subinde superandi sint Montes, & Colles, variæque Asperitates & Eminentiæ, (ut T O, vel P O;) quod nisi per acclivem Ascensum fieri non potest: ubi hoc contingit, Directa Applicatio non ea est quæ est Horizonti T P parallela; sed quæ est parallela Acclivitati T O. Cùm itaque præter tractum Horizontalem, huic etiam casui prospiciendum sit; ídque eò magis, quoniam Pondus per Acclive difficiliùs trahitur quàm per Planitiem, Commodum igitur deprehensum est ut Axis anterior, depressior sit quàm Pectus Equi; quò B D recta (secundum quam Vis applicatur) sit parallela potiùs Acclivitati T O; (saltem, ut propiùs ad parallelismum accedat quàm si tam altus esset Axis quàm Pectus Equi, nedum eo superior.) Sic utique directiùs eò loci Vis applicabitur, ubi plus opus est Virium; neque Attrahendum tantummodo, sed Attollendum pondus erit, seu Elevandum. Atque hoc eo magis faciendum est, ubi per tesqua & salebras, viásque inæqualiter asperas, quàm ubi per Planitiem trahendum est Plaustrum. Fig. 271.

37. Atque ad hunc etiam locum spectare poterit, ut reddatur ratio, cur quæ declivi plano incumbunt Gravia, si Rotunda sint, descendendo Volvi soleant; Labi verò, si planis terminentur: atque illa faciliùs quam hæc moveri. Fig. 272.

38. Intelligatur enim Q grave declivi plano incumbens, superficie suâ planâ A B: sitque à sui Centro Gravitatis perpendicularis ad declive planum Q R, ad Centrum Terræ Q P, declivi plano occurrens supra B. Manifestum est (ex Schematis inspectu) non posse deorsum Volvi Q grave; nisi, facto B Centro motûs, radio B Q describatur peripheria, cujus supremum punctum erit S in rectâ B S ipsi P Q parallelâ seu ad Horizontem rectâ; & Centrum gravitatis Q per Q S arcum continuò ascendere; per prop. 20. Cap. 2. Et (ascendente Centro gravitatis) ascendere ipsum grave, per prop. 16. Cap. 4. Non igitur ob Gravitatem Volvetur circa B punctum permanens. Labi verò potest,(lato Q Centro in rectâ ipsi AB parallelâ,)quoniam sic labendo descendet Q. Et quidem actu labetur, si tanta sit in eâ declivitate

Gravi-

Gravitatis Vis ut superare possit impedimentum (de quo suprà aliquoties dictum) ex cohærentiâ, indeque ortâ Frictione.

39. Si verò, ut in Gravi T, recta à sui Centro Gravitatis ad terræ centrum T P, declivi plano occurrat infra B: Volvendo descendet (& quidem potius quàm Labendo, ob vitatam frictionem.) Quoniam peripheriæ Centro B, radio B T, describendæ, supremum punctum S erit in B S rectâ, ipsi P T parallela; arcúsque S T descendens: (per prop. 20. Cap. 2.) adeóque præcipitabitur Grave T. Saltem nisi declivitas plani A B, seu rectæ huic parallelæ à T labente describendæ, tanta sit, ut gravitatis Vis in illâ declivitate eo excessu superet impedimentum à frictione ortum, ut excessus hic præpolleat Vi Gravitatis in eâ declivitate quam habet arcûs S T in puncto T; hoc est, (per prop. 15. Cap. 2.) quam habet Recta arcum in T puncto contingens.

40. Si B & P coincidunt; perinde est ad utrumvis casum referas. Volvetur autem, non Labetur; ob Frictionem Impedientem.

41. Sin grave, ut V, Sphæricum sit; (seu quod hujus instar est;) propter idem punctum A B, recta V P (ad horizontem recta) declivi plano infra B semper occurret; sed & Declivitas Centri V Volventis (propter B V declivi plano rectam) eadem erit atque V Labentis. Volvendo igitur (ob sic vitatam frictionem) non Labendo descendet.

42. Quódque faciliùs moveatur V quàm Q; manifestum item est. Quoniam, cùm eadem sit Declivitatis Volventis V, atque Labentis Q; sitque in Q (cùm non possit nisi Labendo descendere) superandum Impedimentum à Frictione ortum, sed non item in V: faciliùs movebitur (cæteris paribus) V quàm Q.

43. Sed & faciliùs quàm T: propter Declivitatem Volventis V (eandem utique quæ est declivis plani) majorem quàm Volventis T.

44. Intellige; Nisi angulus T B P; vel Rectus sit, (coincidentibus R B;) quo casu eadem erit Volventis T, atque Volventis V, declivitas: vel Acutus, (R infra B cadente) quo casu major erit Declivitas Volventis T, quàm volventis V; adeoque & faciliùs volvetur T quàm V.



CAP. VIII.

De Trochlea, seu Polyspasto.

Definitio.

Ex Orbiculis (uno vel pluribus) aptè dispositis, circa axes suos volubilibus, quibus circumpositus Funis Ductarius pondus attrahit (seu quod tantundem est) compositum Instrumentum, Trochleam *appellant.*

A Τρέχω, τροχὸς, τροχαλὸς, descendunt τροχάλειον, τροχαλία, τροχιλία, τροχιλαία (quâ voce utitur Aristoteles in Mechanicis) ejusdem fere significatûs omnia; atque hinc Latinorum *Trochlea.* Pappo πολύσπαστον dicitur à multiplici tractione. Nostri (à *pull* vello) *Pulley* appellant.

PROP. I.

Si Trochleæ Orbiculus singularis sit, & loco suo fixus; Vis Funi ductario applicata, Ponderi seu Impedimento amovendo æqualis, æquipollet: Adeóque sustinebit, atque aucta movebit, minuta verò ne sustinebit quidem.

Pultà, si Orbiculo C A, circa Centrum seu Axem C volubili, ex Unco dependenti (aliásve sic fixo ut inde non amoveatur,) circumponatur Funis ductarius V A P, cui applicetur Vis in V, Pondus in P: Manifestum est, (nisi solvatur, rumpatur, extendatur funis, aliúdve Fig. 273. accidat

accidat simile, quod non supponimus,) quantum funis extremum V Vi trahitur secundum directionem suam, tantundem ascensurum extremum P cum annexo Pondere, contra suam. Et propterea (per prop. 7. Cap. 2.) si æqualia sint Vis & Pondus æquipollebunt; sin secus, præpollebit quod majus est. Unde constat propositum, per prop. 11, 12. Cap. 1.

SCHOLIUM.

Fig. 273. INtelligitur hæc propositio (ut & sequentes, quod moneo ne idem sæpius sit repetendum,) potissimùm de Gravi directè dependente, ut P: Ubi scilicet Vis & Pondus agunt ut Vires contrariæ, (juxta prop. 12. Cap. 1.) Si verò Grave, ut π, situ Obliquo ferendum sit: Minuetur Ponderatio pro gradu declivitatis, (juxta prop. 19. Cap. 2.) Atque de Pondere sic minuto procedit propositio. Si vero pondus P movendum Humi jaceat, aut (ut in p) tractu horizontali ducendum sit, (ubi impedimentum ex scabritie ortum solummodo superandum sit,) vel Obex aliquis amoliendus sit, aliúdve Obstaculum quod Impedimenti tantùm rationem habeat, non Vis contrariæ; Vi sustentrice in V non opus erit (cum Onus illud intelligatur vel non niti in contrarium, vel ne eò feratur aliunde sustineri:) sed, quò moveatur, non minùs requiritur, Vis æquipollente major. Aliáque ejusmodi sic intelligenda erunt ut in Capite præcedente.

Orbiculorum verò usus in Trochleis adhibetur, non tam propter rationem aliquam purè Mathematicam, quàm propter rationem Physicam; ob corporum scabritiem. Quippe si tum Orbiculi tum Funis ductarii superficies essent tam Mathematicè Politæ ut nulla foret ad invicem adhæsio; quin posset Funis tam expeditè labi, quàm Orbiculus converti: Demonstratio non minùs procederet de C A Orbiculo (alióve duro corpore) permanente, quàm circa C converso. Cùm verò (ut ad Cap. præced. ostensum est) hæc corporum Frictio, seu Abrasio mutua, impedimento sit ne expeditè moveatur Funis; sit que hæc major futura si in A permanentem fieret, quàm si circa axem C exiguum; (ob rationes in Cap. præced. ostensas:) hinc est, quòd Orbiculorum usus sit ad motum expeditè faciendum apprimè utilis.

Manifestum item est, ob hujusmodi Orbiculum singularem, loco suo fixum, (intellige, ita ut inde non amoveatur, utut inibi circa axem volvatur;) sed neque ob plures sic fixos, (ut post dicetur, & quidem ob eandem rationem;) nullam in V virium requisitarum minutionem inferri: cum Vis eadem in F, non minùs quàm in V, si ponderi æqualis

lis sit, sustinebit; si major, movebit.) Potest tamen ob causas alias usui esse hic Orbiculus. Quippe fieri potest, ubi Vis Humana (verbi gratiâ) applicanda sit, ut, propter commodiorem corporis situm, vis ea possit fortiùs exeri in V quàm in F: Vel etiam, in V, non modò vis nervorum (quæ sola poterit in F applicari) sed ipsum Pondus humani corporis applicari ad contrarium Pondus in P tollendum: Vel denique ob alias circumstantias, (quæ præsenti considerationi omnino sunt extrinsecæ, nec possunt facilè numerari,) non parum adjumenti poterit accedere.

Quod autem Orbiculorum magnitudinem aut parvitatem spectat; ex Scholio propositionis ultimæ Capitis præcedentis petendum est.

PROP. II.

Si Trochleæ Orbiculus singularis, Ponderi conjunctus sit, & cum eo trahendus; eique circumpositi Funis ductarii extremum alterum Unco (vel aliàs) fixum sit, alteri Vis Motrix applicetur: Æquipollebit Ponderi (seu Impedimento amovendo) Vis *Dimidia* (directè applicata:) adeóque sustinebit; atque aucta movebit; minuta verò ne sustinebit quidem.

Cum enim, Ascendente Orbiculo, ejúsve Centro C, (unà cum annexo Pondere,) tantundem ascendat T punctum contactûs Orbiculi Funísque V T, atque ob eam rationem tantundem promoveatur secundum directionem suam Vis motrix V: Sed & tantundem ascendat punctum contactûs Orbiculi ejusdem cum fune pensili HF (ab F puncto fixo ad orbiculum in H pertingente,) & propterea tantundem abbrevietur funis FH; quantum autem funi F H ita demitur, tantundem vertente Orbiculo transferatur ad funem T V, qui propterea tantundem prolongatur: Hinc fit, quod Ascensus puncti V, (seu promotio Vis motricis secundum directionem suam,) Duplus sit ascensus Centri C, ponderisve P. Quippe tantundem promovetur V propter ascensum puncti T; atque secundâ vice tantundem propter prolongatam T V rectam. Sed Ponderis P Ascensui, æquipollet Vis Dimidiæ Ascensio Dupla; per prop. 5. Cap. 2. Ponderi itaque in P æquipollebit Vis Dimidia Fig. 274.

in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) sustinebit, & aucta movebit, minuta vero nequidem sustinebit.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) Ubi *Vim directè applicandam* dicimus; quò hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ V T, F H, sint ipsi C P (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversâ, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam T V, tum contractionis rectæ H T, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus F V Punctis per quæ transeat funis) prout altiùs attollitur C vel P, Obliquitas ea continuò variatur. Verùm ea consideratio non tam hujus loci est, quam ad Caput secundum spectat, ubi de motuum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum à parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.

Fig. 275.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis exposito Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciprocâ ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometricè proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8, &c. prout Orbiculorum infrà positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad

1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infrà positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

NAm, in Fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C vel P. Atque sic porro quotcunque fuerint Orbiculi. Putà, Si Vis in V dicatur *V*; tantundem valebit, atque 2*V* in A; vel 4 *V* in B; vel 8 *V* in C vel P: (Atque sic porro quousque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicatâ quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Duplâ, Quadruplâ, Octuplâ, Sedecuplâ, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c. Fig. 276.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circundans pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Pondus pendere ex B (continuato fune A B ad Pondus P vel O P Q, ibíque terminato,)Vis æquipollens in V vel A ad Pondus P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus. Fig. 277, 278, 279.

Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Pondus) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Pondus P, ut 1 ad 2; eò quòd, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque rectarum A B, C D; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idémque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibique figeretur; (non quidem ad Pondus quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu palum fixum:). Cùm enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihílque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si verò Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F elevetur:) propter rectas tres A B, C D, E F, tantundem abbreviatas singulas quantum est Ascensus Ponderis; omniúmque abbreviationes per A ad V translatas; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculus V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeóque Vis ad Pondus, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap. 2.

in V. Adeoque (per prop. 11, 12. Cap. 1.) sustinebit, & aucta movebit, minuta vero nequidem sustinebit.

SCHOLIUM.

Notandum hic est, (præter ea quæ ad prop. præced. monuimus,) Ubi *Vim directè applicandam* dicimus; quo hoc fiat, requiri (illud utique hoc loco intellectum volumus) ut rectæ V T, F H, sint ipsi C P (directioni mobilis) parallelæ. Quippe, si parallelæ non sint; erit, pro obliquitate diversâ, alia atque alia ratio tum tractionis secundum rectam T V, tum contractionis rectæ H T, ad ascensum C vel P: Et quidem (manentibus F V Punctis per quæ transeat funis) prout altius attollitur C vel P, Obliquitas ea continuo variatur. Verum ea consideratio non tam hujus loci est, quam ad Caput secundum spectat, ubi de motuum Obliquitatibus agitur. In Trochleis enim Chordæ vel parallelæ esse solent, vel tantillum a parallelismo declinare ut pro parallelis habeantur.

Fig. 275.

PROP. III.

Si Trochleæ Orbiculi plures sint; Calculo æstimabitur, ex Orbiculorum positione, quanta Vis exposito Ponderi æquipolleat; quæ & aucta movebit.

Nempe; Vis ea quæ est ad Pondus in reciprocâ ratione istius quam habet Virium in V Promotio ad Ascensum Ponderis in P.

Hoc est; in fig. 276. Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 8, 16, &c. (Geometricè proportionales) prout Orbiculorum numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 277, 278. (ubi Funis ductarius terminatur in puncto fixo, ut M.) Vis ad Pondus, ut 1 ad 2, 4, 6, 8, &c. prout Orbiculorum infrà positorum (cum Pondere tollendorum) numerus est 1, 2, 3, 4, &c.

In fig. 279. (ubi ductarii Funis extremum cum Pondere trahendo connectitur ut in K,) Vis ad Pondus, ut 1 ad

1,

1, 3, 5, 7, &c. prout numerus Orbiculorum infrà positorum est 0, 1, 2, 3, &c.

Casus I.

NAm, in Fig. 276. (per prop. 2. hujus) Vis in V æquipollet ejusdem duplo in A: Item, Vis in A, hujus duplo in B: Et Vis in B, ejusdem duplo in C vel P. Atque sic porro quotcunque fuerint Orbiculi. Puta, Si Vis in V dicatur *V*; tantundem valebit, atque 2 *V* in A; vel 4 *V* in B; vel 8 *V* in C vel P: (Atque sic porro quousque opus fuerit.) Hoc est, Vis in V, æquipollebit Ponderi in P, quod ad eam sit in rationis duplæ ratione toties multiplicatâ quot sunt Orbiculi: Nempe, in ratione Duplâ, Quadruplâ, Octuplâ, Sedecuplâ, &c. prout numerus Orbiculorum sit, 1, 2, 3, 4, &c. Fig. 276.

Casus II, & III.

In Fig. 277, 278, 279. ubi Funis Ductarius V A B C, &c. singulos Orbiculos circundans pertingit ad V punctum applicationis Virium: Si intelligatur Pondus pendere ex B (continuato fune A B ad Pondus P vel O P Q, ibique terminato,) Vis æquipollens in V vel A ad Pondus P erit ut 1 ad 1, per prop. 1. hujus. Fig. 277, 278, 279.

Si A B orbiculum B C (ex quo dependeat Pondus) circumiens figatur in D; erit (per prop. 2. hujus.) Vis in V vel A ad Pondus P, ut 1 ad 2; eò quòd, elevato Orbiculo B C (cum appenso pondere,) tantundem abbreviatur utraque rectarum A B, C D; quantum autem utrique demitur, tantundem per A transit ad V; ut sit virium Promotio, Dupla ascensionis Ponderis. Idémque accideret, si funis V A B C D, orbiculum D E circumiens pertingeret ad F ibique figeretur; (non quidem ad Pondus quod sublevandum est, sed ad clavum aliquem seu punctum fixum:). Cùm enim, propter F punctum fixum, recta F E neutiquam abbreviaretur, nihilque inde transiret ad D; perinde est ad Vires in V vel A; sive in F vel E figatur funis, sive in D.

Si verò Funis V A B C D E F continuatus, cum Pondere connectatur in F (ut simul cum pondere punctum F elevetur:) propter rectas tas A B, C D, E F, tantundem abbreviatas singulas quantum est Ascensus Ponderis; omniúmque abbreviationes per A ad V translatas; vel (quod eodem recidit) si abesset orbiculus V A, ultra A protractas; erit Virium Promotio ad Ascensum Ponderis, ut 3 ad 1: adeóque Vis ad Pondus, ut 1 ad 3. per prop. 5. Cap. 2.

Similiter ostendetur; continuato fune VABCDEFG ad H, ibique fixo, Vim ad Pondus (propter abbreviatas quatuor rectas AB, CD, EF, GH,) esse ut 1 ad 4. Et, continuato per I ad K, ibique cum Pondere connexo; ut 1 ad 5. Et, continuato per L ad M: ut 1 ad 6. Atque sic porro prout opus erit. Et quidem, quoties funis extremum cum Pondere connexum est, (ut ad K;) ut 1 ad numerum imparem; quoties extra figitur (ut ad M,) ut 1 ad numerum parem.

SCHOLIUM.

NOtandum hic est; Chordas omnes seu Rectas abbreviandas, ut AB, CD, EF, GH, IK, LM, &c. tanquam Parallelas habitas esse. Et quanquam in Trochleis non rarò contingat, (ut in fig. 278, 279.) ut à Parallelismo nonnihil recedant; eo quòd Orbiculi inæquales esse soleant, quoniam si invicem æquales essent coinciderent Chordæ séque invicem impedirent: tantillum tamen illud est, ut negligi soleat.

Notandum item, Orbiculos superiores, loco suo fixos esse; (quique ad hos, aut horum syntagma, alligatur funis, perinde est acsi ad clavum extrà positum figeretur:) Inferiores autem (eorúmque syntagma) cum Pondere connexos esse, & juxta cum illo attrahi. Ab horum itaque, non ab illorum, numero determinatur Virium Potentia.

Trochlea fig. 278. tantundem valet cum illâ fig. 277. sed ad formam commodiorem redacta; & quæ ad praxin adhiberi solet.

PROP. IV.

Trochleam ita construere, ut Pondus sit ad Vim æquipollentem, in datâ Multiplorum ratione.

Fig. 278, 279. SI data Multiplorum ratio à numero *Pari* denominetur, (ut Dupla, Quadrupla, Sextupla, &c.) Funis ductarii extremum remotius, extrà figatur (putà ad Uncum, Clavum, Palúmve, aut quiddam simile:) Si à numero Impari; (ut Tripla, Quintupla, &c. aut etiam Simpla:) cum Pondere trahendo connectatur: Totidémque adhibeantur Orbiculi quot innuit præcedens Propositio. Et fiet quod imperatum est. Per ibidem demonstrata.

SCHO-

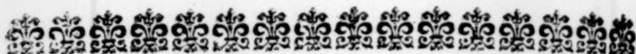
SCHOLIUM.

Possunt autem Trochleæ, non tantum supernè & situ perpendiculari suspendi, utì cum ad Pondera sursum tollenda adhibentur: sed etiam ad Tractionem Horizontalem, seu in alio quocunque situ positam; aut etiam ad amovendum Obstaculum adhiberi. Possuntque non modò seorsim, sed & conjunctim cum aliis Organis usurpari. (Ut, ad fig. 258. junctim cum ergatâ.) Potéstque horum Organorum tum singulorum seorsim (pro suâ cujusque naturâ,) tum simul junctorum, Potentia calculo æstimari. Fig. 258.

Exempli gratiâ. Propter interpositam Ergatam inter A & P, facilitatur Tractio Ponderis in P, (seu augetur valor Virium in A,) in ratione C A ad C B; putà, ut 3 ad 1; adeóque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in P ut 3. Item, propter interpositam Trochleam inter P & Π, (cujus Chordæ abbreviandæ sint, verbi gratia, quatuor,) facilitatur porro Tractio Ponderis Π, ut 4 ad 1, respectu Virium in P; adeóque Vis in P ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 4; seu Vis ut 3, Ponderi ut 12. Ergo, propter utramque interpositam inter A & Π, facilitatur Tractio Ponderis in Π respectu Virium in A, in ratione (3×4=) 12 ad 1: adeóque Vis in A ut 1, æquipollebit Ponderi in Π ut 12. Sed & porro, facilitatur Ponderis Q tractio, propter subjectas Scytalas sive Palangas R, S, (sive Rotulas habeat capitibus adjunctas ut R, sive non habeant ut S,) ob minorem exinde frictionem quam si humi traheretur: At, in quâ ratione sic facilitatur, non ita facile est hic determinare; utpote quod dependeat à variis materiæ circumstantiis Physicis; putà, tum Humi, tum Scytalarum, tum Ponderis his proximè incumbentis, Duritie, Lævore, aliisque ejusmodi, quæ prout magis minúsve adfuerint, plus minúsve facilitant tractionem.

Atque ad eandem formam (mutatis mutandis prout cujus Organi natura postulat) in aliis conjunctis Organis Potentia calculo æstimabitur.

CAP.



CAP. IX.

De Cochleâ.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Si, in Cylindri Recti superficie, intelligatur Recta, basi insistens, circa Axem ferri, motu æquabili: Atque interim, per longitudinem istius rectæ Punctum moveri, motu item æquabili: Quæ à Puncto sic moto describitur Curva, vocatur Helix (*sive* Spiralis) circa Cylindrum; *Rectum, intellige.*

Angulùmque quem facit hæc Curva cum Base Cylindri; Angulum Inclinationis *appellamus: Et, quem facit cum Latere Cylindri, Angulum* Obliquitatis.

Fig. 280. Putà; Si circa Cylindrum rectum AB$\beta\alpha$, cujus basis ABB, feratur (in superficie Cylindri) recta Aα in situm Bβ, atque sic porro; (ut cum describitur Superficies Cylindrica;) motu æquabili: Atque in eâ rectâ, sic motâ, feratur A punctum versùs α; hoc est, à B versùs β; putà, ad H; motu item æquabili: Adeóque, quâ ratione crescant AB, AB, eâdem crescant BH, BH, ubique: Curva AHH, est *Helix* sive Spiralis *circa Cylindrum*; intellige, Rectum. Angulúmque HAB, vocamus *Angulum Inclinationis*; & AHB, *Angulum Obliquitatis.*

Cylindrum autem *Rectum* innuimus; non quòd circa Cylindros alios non possit describi *Spiralis:* Sed quòd ea, quæ nobis hic usui est futura, illa sit quæ circa Rectum describitur. Et quidem, ut *Cylindrus* prout

prout in Elementis definitur, est *Cylindrus Rectus*, (Scalenis enim non convenit ea definitio;) sic & *Spiralis circa Cylindrum*, speciatim solet intelligi de eâ quæ est circa Cylindrum *Rectum*.

Helix autem seu *Helice*, (ἕλιξ, ἑλικὴ, ab ἑλίσσω *volvo*,) Latinè *Spiralis* dici solet, à *Spira*, σπεῖρα, atque hoc à σπείρω *necto*: & *Torsionem* innuit, qualem in Funibus videmus.

II.

Cylindrum Rectum, Helicè *similiter sulcatum*, Cochleam *appellant. Et quidem* Cochleam Marem, *seu Interiorem*, *si sic sulcata superficies Cylindrica* Convexa *sit*: Fœmineam, *seu exteriorem*, *si* Concava; *Hoc est*, *si Solidi cylindricè excavati superficies Concava sic sulcata fuerit.*

Dicitur autem *Cochlea* Latinè, Græcè Κοχλίας, ob *Limacis* (sic item dicti) aliorúmque ejusmodi Testaceorum similitudinem. Nostri *Screw*, Galli *Vis*, appellant. Fig. 282, 283.

Potissimum adhiberi solent Cochleæ, obicibus propellendis, frangendis, aut duriùs comprimendis, aliisque motibus Trusione factis. Atque in eum finem, Mas Foeminæ, hoc est Interior Exteriori inrodi;

Soletque forinsecus adhiberi Manubrium (aut quod hujus instar est) ut in Ergatis, aliisque similibus Instrumentis: Adeóque Potentia, Axis in Peritrochio, cum hæc Cochleæ conjungi.

PRO-



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Helix circa Cylindrum Rectum, est Curva Similaris, seu Uniformis. Intellige; cujus pars quælibet cuilibet (æquali sumptæ) congruat.

Eadémque, si intelligatur in Planum expandi Superficies Cylindrica, fiet Linea Recta: (aut plures Rectæ.) Idémque, qui priùs erant, manebunt, tum Inclinationis, tum Obliquitatis, Anguli.

Fig. 280. Sumptâ enim (verbi gratiâ) arcui A B, æquali B B, hoc est H b; erit (propter A B ad A B, ut H B ad H B) etiam (dividendo) ut A B ad B B, sic recta H B (hoc est recta H b) ad rectam b H. Adeoque (propter æquales angulos H B A, H B A,) si intelligatur arcus H b, arcui A B (simili & æquali) applicari, congruent; adeóque b H ipsi B H; atque hoc ubique. Et propterea H H, ipsi A H; pars quælibet cuilibet æquali. Quod demonstrandum erat.

Fig. 281. Item; si (expansâ in Planum superficie Cylindricâ) intelligatur arcus A B B fig. 280. in rectam A B B fig. 281. extendi; cui applicentur, ut prius B H, B H rectæ: Cum sit ubique, ut A B ad A B, sic B H ad B H; adeóque A B H, A B H, similia Triangula; erit A H H Linea Recta: Aut etiam, (si dissectâ secundum longitudinem superficie Cylindricâ, secetur etiam Helix,) Rectæ plures. Quod itidem demonstrandum erat,

Cúmque eadem omnino sit superficies A B H plana fig. 281. atque A B H curva fig. 280. nisi quod hic in singulis A B rectis parallelis fiat flexio; quæ Angulos H A B, A H B, neutiquam immutat: Iidem qui prius erant manebunt tum Inclinationis, tum Obliquitatis Anguli. Quod erat ultimò demonstrandum.

SCHOLIUM.



PROP.

A Ffe
dro
quodvis
A B B,
quod ad
aio Prif
tuive,
ubique.
Sed no
circa Cy
Sed n
Helix qu
qualibet
etiam He
quælibet
ci, circa
Angulus
Ab ha
chlearum

Si Coch
(seu
(huju
contr
labet
conti
perm

SEquitu
Cochl
chlearis (
us, intell

SCHOLIUM.

Affectionum harum, posteriores duæ, etiam Spiralibus circa Cylindros Scalenos conveniunt; aut etiam circa solidum Prismaticum quodvis: quod ex demonstratione satis patet. Nempe si intelligatur A B B, non quidem Cylindri basis circularis, sed planum Ellipticum quod ad Latus seu Axem Cylindri Rectum sit: Aut, in solido quovis alio Prismatico, Planum quodcunque fuerit quod ad Axem ejus, Lateve, Rectum sit: Sitque ut A B ad A B, sic respectivè B H ad B H, ubique.

Sed non item Prima; quæ præter Circuli Peripheriam, atque huic circa Cylindrum Rectum Helici, nulli ex lineis Curvis convenit.

Sed neque ita intelligendum est, quasi circa Cylindrum Rectum Helix quælibet cuilibet congrueret; (nam neque Circuli Peripheria qualibet cuilibet congruit, sed æqualium tantum circulorum;) aut etiam Helicum cuilibet circa eundem Cylindrum factarum: Sed, pars quælibet cuilibet Helicis ejusdem; vel etiam diversarum, modo Cylindri, circa quos fiunt, æquales bases habeant, sitque idem Inclinationis Angulus quem cum Cylindri base facit Helix, atque ad easdem partes.

Ab hac autem Helicis similaritate, seu situ uniformi, dependet Cochlearum usus; ut ex propositione sequente patebit.

PROP. II.

Si Cochlea Exterior (quam Fœminam vocant) ita Interiori (seu Mari) conformis sit, ut pars parti aptè respondeat, (hujus Eminentiis illius Cavitatibus congruentibus, & contra;) per Exteriorem permanentem, Interior tota labetur; (partibus sequentibus in præcedentium loca continuè succedentibus:) aut etiam super Interiorem permanentem propelletur Exterior. Fig. 282, 283.

Sequitur hæc ea Propositione præcedente. Cùm enim, (propter Cochleam Helicè sulcatam, & quidem similiter,) Superficies Cochlearis (sive Interior sive Exterior) vel etiam ipsa Cochlearis Soliditas, intelligenda sit, (per def. 1. Cap. 4.) ex Helicibus circa Cylin-

drum rectum, adeóque similaribus, conflari: Si ita constitutæ sint Cochleæ Interior atque Exterior, ut illius portio aliqua hujus correspondenti portioni ita congruat, ut illius Eminentiæ hujus Cavitatibus recipiantur, & contra; etiam pars alia quælibet, respectivè sumpta, similiter congruet; totaque altera per alteram transibit, (succedentibus cujusque Helicis partibus sequentibus in ejusdem præcedentium loca, ut H H in A H, fig. 280.) Unde constat propositum.

SCHOLIUM.

NOtandum hic, utut Cochlearum tum Eminentiæ tum Cavitates ita plerumque fieri soleant, quasi ex Trianguli æquicruris (ut fig. 282.) vel Quadrati aut saltem Parallelogrammi rectanguli, (ut fig. 283.) ductu secundum Helicem illam, cui transversim insistat: nihil tamen impedit, quin pro Triangulo illo seu Parallelogrammo quævis alia figura Rectilinea vel Curvilinea substituatur; modò sic feratur (quod & in illis cavendum erit) ut similem ubique situm ad Helicem illam retineat, quò sulcatio sit ubique sui similis.

Atque etiam, quò Interior Exteriori conveniat, illius Eminentiæ hujus Cavitatibus respondere debent, (& contra,) tanquam ex simili ejusdem figuræ ductu formatæ: ut autem utriusque Eminentiæ ita suis Cavitatibus respondeant, non est necesse.

PROP. III.

Datis in Cochleâ, Ambitu Cylindri, cum Inclinationis Angulo, (seu, quòd hinc resultat, intervallum, secundùm Cochleæ longitudinem æstimatum, duarum ejusdem Spiralis conversionum continuè proximarum;) & Manubrii cui Vis applicatur longitudine, (seu Ambitu quem Vis peragit in unâ Cochleæ conversione;) Cochleæ Vis calculo æstimabitur.

Nempe; ut est Intervallum duarum continuè proximarum Spiralis conversionum (secundum Cochleæ longitudinem æstimatum,) ad Ambitum quem Vis applicata peragit in unâ Cochleæ conversione; sic Vis illa Motrix,

trix, ad Pondus; Obicem, seu Impedimentum cui æquipollet: quæ itaque aucta movebit.

Adeóque; Quò longius est Manubrium, atque Intervallum illud brevius, eò major est (cæteris paribus) Cochleæ Vis.

INtelligatur enim Cochlea C O interior seu Mas, per exteriorem seu Fœminam K fixam, ope Manubrii A C B versando protrudi, adversus Obstaculum sive Impedimentum O; quod itaque, protrusâ Cochleâ, vel propelli debeat, vel (si hoc impediatur per obstinaciam ultrà politi L) comprimi aut confringi. Manifestum est, dum Vis in A applicata, unâ conversione factâ, circulum Centro C describit, cujus diameter sit A B; tantundem protrudi Cochleam adversus Impedimentum O, quantum est Intervallum E G; perveniente scilicet D ad E, atque E (circuitu per F facto) ad G, atque G ad H, & sic porro. Si itaque fiat, ut Circuli radio C A vel diametro A B descripti peripheria, ad rectam E G, sic Pondus seu Impedimentum O, ad Vim in A; Vis Ponderi seu Impedimento Æquipollebit: per prop. 5. Cap. 2. Adeóque aucta movebit: per prop. 11, 12. Cap. 1. Fig. 282.

Patet hinc; Quò longius est Manubrium C A, vel A B, (in partem alteram vel utramque protractum;) Item, Quò minus est Intervallum E G, (sive id fiat propter minorem Cylindri diametrum, sive propter minorem Inclinationis Angulum, sive propter utrumque;) eò fortiùs aget Cochlea, cæteris paribus.

Idem similiter ostenderetur; si fixâ Interiore Cochleâ C O, puta in trabe ligneâ L; conversa Cochlea Exterior A B, interjectum quidpiam comprimeret: Seu quod hujus instar sit. Idémque, aliis innumeris Cochleas applicandi modis, pariter accommodabitur. Fig. 283.

SCHOLIUM.

AT interim hic nulla ratio habita est Impedimenti quod ex Frictione oritur, quod tamen in Cochleis magnum esse potest; (uti nec in aliis Organis habita est ratio difficultatis quæ est in ipso Organo movendo:) Sed siquis istius etiam rationem habere velit; addendum erit illud ex Frictione Impedimentum, ei quod est in ipso Obstaculo O amovendo, comprimendo, frangendo, aliasve amoliendo: totúmque illud Impedimenti loco habendum erit in valore Vis motricis æstimando.

PROP. IV.

Datum Pondus ſeu Impedimentum, datâ Vi, Cochleâ movere.

Fig. 282, 283. CUm in Cochleâ ſic conſtructâ, ſi ſit, ut Peripheria Circuli AB, ad rectam EG, ita Pondus, Obex, vel Impedimentum quodvis datum ad datam Vim; Vis Impedimento æquipolleat; (per prop. præced.) Si fiat ea ratio aliquantò major; Vis præpollebit, adeoque movebit. Per prop. 11, 12. Cap. 1.

PROP. V.

Spiralis circa Cylindrum, Longitudinem exhibere.
Et quidem, ſive Cylindrus rectus ſit, ſive Scalenus; ſive etiam pro Cylindro ſubſtituatur Solidum quodvis Priſmaticum.

Fig. 280, 281. OStenſum eſt, (ad prop. 1. hujus,) Curvam Spiralem AHH, fig. 280. eandem eſſe atque AHH rectam, fig. 281. (expansâ ſcilicet in Planum ſuperficie Cylindricâ.) Datur autem rectæ AHH fig. 281. longitudo: (utpote, cujus quadratum æquale eſt duobus ſimul quadratis rectarum ABB, BH, fig. 281. hoc eſt, ABB curvæ, rectæque BH, fig. 280.) Datur igitur & curvæ AHH fig. 280. longitudo; (utpote quæ illi rectæ æqualis eſt.) Quod erat faciendum.

Atque idem ſimiliter oſtendetur in Cylindro Scaleno: Alióve Solido Priſmatico vel Columnari quovis, ſive Rectum ſit, ſive Scalenum; (dummodo intelligatur, ABB planum, ejuſdem Lateri Axive Rectum eſſe; ipſaſque rectas BH, BH, ipſis AB, AB, rectis curviſque aut mixtis proportionales:) per ea quæ oſtenſa ſunt in Schol. prop. 1. hujus.

PROP.

PROP. VI.

Cochleæ Soliditatem exhibere.

Intelligatur Cylindri Cochleæ inscripti superficies Curva, in Planum A B β α parallelogrammum expandi: Atque in eo recta A H H, eadem quæ fuerat, in superficie Cylindricâ, curva Spiralis, cujus ductum sequitur Cochlea.

Intelligatur porro, secto per Axem Cylindro, in unâ aliquâ Cochleæ revolutione, Sectio facta D E F; (puta Triangularis, Quadrata, sive quælibet, pro expositæ Cochleæ natura; cujus Figuræ magnitudinem datam supponimus, ejúsque Centrum gravitatis M notum.) Cujus itaque Basin (in latere Cylindri inscripti positam) obliquè secet, secundum Obliquitatis angulum H A α, seu A H B.

Si itaque intelligatur, super A B β α planum, in rectâ D E, ad angulos rectos insistere figura data D E F; atque (eisdem ad planum angulis retentis) super A H H rectam moveri, retento eodem Obliquitatis Angulo: Manifestum est, Prisma descriptum iri cujus Basis est ipsa D E F, Latus autem ipsi A H H æquale, sed Altitudo quanta est recta A B B.

Adeóque (propter Prismata, super æquales bases, altitudinibus proportionalia,) tantundem erit Prisma Scalenum D E F H H, atque Prisma Rectum D E F B B: Nempe, quantum est quod fit ex D E F plano, in altitudinem A B B ducto.

Intelligatur denum, planum illud A B β α, in superficiem Cylindricam (uti priùs fuerat) curvatum; manente lineæ A B B longitudine: Manente item ejusdem ad D E F planum positione perpendiculari. Unde fiet, ut recta quam priùs descripserat F punctum (ipsi A B B æqualem) protracta jam in arcum majoris circuli similem ipsi A B B, longior jam futura sit (propter curvaturam) quam prius fuerat. Idemque de arcubus qui ab aliis describuntur ejusdem D E F punctis, quæ sunt extra D E rectam, intelligendum erit.

Et propterea majus erit solidum sic curvatum, quam fuerat Prisma. Quantum nempe est, quod fit ex arcu qui ab M (ipsius D E F centro gravitatis) describitur, in ipsam D E F ducto. per prop. 12. Cap. 5.

Cúmque hoc perinde valeat, in situ A B B, atque in situ A H H: Si intelligatur D E F figura plana (quam in unâ aliquâ Cochleæ circulatione

tione facit Planum per Axem) in rectam duci quæ æqualis sit arcui circulari quem describeret ejusdem D E F Centrum gravitatis M, secundum ductum arcûs A B B latum, (circulatione unâ vel pluribus, perfectis vel imperfectis prout expositæ Cochleæ Circulationes esse contigerit:) habebitur (quicunque fuerit Obliquitatis Angulus) Cochleæ magnitudo. Et quidem (cum eadem utrobique valeat demonstratio) sive Cochlea Mas fuerit, sive Fœmina. Quod erat propositum.

Sin porro Cylindri, cui adjacet Cochlea, magnitudinem adjungere libeat: id facilè fiet ob notam Cylindri magnitudinem: per 90 prop. 12. Cap. 5.

SCHOLIUM.

IDem valeret, quod ad Solidi magnitudinem spectat, si, pro verâ Cochleâ, substitueretur aliud solidum, ex simili ductu ejusdem D E F plani per curvam A H H, aliter constitutam; putà, sumptis BH, BH, non quidem in ipsarum A B, AB, ratione, sed in harum ratione duplicatâ, triplicatâ, subduplicatâ, subtriplicatâ, aliâsve constitutâ; vel etiam per AHH curvam quamlibet. Quippe, non modò Prisma Scalenum utcunque Inclinatum, sed & utcunque Distortum, æquatur Prismati Recto æque alto: (Quod in Tractatu *de Conicis sectionibus*, prop. 3, 4. ostendimus:) Atque Curvatura Cylindrica utrobique tantundem præstat. Verùm de his, aliisque similibus, (cum ad præsens negotium non spectent,) non erit hic expatiandi locus.

CAP.

CAP. X.

De Motibus Compositis, Acceleratis, Retardatis, & Projectorum.

PROP. I.

Si, Mobili in Motu posito, accedat nova Vis, seu novus Impetus, secundum eandem directionem; fit Motus Acceleratio.

Si Impedimentum, seu Vis contraria: fit Retardatio.

Et utrobique pro ratione novi istius sive Impetûs, sive Impedimenti, seu Vis contrariæ.

Adeoque si Impedimentum seu Vis contraria sit Vi positâ minor; perseverabit Motus ad easdem partes, celeritate minuta.

Si æquale; Motus tolletur: aut etiam si Impedimentum præpolleat.

Sin præpolleat Vis contraria; ponetur etiam Motus ad partes contrarias.

Sit A mobilis, secundum rectam A B moti, Celeritate C, Pondus P: Adeóque Vis seu Impetus quo movetur $V = P C$: per prop. 27. Cap. 1. Idemque Motus eâdem Celeritate, nisi accedat Impedimentum, perseverabit; etiamsi non accedat nova causa motrix. per prop. 11. Cap. 1. (Quippe concepto Motui tollendo, tantundem requiritur, quantum ponendo requireretur si non esset.) Accedat autem in B nova Vis seu novus Impetus, secundum eandem directionem, puta ut nV: Adeóque sit Vis tota, ut $V + nV = PC + nPC$. per prop. 8 & 27. Cap. 1. Cum itaque idem sit, quod prius, Moti Pondus P; fiet (diviso $PC + nPC$ per P) celeritas $C + nC$. per eandem prop. 27. Fig. 285.

Cap.

Cap. 1. Adeóque acceleratur Motus, in ratione $1 + n$ ad 1. Quod demonstrandum erat. Eâdémque celeritate (nisi quid aliud intercedat) deinceps movebitur, putà ad *D*. per prop. 11. Cap. 1.

Sin accedat Impedimentum aut Vis Contraria, ut nV, (quod itaque signo — notandum erit:) Adeóque Momentum seu Vis jam superstes (per prop. 8 vel 10. Cap. 1.) sit $V - nV = PC - nPC$: Et, (propter idem, quod prius, Pondus *P*,) Celeritas $C - nC$. per prop. 27 Cap. 1. Motus minuitur seu retardatur; utpote cujus Celeritas jam sit ad pristinam, ut $1 - n$ ad 1. Quod itidem demonstrandum erat. Eâdémque Celeritas (nisi quid aliud intercedat) deinceps perseverabit, per prop. 11. Cap. 1.

Adeóque, si nV minus sit quàm V; seu n quàm 1: manebit adhuc motus ad easdem partes; sed celeritate minutâ, nempe $C - nC$.

Si nV sit ipsi V æquale, seu $n = 1$: Motus tollетur; propter Impedimentum Momento æquale: adeóque $C - nC = 0$ Celeritas nulla.

Atque hæc quidem indifferenter sive nV sit simpliciter Impedimentum, sive sit Vis contraria. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Si verò nV majus sit quam V; (adeóque $V - nV$ quantitas negativa; per prop. 8. Cap. 1.) sitque nV simpliciter Impedimentum: adhuc fortius sistetur Motus, (propter Impedimentum Momento præpollens, adeóque potens etiam Majorem Motum sistere:) per prop. 11. Cap. 1.

Sin nV (ipsi V præpollens) sit (non simpliciter Impedimentum, sed) Vis contraria: non modò totus qui prius fuerat motus tolletur, sed ponetur contrarius, per prop. 12. Cap. 1. Celeritate $-C + nC$; per prop. 27. ejusdem. Quæ erant ultimo demonstranda.

PROP. II.

Si Vis Motricis, per se æquabilis, continua fiat applicatio; producetur Motus continuò Acceleratus.

Et quidem ita Acceleratus, ut temporibus æqualibus æqualia concipiat Celeritatis incrementa: Quem Motum vocant *Æqualiter Acceleratum.*

Si Vis Impeditivæ, per se æquabilis, similis fiat applicatio; similis prodibit Motûs Retardatio. Quem Motum vocant *Æqualiter Retardatum.*

Et

Et quidem hoc eousque donec totus tollatur; vel etiam (si Impedimentum illud sit à Vi contrariâ) ponatur contrarius.

INtelligatur enim Causa Motrix aliqua, uno Temporis momento, Mobili imprimere gradum Celeritatis ut 1. Gradus hic, nisi fuerit Impedimento aliquo sublatus, etiam sine novâ Causâ perseverabit. per prop. 11. Cap. 1. Eadem verò Causa, similiter agens, secundo item Momento applicata, tantundem efficiet; per prop. 7. Cap. 1. Adeóque (perseveranti gradui primo) secundum superaddet. Et similiter tertio momento (duobus illis perseverantibus) superaddet tertium. Atque sic deinceps.

Adeóque (sumpto initio Seriei à principio Motûs) Celeritatum gradus (adeoque & Longitudines emensæ; per prop. 23. Cap. 1.) Erunt, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu (quod in infinitè exiguis tantundem valet, per prop. 1. Cap. 5.) ut 0, 1, 2, 3, &c. vel etiam, ut 1, 3, 5, 7, &c. arithmeticè proportionales; seu, ut rectæ Triangulum Complentes, per def. 1. Cap. 4. (Respicitur autem illic, figura ex parallelogrammis triangulo Circumscripta; justo Major: istic, Inscripta; justo Minor: hic, intermedia, partim Circumscripta, partim Inscripta; ipsi Triangulo Æqualis: ut ad prop. 1. Cap. 5. dictum est.) Adeoque emensæ Longitudines, ab initio computatæ, ut Triangulorum illorum Plana quæ complent illæ rectæ: adeoq; in duplicata ratione Temporum. Fig. 286.

Si verò, non ab ipso Seriei initio, principium sumamus; sed ab acquisito seu posito aliquo Celeritatis gradu; putà, si à posito Celeritatis gradu ut C initium sumamus; similiter ostendetur, continuis momentis sequentibus, Celeritatis gradus futuros $C+1, C+2, C+3,$ &c. seu $C+1, C+3, C+5,$ &c. Hoc est, ut rectæ in Trapezio, seu Triangulo truncato. Quale autem sumendum erit Trapezium, facilè determinabitur ex ratione quam habet Celeritas ultimo acquisita; ad Celeritatem primò positam: quippe inde determinabitur ratio parallelarum in trapezio laterum maximi ad minimum; eritque Triangulum super eorum maximo æque altum, ad Trapezium, ut maximum illud ad summam utriusque; Altitudine sumptâ qualibet. Fig. 287.

Eodem modo ostendetur, in motu Retardato: Puta, si, posito aliquo celeritatis gradu quo feratur mobile, ut C, intelligatur Vis Impeditiva, in se æquabilis, continuò accedere; quæ propterea singulis momentis tantundem demat: Fient celeritatis gradus continuè sequentes, ut $C-1, C-2, C-3, C-4,$ &c. putà usque ad $C-C=0$, ubi motus primò positus planè absumitur. Fig. 288.

Adeoque, si porro continuetur ablatio, puta ad $C—C—1$, $C—C—2$, $C—C—3$, $C—C—4$, &c. hoc est, ad $0—1$, $0—2$, $0—3$, $0—4$, &c. seu $—1$, $—2$, $—3$, $—4$, &c. sitque Vis illa Impeditiva, non Impeditiva simpliciter, sed in contrarium Motiva: habebitur Motus in partes contrarias, cum celeritatis gradibus 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 12. Cap. 1. Si verò simpliciter Impeditiva sit; ubi ad $C—C$ pervenitur, tollitur Motus; sed quicunque deinceps succedat gradus Impedimenti, utut fortiùs impediat, non tamen in contrarias partes pellit: Supponitur utique Vim Motricem non habere.

Prioris instantiam habemus in Motu Gravium sursum projectorum (seclusâ consideratione impedientis medii;) ubi post superatam à Gravitate Vim sursum projicientem, descendit grave. Posteriorem quadantenus refert motus projectorum (seclusâ gravitatis consideratione) in quamcunque partem; Ubi Medii Densitas, vim projectricem obtundit, & sensim minuit, tandémque tollit; sed non in partes contrarias repellit.

PROP. III.

Si consideretur Gravitas tanquam Vis Motrix deorsum, in se æquabilis, atque continuè applicata:

Descensus Gravium (seclusâ consideratione medii resistentis, & siquid est ejusmodi) est Motus æqualiter Acceleratus.

Adeóque, temporibus quibusvis à principio decidentiæ sumptis, emensæ Longitudines sunt in duplicatâ ratione Temporum.

Putà, sumptis Temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines erunt ut horum quadrata 1, 4, 9, 16, &c.

Temporibus autem invicem æqualibus, à principio continuè consequentibus, primo, secundo, tertio, quarto, &c. ut 1, 3, 5, 7, &c. quadratorum differentiæ, arithmeticè proportionales.

Si verò à posito aliquo seu jam acquisito celeritatis gradu initium sumatur; longitudinibus jam dictis addendum er[...]

erit quantum eâ celeritate, æquabili motu, eo tempore acquisitum foret.

Gravium verò sursum projectorum Ascensus, est motus æqualiter Retardatus.

Et Longitudines ibidem emensæ habentur, si auferantur jam dictæ longitudines à longitudine quæ Celeritate primâ eodem tempore foret acquisita.

SEquitur ex præcedente. Quippe, si intelligatur Grave in A; sublato fulcro, descensum ob gravitatem suam inchoans; momento primo celeritatis gradum acquisivisse, ut 1; secundo, ut 2; tertio, ut 3; & sic deinceps; (propter tantundem celeritatis singulis momentis additum:) adeóque celeritatum gradus temporibus à principio sumptis ubique proportionales: putà ut Tempus A b, ad Tempus A B, sic bβ (celeritatem in b) ad (celeritatem in B) B β: & sic ubique: Cùm Longitudines emensæ, sint Celeritatum gradibus proportionales; erunt omnes longitudines tempore A b transactæ, ad omnes transactas tempore A B; (seu tota longitudo transacta tempore A b, ad totam transactam tempore A B;) ut omnes rectæ complentes A b β triangulum, ad omnes complentes triangulum A B β; Hoc est, ut Triangulum A b β ad ipsum A B β Triangulum; Adeóque in Laterum A b, A B, ratione duplicatâ (propter figuras similes in duplicatâ ratione laterum homologorum.) Ideóque si sumantur tempora A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt Triangula A b β, A b β, &c. (adeóque & transactæ Longitudines,) ut 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, quæ temporibus æqualibus continuè sequentibus, A b, b b, &c. transiguntur; A b β, b β β b, &c. ut eorum differentiæ, 1, 3, 9, 7, &c. Et sic ubique. Fig. 289.

Puta, sumptis in rectâ A E, partibus A B, B C, C D, D E, &c. ipsis 1, 3, 9, 7, &c. proportionalibus: æqualibus illæ temporibus transigentur. Fig. 290.

Si verò intelligatur, non ab ipso motûs initio in A, computus instituendus; sed à celeritatis gradu jam acquisito, ut b β, seu B C; vel, quod tantundem erit, si non suapte tantum gravitate motum concipiat Grave, sed à Vi Motrice extrinsecùs pellatur seu projiciatur, unde Celeritatis gradum concipiat ut b β, (quâ itaque ferretur nisi quid aliud accederet, per prop. 11. Cap. 1.) quæ deinceps ob gravitatis impetum continuè applicatum, continuè (ut dictum est) æqualiter acceleranda sit: erunt Celeritatis gradus, singulis ipsius temporis b B momentis, ut rectæ trapezium b β β B complentes, & Longitudo per id temporis Fig. 289.

 emensa,

emensa, ut ipsum b β β B trapezium ; quæque temporis illius partibus transiguntur Longitudines, respectivis trapezii partibus proportionales. Et quidem si intelligatur B b β parallelogrammum, repræsentare longitudinem emetiendam tempore b B celeritate ubique ipsi b β æquali : triangulum β E β repræsentabit id quod propter accelerationem accedit.

Fig. 291. Similiter si intelligatur Grave, in A, sursum projectum eâ Vi quæ Celeritatem imprimeret ut A α ; quâ perseverante transigendam tempore A B longitudinem repræsentet A B α α parallelogrammum. Ea verò, propter Gravitatem, ut Vim contrariam, contra renitentem ; &, propter continuam applicationem æqualem, tantundem singulis momentis dementem ; continuè minuetur : ablatis rectis α β, α β, triangulum α β B complentibus ; relictis b β, residuos celeritatis gradus repræsentantibus ; donec tandem, ita crescentibus α β, ut fiat α B ipsi A α æqualis, tota Vis sursum tendens exhauriatur ; adeóque in temporis puncto B desinat Ascensus. Sed, crescente porro ob Gravitatem impetu ; non modò non feretur sursum, sed incipiet descendere, (Vi deorsum jam præpollente ;) & quidem (ob continuè crescentem impetum æquabiliter) motu æqualiter accelerato, (ut crescunt c β, c β, rectæ, triangulum B C β complentes ;) donec, facto B β C triangulo, ipsi A α B æquali, tantundem descenderit quantum ascenderat prius : atque adhuc ultra nisi quis Obex impediat.

SCHOLIUM.

PRopositionem hanc Hypotheticè proponimus : quoniam non inter omnes constat, vel quænam sit Gravitatis Causa, vel etiam secundum quam Regulam agat, (variis varias Gravitatis Hypotheses excogitantibus.) Neque nobis hic in animo est, illam in Physicis quæstionem determinare, in cujuscunque præjudicium. Sed, stante illâ Hypothesi Physicâ, (quam vel reapse veram esse, vel ad veritatem quam proximè accedere, Experimenta testantur ;) Theorema Mathematicum, ostensum est.

PROP.

PROP. IV.

Eadem obtinent accelerandi & retardandi rationes, dum fertur Grave per rectam Inclinatam, seu in plano Inclinato; atque per rectam ad Horizontem Perpendicularem: Sed celeritatibus variis pro variâ declivitate.

Hinc sequitur; Eodem tempore per quamlibet circulo inscriptam, diametro Perpendiculari (in Circulo Erecto) vel perpendiculari Succedaneæ (in circulo Inclinato) conterminam, ferri Grave; quo per illam Diametrum.

Item; Eandem celeritatem descendendo acquiri, & ascendendo deperdi, in rectâ inclinatâ; atque in perpendiculari æque alta: Adeóque & eundem utrobique impetum, & percussionem eandem.

NAm per prop. 26. Cap. 2. Obliquitas Plani in eâdem ratione minuit omnium in eo descensuum celeritates; nempe in eâ quam postulat plani declivitas: Hoc est (per prop. 25. ejusdem) celeritates erunt in declivitatum ratione, seu in reciprocâ rectarum æquè altarum. Adeóque quæ erant in A P B perpendiculari, ut 1, 2, 3, 4, &c. erunt in inclinatâ A O, si hæc sit illius dupla, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, &c. si tripla; ut $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}$, &c. & similiter in aliis proportionibus. Fig. 292.

Vel etiam, idem ab origine demonstrabitur ut in prop. 2, 3. hujus. Nempe si, quod in A B gravitat ut 1, idem in A O (propter obliquitatem) gravitet, verbi gratiâ, ut $\frac{1}{2}$; unde momento primo, seu tempore exiguo, acquiratur celeritas ut $\frac{1}{2}$: ejusdem applicatione continuâ tempore secundo, acquiretur alterum $\frac{1}{2}$; tertio, tertium, &c. adeóque (prioribus permanentibus) celeritates erunt, ut $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}$, &c. eâdem ratione cum ipsis 1, 2, 3, 4, &c.

Atque hinc colligitur Galilæi propositio illa; Eodem tempore percurri A O, vel O B, subtensas quaslibet circuli Diametro perpendiculari A B conterminas, quo ipsam A B diametrum. Cum enim (per jam demonstrata) celeritates omnes in A O, ad respectivas in A P B, sint

sint in reciprocâ ratione rectarum æquè altarum; hoc est, ut AP ad AO; hoc est (propter similia triangula) ut AO ad AB, (longitudines transactæ ad invicem:) eodem tempore percurrentur AO, AB. Idemque similiter ostendetur de OB, seu huic parallelâ, (adeóque æquali & pariter inclinatâ) A*β*.

(Quódque de AB perpendiculo in circulo erecto ostensum est; similiter obtinet de AB perpendiculi succedaneo, in circulo inclinato: propter omnes in eodem plano descensus in eâdem ratione impeditos, per prop. 26. Cap. 2.)

Cúmque (ut jam ostensum est) celeritates in AO, ad respectivas in AB, sint ubique proportionales; sintque eodem tempore percursæ AO, AB; erit celeritas in O (lati per AO,) ad celeritatem in B (lati per AB,) ut AO, ad AB. Sed & ita est celeritas in P ad eandem celeritatem in B (lati per APB.) Nam (per prop. 2, 3, hujus,) transactæ longitudines sunt in duplicatâ ratione temporum; adeóque & celeritatum, utpote quæ sunt temporibus à principio sumptis proportionales. Adeóque Celeritas in P, ad celeritatem in B, in subduplicatâ ratione AP ad AB; hoc est, (propter AP, AO, AB, continuè proportionales,) ut AO ad AB. Eadem igitur est celeritas in O, quæ in P. (Idémque similiter obtineret, ob rationem modò dictam, si fuerit APO planum inclinatum, & AP perpendiculi succedaneum.) Adeóque & Impetus utrobique æqualis (cum idem sit utrobique tum Pondus tum Celeritas;) & æqualis Ictus seu Percussio: ut in Capite de Percussione ostendetur.

Quæque de Descensuum Accelerationibus hîc ostensa sunt: eadem similiter de Ascensuum Retardationibus ostendentur. Quippe Obliquitas Plani eâdem ratione Ascensum adjuvat quâ impedit Descensum. per prop. 25. Cap. 2.

PROP.

PROP. V.

Si, in Motu continuè Accelerato, Celeritates (ab initio computandæ) ſint in Temporum ratione Duplicatâ: Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Triplicatâ.

Adeóque, ſumptis temporibus, ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines tranſactæ erunt, ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri Cubi.

Si Celeritates ſint in Temporum ratione Triplicatâ, Quadruplicatâ, &c. Longitudines emenſæ, erunt in Temporum ratione Quadruplicatâ, Quintuplicatâ, &c. Unâ ſemper vice plus multiplicatâ, quam Celeritates.

Adeóque, ſumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. longitudines erunt, ut 1, 16, 81, 256, &c. numeri Biquadrati: vel, ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri Surdeſolidi. Et ſic deinceps.

Longitudinéſque, continuis temporibus æqualibus tranſactæ, ut illorum Cuborum, Biquadratorum, Surdeſolidorum, &c. differentiæ.

INtelligatur enim, Motu ab A inchoato, in Temporis A b B momentis b, B, Celeritates eſſe in duplicatâ ratione rectarum A b, A B; hoc eſt, ut ipſarum A b, A B, Quadrata: Putà, ut rectæ b β, B β, complentes A B β complementum Semiparabolæ. Erunt itaque Longitudines temporibus A b, A B, emenſæ, (per modò demonſtrata ad prop. 2. hujus,) ut ipſa Complementi plana A b β, A B β; hoc eſt (propter trilinea A b β, A B β, ſubtripla Parallelogrammorum A b β, A b B, per prop. 6. Cap. 5.) ut ipſa A b β, A b B, rectangula ſeu parallelogramma. Sunt autem, propter altitudines ipſis A b, A B, vel æquales vel ſaltem proportionales; baſéſque b β B β, in earundem ratione duplicatâ; Parallelogramma ipſa (utpote in ratione ex Baſium & Altitudinum rationibus compoſitâ) erunt in earundem ratione Triplicatâ. Fig. 293.

Et

Et propterea, sumptis ab initio temporibus A b, A b, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. respectivæ Celeritates erunt, ut 1, 4, 9, 16, &c. & longitudines ab initio transactæ, ut 1, 8, 27, 64, &c. Adeóque, temporibus æqualibus, continuè à principio sumptis, 1, 7, 19, 37, &c. Cuborum differentiæ.

Similiter ostendetur; sumpto Complemento Paraboloidis Cubicalis (in quo rectæ b β, B β, sunt in rectarum A b, A B, ratione Triplicatâ;) Longitudines emensas (trilineis A b β, A B β, proportionales,) esse in earundem ratione Quadruplicatâ.

Atque sic deinceps, pro potestatibus aliis, si sumantur Paraboloides respectivè conformes. Constat itaque propositum.

PROP. VI.

Si Mobile, ob duas causas Motrices, duos concipiat directos impetus; putà secundum duas rectas positione datas, angulum facientes; Celeritatibus in se æqualibus, ad invicem verò eisdem rectis, ut parallelogrammi lateribus longitudine datis, proportionalibus: feretur Mobile per Parallelogrammi diagonium, eâ celeritate quæ sit ad datas, ut diagonium illud ad respectiva latera.

Adeóque tantundem est, lationem quod spectat, sive feratur Mobile motu ex duobus composito qui directiones habeant secundum Parallelogrammi latera, & celeritates ipsis proportionales; sive Motu simplici, secundum ejusdem diagonium, & celeritate proportionali. Quippe, utrovis modo, eodem tempore, per eundem tramitem, eâdem celeritate feretur.

Idémque Motui ex pluribus composito similiter accommodabitur; sive Directiones habeant in eodem plano omnes, sive secus.

Potéstque idem propterea Motus infinitis modis componi.

Fig. 294. INtelligatur A Mobile, ob causam aliquam Motricem, Impetum concipere secundum Directionem A α; aliúmque, ob causam aliam Mo-

ut 1, 2,
c longi-
tempo-
&c, Cu-

s Cubi-
e Tripli-
ortiona-

boloides

---

iat di-
ſitione
alibus,
ni late-
r *Mo-*
e quæ
a.
e fera-
ctiones
lerita-
ndum
Quip-
trami-

ommo-
no om-

com-

mpetum
m aliam
Mo-

atrice
Celerita
ralelogr
Mani
i recta
B; ad
m ubiq
aterum A
re inte
ata for
atur A
m Aα,
AB: Ce
erit recta
mmi.
otu ſimp
ito,ſecu
onem A
leritate,
Cúmque
m infiniti
rum, q
Motus ſimp
mponi.
Intelligat
endum tr
s Aα, A
ibus illis
rum ſimp
c,motum
dum AC
m Aγ ce
m ſuis ret
Aγ Cel
Idem ſimi
AB, AC, r
ndem Par
o Caſu A
hoc fuerint
ntes, ſecur
m.

[Mo]tricem, ſecundum Directionem A B : ſitque illius Celeritas ad [C]eleritatem hujus, ut A α recta ad rectam A B. Et compleatur pa[ra]llelogrammum, cujus Diagonium ſit A β.

Manifeſtum eſt, quo tempore A, ſecundum directionem A α, feratur [ad] rectam α β ; eodem ferri ſecundum directionem A B, ad rectam [B β]; adeóque fore in puncto β. (Et ſic ubique.) Et, propter ean[dem] ubique celeritatum rationem, adeóque eandem ubique rationem [late]rum A α, A B, & communem Directionum Angulum A ; ſimilia [for]e inter ſe omnia A β parallelogramma. Et propterea in eâdem [rec]tâ fore omnia β puncta. Cúmque eodem tempore per A β rectam [fera]tur A mobile ; quo ſimul ferri intelligatur tum ſecundum directio[nem] A α, Celeritate A α ; tum ſecundum directionem A B, celeritate [A] B: Celeritas motûs per A β, ad celeritates illas reſpectivè ſumptas ; [eri]t ut recta A β (diagonium) ad ipſas A α, A B, rectas, latera parallelo[gram]mi. Adeóque tantundem erit, lationem quod ſpectat, ſive feratur [mot]u ſimplici ſecundum directionem A β celeritate A β ; ſive motu con[pos]ito, ſecundum directionem A α celeritate A α, atque ſecundum dire[ctio]nem A B celeritate A B, ſimul. Quippe eodem tempore, eâdem [celer]itate, atque in eodem tramite, feretur Mobile ab A ad β.

Cúmque eadem A β recta, poſſit eſſe Diagonium Parallelogrammo[rum] infinitis modis variatorum, totidem Motuum Compoſitiones innu[mer]arum, quarum ſingulis æquipollet (per jam demonſtrata) idem [M]otus ſimplex : Manifeſtum eſt eundem poſſe Motum infinitis modis [com]poni. Quod etiam ulteriùs patebit, ex caſibus ſequentibus.

Intelligatur deinde, idem A mobile, ob totidem Cauſas Motrices, [ſecu]ndum tres in eodem Plano Directiones A α, A B, A C ; celeritatibus [ips]is A α, A B, A C, proportionalibus. Oſtendetur, ut priùs, motum ex [duo]bus illis ſecundùm A α & A B compoſitum ; tantundem eſſe atque [mot]um ſimplicem ſecundum A β celeritate A β. Sed & ſimiliter oſten[detu]r, motum compoſitum ex hoc (duobus æquipollente) atque ex eo ſe[cun]dum AC celeritate A C, tantundem eſſe atque ſimplicem per Diago[nium] A γ celeritate A γ. Ergo, qui ex tribus illis per A α, A B, A C, [(cu]m ſuis reſpectivè Celeritatibus,) componitur ; æquipollet ſimplici [pe]r A γ Celeritate A γ. Fig. 295.

Idem ſimiliter oſtendetur, ſi intelligantur tres illæ Directiones A α, [A] B, A C, non in eodem plano omnes, ſed in diverſis ; putà, (ut tria [qu]ædem Parallelepipedi Latera communi puncto angulari coeuntia, [qu]o Caſu A γ erit Parallelepipedi Diagonium ;) ut etiam, ſi plures [fu]erint Directiones, utcunque ab eodem A communi puncto pro[cede]ntes, ſecundum quas A Mobile feratur. Conſtat itaque propoſi[tu]m. Fig. 295.

SCHOLIUM.

Quæ de Motibus per A α, A B, A C, æquabilibus ostensa sunt; similiter ostenderentur si essent illæ omnes similiter Accelerati vel similiter Retardati; non autem si dissimiliter.

PROP. VII.

Si Motus Æquabilis, cum Accelerato vel Retardato componatur; vel Motus Accelerati aut Retardati, sed dissimiliter, componantur: Alia atque alia linearum species emerget, per quam feretur Mobile, pro variâ compositionum ratione.

Exempli gratiâ. Si Motus Æquabilis, cum Æqualiter (seu in ratione Temporum) Accelerato componatur; (adeóque motus acceleratus in duplicatâ ratione motûs æquabilis:) Latio erit in Curva Parabolica: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) longitudines emensæ, erunt ut respectiva plana Hyperbolica, Curvæ & conjugato Axi interjecta.

Si Motus Æquabilis componatur cum Accelerato in temporum ratione Duplicatâ, (ut hic sit ad illum in ratione Triplicata:) Latio erit in Curvâ Paraboloidis Cubicalis: Et Longitudines emensæ, ut respectivæ istæ curvæ particulæ, seu spatia plana ipsis proportionalia.

Si Motus Æqualiter Acceleratus (seu acceleratus in ratione Temporum) hoc est, qui sit in Duplicatâ ratione temporum, cum motu qui sit in Temporum ratione Triplicatâ (seu accelerato in temporum ratione Duplicatâ) componatur: Latio erit in Curvâ Paraboloidis Semi-Cubicalis: Et (si Motuum Directiones sint ad invicem rectæ) Longitudines emensæ, ut respectiva Spatia Parabolica, Axi & Curvæ interjecta.

Siniléque in aliis casibus Calculo determinabitur.

INtelligatur A T T recta, secundùm quam, Vi aliquâ Motrice, propellatur A mobile, Motu Æquabili; adeóque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A T, A T, &c. erunt item ut 1, 2, 3, 4, &c. per prop. 26. Cap. 1. Fig. 297, 298.

Atque intelligatur idem Mobile, aliâ Vi Motrice, impelli, secundùm directionem A D, motu æqualiter accelerato; adeóque, sumptis temporibus ut 1, 2, 3, 4, &c. emensæ longitudines A D, A D, &c. erunt ut 1, 4, 9, 16, &c. eorum quadrata. per prop. 2, 3. hujus

Si itaque; dum, motu illo, fertur A mobile, Longitudine A T; hoc est, ab A D ad huic parallelam T O; feratur, motu hoc, longitudine A D; hoc est, ab A T ad D O; & sic ubique: Erunt ubique A D, A D; hoc est, T O, T O; in rectarum A T, A T; hoc est, D O, D O, ratione duplicatâ. Adeóque (propter naturam Parabolæ) quæ, per omnia O, O, puncta, transit Curva, (quæ est Lationis via, utpote in quâ mobile semper erit,) est Parabola. Quod demonstrandum erat.

Atque hoc perinde obtinet sive ad angulum rectum coeant in A rectæ A T, A D, (ut ubi A est vertex Axis,) sive ad alium quemvis (ut ubi A vertex est cujusvis alterius diametri:) Et quicunque fuerit utrobique Celeritatis gradus; hoc est, quodcunque habeat Parabola illa Latus Rectum. Quippe semper erunt T O, T O, rectæ, in rectarum A T, A T, ratione duplicatâ; ob naturam Parabolæ.

Si verò A sit Vertex Axis, erunt longitudines A O, A O, per quas fertur mobile; Spatiis Hyperbolicis, Curvæ & Conjugato Axi interjectis, respectivè sumptis proportionales. Per ea quæ alibi, in Tractatu de *Curvarum* Ἐυθυνσει, demonstravimus; ubi de Parabolæ Ἐυθυνσει agitur. Fig. 297.

Similiter; positis A T, A T, (pro motu æquabili) in ratione Temporum; & (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione Temporum) A D, A D, in earundem ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus:) Ostendetur, curvam A O O fore Paraboloidem Cubicalem: Propter T O, T O, hoc est A D, A D, in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Triplicatâ. Quod itidem demonstrandum erat. Fig. 297, 298.

Et Curvæ particulis A O, A O, plana proportionalia exhibentur, per ea quæ generaliter ostendimus in Schol. prop. 38. *Arithmeticæ Infinitorum*.

Idémque aliis Accelerationum speciebus accommodabitur, sumptis Paraboloidibus aliis, prout res postulaverit.

Intelligantur demum rectæ AT, AT, non in ipsâ Temporum ratione, sed (pro motu æqualiter accelerato, per prop. 2. hujus) in Temporum ratione Duplicatâ; adeóque Tempora in earundem ratione Subduplicatâ: Item rectas A D, A D, (pro motu accelerato in Duplicatâ ratione temporum,) in temporum ratione Triplicatâ, (per prop. 5. hujus;) adeóque in rectarum A T, A T, ratione Subduplicatæ-Triplicatâ. Erit (propter istius paraboloidis naturam) Curva A O O, paraboloides quam *Semi-cubicalem* appello; cujus Index seu Exponens sit $\frac{1}{2}$. (Puta, in quâ rectæ A D, A D, hoc est, T O, T O; sint in rectarum A T, A T, hoc est D O, D O, ratione Subduplicatæ-Triplicatâ.) Per illam itaque Curvam feretur Mobile, quod Motu ex sic acceleratis composito fertur. Quod item erat demonstrandum.

Istius autem Curvæ partes A O, A O, spatiis Parabolicis proportionales esse, demonstratum est in Tractatu modò memorato, de *Curvarum* Ἐυθυνσει, ubi de *Curvâ Semiparaboloidis Cubicalis* agitur, cui æqualem rectam exhibemus.

Eodem modo de aliis Motuum Compositionibus judicandum erit (mutatis mutandis) Curvâ sic positâ ut Calculus indicaverit.

PROP. VIII.

Motus Projectorum (exclusâ consideratione resistentis Medii) est in rectâ Parabolicâ.

Intellige; Nisi fiat Projectio illa vel directè Sursum, vel directè Deorsum: Quo casu motus erit in lineâ Rectâ; Sursum, Retardatus; Deorsum, Acceleratus.

Fig. 297. SEquitur ex præcedente. Estó enim Vis à Projectore impressa, secundum directionem A T T; Mobile impellens Motu Æquabili, adeóque eâdem ubique Celeritate: per prop. 11. Cap. 1. Interea dum Gravitas motum imprimit deorsum, putà secundum directionem A D D, æqualiter acceleratum: per prop. 3. hujus. Adeóque, qui ex utrisque componitur, est per A O O Curvam Parabolicam: per præcedentem.

Sin fieri intelligatur projectio directè sursum, vel directè deorsum: degenerabit Parabola in lineam Rectam; (propter projectionis motum, & motum gravitationis, in eâdem rectâ;) in quâ fiet motus vel Retardatus sursum, vel Acceleratus deorsum; de quibus supra dictum est.

SCHO-

SCHOLIA.

HUc spectant motus projectorum ex Bombardis, Arcubus, Balistis, aliisque Machinis projicientibus, aut ex projicientis manu, aliâve vi quâlibet, ubi projecta Gravia, postquam à projiciente separantur, impresso Impetu feruntur.

Dico autem, *exclusâ consideratione resistentis medii:* Quoniam, ob hanc resistentiam, Motus secundum directionem projicientis, qui supponitur Æquabilis, reverà minuitur, & sensim extinguitur, ob continuam cum medio resistente luctam: & propterea sensim deficit à linea Parabolica.

Atq; hinc fit, quod Globuli ex Bombardis, in majori distantiâ minùs feriunt. Si enim, reverâ, eâdem celeritate procederet latio secundum rectam A T, (quicquid sit de motu descensûs secundum A D,) eâdem violentiâ feriret objectum Murum (cui AT recta sit) sive longiùs, sive in propinquo positum: (per prop. 21. Cap. 1.) contrà quàm experientiâ compertum est.

CAP.



CAP. XI.

De Percussione.

PROP. I.

Si Grave motum, tanquam perfectè Durum consideretur; atque in Obicem sive Obstaculum firmum directè impingat, quod itidem perfectè Durum sit; Sitque Vis Gravi sic moto æquipollens, Minor quàm est Vis Obstaculi motui resistentis, vel etiam ipsi Æqualis: Motus sistitur.

Sin Major fuerit: continuatur motus, superato Obice; sed eâ ratione tardatus seu diminutus, quam exigit Obicis resistentia; quam Calculus indicabit.

Nempe, Si ex Momento (quod ex Pondere & Celeritate componitur) tantundem auferatur quantum Obici amoliendo æquipolleat; residuúmque, si quod sit, per Pondus dividi intelligatur: prodibit gradus Celeritatis residuæ.

Fig. 299. ESto Gravis Moti A, perfectè Duri, Pondus mP, Celeritas rC, cui æquipolleat Momentum seu Vis $mrPC$. per prop. 27. Cap. 1. Atque Obstaculum B cui directè impingit, Vim resistendi habeat ut $nsPC$.

Si Minor sit $mrPC$, quàm $nsPC$; præpollebit Impedimentum: Sin Æqualis; saltem æquipollebit Impedimentum: Et Motus utroque casu sistitur. (Erit utique, si æquales sint, $mrPC - nsPC = nsPC - mrPC = 0PC$, vis nulla: Si Impedimentum præpolleat, pro impedimento reputandum est.) Per prop. 1[illegible], 11. Cap. 1.

Sin

Sin Major sit *mrPC*, quàm *nsPC*; præpollebit Vis; adeóque superabitur Impedimentum; Motúsque continuabitur, sed Diminutus. per prop. 10, 11. Cap. 1.

Quantus autem deinceps futurus sit Motus, & quanta Celeritas; Calculo sic colligitur. Vis præpollens, *mrPC*; unà cum Impedimento contrario, *nsPC*; tantundem valet atque Vis *mrPC—nsPC*, per prop. 10. Cap. 1. (Absumitur utique in Obice rumpendo, prostrando, seu utcunque amoliendo, tantundem Virium seu Momenti, quantum Obicis Firmitati seu resistendi Vi æquipolleat: reliquúmque, si quod est, Ponderi ultrà ferendo impenditur.) Estque Gravis Moti pondus (idem quod prius) *mP*: Ergo Celeritas futura (ut quæ oritur ex Momento per Pondus diviso) $\frac{mr-ns}{m}C$; per prop. 27. Cap. 1.

SCHOLIUM.

PErfectè Durum, appello, quod ictui nequaquam cedit; Adeóque nec Molle, nec Elasticum.

Molle, appello, quod ictui ita cedit ut pristinam figuram amittat: Ut Lutum, Cera, Plumbum, aliáque similia quæ ictu deformantur; aut etiam Corpora Fluida. Ubi enim hoc contingit, Virium pars aliqua in deformando Corpore absumitur, nec tota in Obstaculum impenditur: Cujus itaque seorsum est habenda ratio.

Elasticum appello, quod, utut ictui aliquantisper cedat, se tamen in pristinam formam suopte marte restituit: ut sunt Elateres Chalybei, Lignei, aut cujuscunque materiæ; (nostrates *Springs* appellant;) & Corpora istiusmodi quæ pressa resurgunt, aut quocunque modo a situ debito detorta vim habeat semet restituendi. Quâ de re post agetur Cap. 13. ubi de Resilitione agetur.

Addi etiam hic poterit, ut non tam Fragile sit aut Friabile Corpus Motum, ut ictu frangatur. Quippe tum, Virium pars aliqua frangendo Corpore absumitur.

Eadémque, quam hic supponimus, Durities, etiam in propositionibus sequentibus intelligenda est. Quod hic monitum esto, ne opus sit sæpius id repetere.

Sin objiciat quis (quod & fortasse verum est) ejusmodi corpus nullum esse, quod nihil habeat vel Mollitiei vel Elasticitatis; neque tam firmum aliquod Obstaculum quod ictu vel levissimo non aliquantulum loco moveatur; quasi Lapilli quantumvis exigui ictu, modicâ Vi jacti, Alpina rupes loco nonnihil dimoveretur, aut etiam quæ huic conjuncta

juncta est, ipsa Telluris moles; utut tantillum id sit ut sensu percipi nequeat. Hoc neutiquam obest præsenti negotio. Quotcunque enim fuerint hujusmodi accidentia in complexo subjecto; id nihil impedit, quin abstractione mentis separari possint; atque hæc quæ præ manibus est consideratio, quasi ea non essent, tractari; eaque, si tanti sint ut negligi non debeant, seorsum considerari poterunt.

Directè impingere, hic dicimus, cùm recta secundum quam movetur, per moti Corporis Centrum-Gravitatis & punctum Contactûs ducta, sit, superficiei corporis in quod impingitur, perpendicularis: aut etiam, si non in puncto, sed linea vel superficie se tangant mutuo, cùm recta illa sit huic communi seu lineæ seu superficiei perpendicularis. Si autem Obliquè vel Indirectè impingat; sive ideo fiat quòd recta secundum quam movetur, per Centrum gravitatis transiens, ad punctum tactûs non pertingat; sive quòd, quæ sic pertingit, superficiei corporis in quod impingitur non sit perpendicularis; advocanda hic erunt in considerationem quæ supra de Motuum obliquitate traduntur Capite II.

PROP. II.

Si Grave motum, Gravi Quiescenti directè impingat, sed ita constituto ut aliunde ne moveatur non impediatur: utrumque junctim movebitur, eâ celeritate quam Calculus (Ponderum rationibus & pristinâ Celeritate ritè computatis) indicabit.

Nempe; si Momentum (ex Moti Gravis Pondere & Celeritate compositum) per utriusque simul Pondus dividatur; habebitur futura Celeritas.

Seu (quod eodem recidit) ut simul utriusque Pondus, ad Pondus priùs moti; sic pristina Celeritas, ad post futuram.

(Et quidem, si Quiescens Moto sit pondere æquale, ferentur deinceps celeritate dimidiâ.)

Quæ quidem Celeritas futura, in utriusvis Pondus ducta, exhibebit istius momentum pòst futurum.

Fig. 360. Esto A, Grave motum, secundum rectam A A ipsius Centro-gravitatis descriptam, quæ ad Quiescentis B (cui directè impingit) Centrum

PROI

Centru
junctim
pondus
mPC
utramv
venda a
nius me
cum no
latur :
fica, de
deratio

Pondus

to $mr P$
erat pro

erit $\frac{m}{m-}$

Mon

$\frac{m}{m+n}r$

moti ce

Adeóq

est mr

MA
i

Ubi etia
vis exig
hujusm
Ver
fugiat
repute
rem a
Dato e
pulicis

Centrum Gravitatis pertingat; (nam & hoc requirimus quò Gravia junctim movenda dicantur directè impingere.) Sitque Gravis A, pondus mP, celeritas rC adeóque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: Et Gravis B, pondus nP, (celeritas, utpote quiescentis, nulla in utramvis partem;) Adeóque simul utriusque pondus $mP+nP$. Movenda autem deinceps erunt utraque eâdem celeritate. Quippe B segnius moveri non poterit, propter insequens A: Sed neque celeriùs; cum non moveri aliunde intelligatur quàm quòd ab A sequente propellatur: (Et siquod aliud accedat quod celeriùs propellat; ut Vis Elastica, de quâ alibi dicetur, aut aliud quidpiam; id non est hujus considerationis, sed alterius loci.) Cúm itaque Vi $mrPC$, movendum sit Pondus $mP+nP$; id fiet celeritate $\frac{m}{m+n}rC$: (diviso scilicet Momento $mrPC$, per Pondus $mP+nP$:) per prop. 27. Cap. 1. Quod erat propositum. (Et quidem si pondera sint æqualia, hoc est $m=n$, erit $\frac{m}{m+n}rC=\frac{1}{2}rC$, ut patet.)

Momentum itaque Ponderis nP, priùs quiescentis, jam moti celeritate $\frac{m}{m+n}rC$, erit $\frac{m}{m+n}nrPC$ seu $\frac{n}{m+n}mrPC$; Ponderisque mP, priùs moti celeritate rC, jam verò celeritate $\frac{m}{m+n}rC$; jam fit $\frac{m}{m+n}mrPC$. Adeóque momentum hinc demptum (gravi priùs quiescenti collatum) est $mrPC-\frac{m}{m+n}mrPC=\frac{mn}{m+n}rPC$.

SCHOLIUM.

MAnifestum hinc est, ex quovis minimo cujusvis exigui Gravis impulsu, etiam maximo cuivis quiescenti, motum inferri posse; Uti etiam ex sequentibus patebit, etiam maximi Gravis motum, cujusvis exigui objectu, quadantenus impediri posse seu retardari; vel etiam hujusmodi accessu, quadantenus accelerari.

Verùm hoc tantillum esse potest, ut omnem sensuum perceptionem fugiat: adeóque negligi soleat. Unde fit, ut pro absolutè quiescentibus reputentur aut immobilibus, quæ, si secundum Mathematicum rigorem æstimanda forent, dicenda forsan essent aliquantillum moveri. Dato enim, quod tota Telluris moles fluido Æthere suspensa, cùm saltu pulicis percussa sit, dicenda esset loco suo tantillum dimoveri; aut

etiam translato de loco in locum (quod sæpe fit) acervo satis gravi, Tellurem totam, propter mutatum Centrum Gravitatis, similiter mutare sedem; (quod quidni fieri possit haud facilè dixeris; nedum ubi majores terrenæ molis concussiones seu mutationes contingunt:) Cùm tamen hæc tantilla sint ut sensum omnem fugiant; minimè mirandum est, si, hisce non obstantibus, immota censeatur. Præsertim cùm ipsa Aeris sive Densitas sive Gravitas(utut sensui non planè imperceptibilis) negligi non raro soleat in motibus æstimandis.

PROP. III.

Si Grave subsequens, segniùs secundum eandem rectam præcedenti, directè impingat: utriusque deinceps eadem erit celeritas; quæ calculo exquiretur.

Nempe; si simul utriusque Momentum, per simul utriusque Pondus dividatur; habebitur communis utriusque futura Celeritas.

(Et quidem, si pondera sint æqualia; erit semi-summa utriusque Celeritatis.)

Eáque Celeritas futura, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum pòst futurum.

Fig. 301. SI Grave A, segniùs præcedenti B directè impingat; (*segniùs* dico, nam si B eâdem celeritate præcederet, subsequens A non illud esset assecuturum; nedum si velociùs fugiat B, quàm insequatur A;) sitque Gravis A, Pondus mP, Celeritas rC, adeóque Momentum $mrPC$; Gravis B, Pondus nP, Celeritas (minor) sC, adeóque Momentum $nsPC$; Adeóque simul utriusque Momentum $mrPC+nsPC$: Diviso hoc per summam Ponderum $mP+nP$, habebitur communis utriusque futura Celeritas $\frac{mr+ns}{m+n}C$: per prop. 27. Cap. 1. (Et quidem si pondera; sint æqualia; hoc est, $m=n$; erit $\frac{mr+ns}{m+n}C=\frac{r+s}{2}C$.) Quod erat propositum.

Ideóque, præcedentis nP momentum, quod priùs fuerat $nsPC$, jam fit

fit $\frac{mr+ns}{m+n}nPC$; & subsequentis mP momentum, quod fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr+ns}{m+n}mPC$. Adeóque Momentum hinc demptum, & sequenti collatum, est $mrPC-\frac{mr+ns}{m+n}mPC=\frac{nr-ns}{m+n}mPC=\frac{mr-ms}{m+n}nPC=\frac{r-s}{m+n}mnPC$.

PROP. IV.

Si duo Gravia, secundum eandem rectam, contrariis motibus occurrentia, sibi mutuò directè impingant: eâdem deinceps celeritate, atque ad easdem partes ferentur; quas calculus indicabit.

Nempe; Si Momentorum Differentia (quoniam ad contrarias partes) per Summam Ponderum dividatur; habebitur communis utriusque Celeritas pòst futura; & quidem ad eas partes ad quas tendebat Vis præpollens.

Et quidem, si pondera sint æqualia; erit Celeritatum Semidifferentia.

Sin æquipolleant contraria Momenta, (propter æqualia invicem tum Pondera, tum Celeritates; aut has illis reciprocè proportionales:) ad neutras partes ferentur; sed quiescent utraque.

Futura autem celeritas, in utriusvis pondus ducta, exhibet ejusdem momentum post futurum.

Sit Gravis A, Pondus mP, Celeritas $+rC$, adeóque Momentum $+mrPC$ (prorsum:) cui occurrat motu directè contrario Grave B, cujus pondus nP, celeritas $-sC$, adeóque Momentum $-nsPC$ (retrorsum:) & utriusque simul Momentum (seu Momentorum, utpote ad contrarias partes, Differentia,) $mrPC-nsPC$, (prorsum vel retrorsum, prout signum + vel − prævaluerit; per prop. 8. Cap. 1.) Hoc itaque per summam ponderum $mP+nP$ divisum; exhibet communem Fig. 302.

munem utriusque celeritatem deinceps futuram, $\frac{mr - ns}{m + n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum + aut — prævaluerit:) per prop. 27. Cap. I. (Adeóque, si Pondera sint æqualia; erit, propter $m = n$, celeritas $\frac{r - s}{2} C$: Si vero tum $m = n$, tum $r = s$; vel m, n, ipsis r, s, reciprocè proportionales; quò fiat $mr = ns$: nulla futura erit in utramvis partem celeritas; sed se mutuò sistent æquales vires contrariæ.) Quod erat propositum.

Ideoque Gravis A momentum, quod prius fuerat $mrPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} mPC$; & Gravis B momentum, quod fuerat $nsPC$, jam fit $\frac{mr - ns}{m + n} nPC$. Adeóque momentum ex præpollente demptum & in reliquum collatum, est $mrPC - \frac{mr - ns}{m + n} mPC = \frac{nr + ns}{m + n} mPC = \frac{mr + ms}{m + n} nPC = \frac{r + s}{m + n} mnPC$.

PROP. V.

Ictûs magnitudo æquipollet duplo momenti ablati in directè impingentium (si quod sit) fortiori.

SI intelligatur enim Motorum (si quod sit) fortius, (vel, si sint momentorum æqualium, utrumvis,) ut Percutiens; reliquum ut Percussum: Quantum Momenti Percutienti decidit, Percussum recipit, (puta; Vel resistendo seu sustinendo Vim; ut, si firmus Obex sit, cedere nescius; aut motum contrario impetu æquali: Vel suscipiendo novum impetum; ut, si priùs quiesceret; aut in easdem partes moveretur: Vel denique partim hoc, partim illud; ut, si occurrat motu contrario debiliori: quæ singulatim suis locis ostendentur:) quorum cùm utrumque sint effectus Ictûs, Ictus utrique æquipollet; hoc est, duplo momenti ablati in fortiori. Quod erat propositum.

Designo autem Ictûs magnitudinem, per momentum fortiori ablatum; quoniam effectus ictûs in fortiori, uniformis est, (nempe sola semper momenti deperditio,) adeóque facilius & simpliciùs verbis exprimitur:

exprimitur: effectus autem in reliquo est, nonnunquam impetûs deperditio, nonnunquam acquisitio novi impetûs, nonnunquam utrumque; sed quicquid sit; æquipollet motui in fortiori deperdito.

PROP. VI.

Si Grave motum firmo Obici directè impingat: Ictus æquipollet duplo momento gravis impingentis.
Sin Obex minùs firmus sit quàm ut sustinendo valeat: Ictus æquipollet duplo Vis restitivæ in Obice.

Putà; si Gravis moti A, pondus sit mP, celeritas rC; adeóque Momentum seu Vis impellens $mrPC$: huic æqualis est in Obice Resistentia (utpote quæ Vim totam impactam immota sustinet atque hanc solam:) Cúmque utraque sint ab Ictu, Ictus utrique simul æquipollet, hoc est, duplo momenti impingentis, seu $2mrPC$. Quod propositum erat. Fig. 299.

Dico autem, Vi impellenti æqualem esse *Resistentiam*, potiùs quàm Vim *Restitivam*. Quippe Vis Restitiva major esse potest; nempe, si Obex majori vi impingenti sustinendæ par sit: sed quicquid virium superest, est hic inutile, (uti & vis tota esset si nihil impingeret;) ut enim sustineatur vis impacta, sufficit vis æqualis; nec motum ulteri inferri potest, quoniam resistit tantùm per modum impedimenti, non vis agentis contrariæ. per prop. 11, 12. Cap. 1.

Similiter ostendetur propositionis pars altera. Quippe quantacunque sit Obicis infirmi vis restitiva, puta $nsPC$; tanta impenditur ei amoliendo vis impellens; (&, quæ superest, est hìc superflua:) adeóque utriusque aggregatum (qui est effectus ictûs) $2nsPC$, duplum vis restitivæ, est Ictûs magnitudo. Quod itidem erat propositum.

Aliter.

Idem ostendi posset (sed mutato propositionum ordine) ex prop. seq. Quippe Obex firmus, ictum quod spectat, tantundem resistit quantum directè occurrens impetu æquali, (utrobique enim sistitur impingens Grave:) verùm illic ictus æquipollet utriusvis duplo; per prop. seq. Ergo & hìc.

Similiter.

Ostendetur idem ex prop. 14. Nempe, si duo Gravia utcunque æqualia, quibuscunque celeritatibus, directè occurrant; ostenditur ictûs

ictûs magnitudo $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC$: adeóque si intelligatur Obicis celeritas $sC = oC$ (quippe nulla;) seu quantumvis exigua; adeóque pondus $nP = \infty P$ infinitum (nam nisi hoc ponatur, propter $s = 0$, momentum $nsPC$ non sustinebit vim impactam,) erit $\frac{r+s}{m+n} 2mnPC = \frac{\infty}{\infty + m} 2mrPC = 2mrPC$ (nam propter ∞ infinitum, tantundem erit $\frac{\infty}{\infty + m}$ atque $\frac{\infty}{\infty} = 1$:) hoc est, vis impingentis duplum. Quod erat propositum.

PROP. VII.

Si duo Gravia Æqualia, æqualibus celeritatibus; vel Inæqualia, celeritatibus reciprocè proportionalibus; sibi mutuò directè occurrant: Ictûs magnitudo æquipollet momentis simul utriusque; seu utriusvis duplo.

Fig. 302. PUtà, si sit Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $+mrPC$ (prorsum:) atque Gravis B, pondus item mP & celeritas $-rC$; vel pondus rP & celeritas $-mC$; adeoque (utrovis casu) momentum $-mrPC$ (retrorsum:) Cùm, quod Ictus hoc in casu efficiat, sit (propter æquales impetus contrarios) utriusque sublatio, per prop. 4. hujus; erit Ictûs magnitudo $2mrPC$ (momentis simul utriusque æquipollens) per prop, 5. hujus.

PROP.

PROP. VIII.

Si duo Gravia communi aliquo motu ferantur; tantundem est, quantum ad Ictûs magnitudinem, atque si utrobique abesset.

Adeóque communis motus, additus vel demptus, Ictûs magtudinem non immutat.

SI enim B præcedens eâdem celeritate fugiat (aut etiam majori) quâ sequitur A, nulla fit motûs obstructio seu impeditio, utut conjuncta fuerint A B, (nedum si disjuncta;) adeóque nullus Ictus. Si verò A celeriùs sequatur, putà celeritate $rC = sC + tC$; & B præcedat segniùs, putà Celeritate sC: saltem quantum ad celeritatem utrique communem sC, nulla fit impeditio; quippe eatenus se subducit antecedens, ictum declinans; totúmque illud motûs cui ulla fit obstructio, est quod ex tC celeritatis excessu oritur. (Idémque eâdem analogiâ ostendetur de aliis motibus communibus.) Adeóque ob additum vel demptum communem motum (utpote qui, hoc respectu, nullius effectûs est) nulla fiet Ictûs immutatio. Fig. 301.

SCHOLIUM.

HInc est, quòd duorum in eâdem Navi placidè latorum alter alterum eâdem vi percutit acsi uterque in littore staret; motu navis, utpote utrique communi, ictum nec adjuvante nec impediente. Item, projectionum & percussionum Phænomena eadem contingunt omnia apud nos in terrâ positos, sive cum terrâ junctim ferantur omnia communi motu, sive cum terrâ unà quiescant; quippe communis eorum cum terrâ sive motus sive quies hæc Phænomena non immutat, sed projectiones & percussiones æstimandæ sunt ab iis motibus qui rebus hic in terrâ existentibus peculiares sunt, & non cum ipsâ terrâ communes. Adeóque, quæ afferri solebant objectiones à projectionibus inæqualibus eâdem vi faciendis, prout vel ad Orientem ad Occidentem ferrent; atque inæqualibus percussionibus à Tormento Bellico globulum emittente futuris, prout in has aut illas partes explosio fieret; & quæ sunt hujusmodi; etiam ipsis nunc dierum fatentibus qui motum Terræ negant,

negant, nihil in utramvis partem probant sive de Quiete Terræ sive de Motu. Hinc item qui ictum Gladii quadantenus declinans accipit, minori vulnere afficitur, quam si immotus acciperet, nedum si obviam iret. Aliáque multa hujusmodi.

PROP. IX.

Si Grave motum, æquali quiescenti, (non impedito,) directè impingat: Ictûs magnitudo, momento gravis moti æquipollet.

Fig. 300. ESto Gravis moti A, pondus $m P$, celeritas $r C$, adeoque momentum $m r P C$; quod in æquale B quiescens directè impingat; ferentur deinceps utraque celeritate dimidiâ, $\frac{1}{2} r C$; adeoque momentum A quod priùs fuerat $m r P C$, jam propter pondus $m P$, fiet $m P \times \frac{1}{2} r C = \frac{1}{2} m r P C$, amisso momenti dimidio $\frac{1}{2} m r P C$; & momentum B, quod prius (utpote quiescentis) nullum erat, jam, propter itidem $m P$ pondus, fiet $m P \times \frac{1}{2} r C = \frac{1}{2} m r P C$, de novo acquisitum; per prop. 2. hujus. Cùm itaque deperdat A momentum $\frac{1}{2} m r P C$, atque acquirat B momentum itidem $\frac{1}{2} m r P C$, utriusque aggregato $m r P C$ (quod momentum fuerat gravis A) æquipollet Ictûs magnitudo, per prop. 5. hujus.

Idem Aliter.

Esto, ut priùs, Gravis A, pondus $m P$, celeritas $r C$, adeóque momentum $m r P C$, quod in æquale B quiescens directè incurrat. Atque intelligatur utrique accedere communis motus celeritate $- \frac{1}{2} r C$ (retrorsum.) Quo casu feretur A celeritate $r C - \frac{1}{2} r C = \frac{1}{2} r C$ (prorsum) & B celeritate $o C - \frac{1}{2} r C = - \frac{1}{2} r C$ (retrorsum;) Eritque Ictûs magnitudo $2 m P \times \frac{1}{2} r C = m r P C$, per prop. 7. hujus. Sed eadem erit (per prop. præced.) Ictûs magnitudo, dempto illo qui addebatur communi motu; qui est casus propositus. Ergo, & hic, Ictûs magnitudo est $m r P C$; ut prius.

Terræ sive
is accipit,
si obviam

to,) di-
vis moti

e momen-
ngat; se-
momen-
, fiet mP
& mo-
, propter
quisitum;
$mrPC$,
ggregato
is magni-

óque mo-
rat. At-
$-\frac{1}{2}rC$
$C=\frac{1}{2}rC$
orsum;)
prop. 7.
agnitudo,
ropositus.

PROP.

Si duo C
dem
impir
tatun

SIt Gra
mom
cujus ita

eps utrac

is mome
Deperdit
$-\frac{1}{2} m r$
que tantu
$- m s P$
Aggrega
est, mom
ex prop

Sit, ut
quod in a
eandem e
omni s C
gis.) A
prius.

PROP. X.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus Inæqualibus, in easdem partes ferantur; & sequens antecedenti directè impingat: Ictus æquipollet momento utriusvis, Celeritatum Differentiâ lati.

Sit Gravis A, pondus $m P$, celeritas $r C = s C + t C$, adeóque momentum $m r P C$; quod in æquale B, celeritate $s C$ præcedens (cujus itaque momentum $m s P C$) directè impingat. Ferentur deinceps utraque (per prop. 3. hujus) celeritate $\frac{r+s}{2} C$; adeóque utriusque momentum (propter utriusque pondus $m P$) $\frac{1}{2} m r P C + \frac{1}{2} m s P C$. Deperdit itaque A (propter s minorem quàm r) momentum $m r P C - \frac{1}{2} m r P C - \frac{1}{2} m s P C = \frac{1}{2} m r P C - \frac{1}{2} m s P C = \frac{1}{2} m t P C$. Atqui tantundem Gravi B acquiritur, propter $\frac{1}{2} m r P C + \frac{1}{2} m s P C - m s P C = \frac{1}{2} m r P C - \frac{1}{2} m s P C = \frac{1}{2} m t P C$. Ergò, utriusque Aggregatum $m t P C$ est (per prop. 5. hujus) Ictûs magnitudo. Hoc est, momentum ponderis utriusvis $m P$, celeritatum differentiâ $t C$ lati, (per prop. 27. Cap. 1.) quod erat propositum. Fig. 301.

Aliter.

Sit, ut priùs, Gravis A, pondus $m P$, celeritas $r C = s C + t C$; quod in æquale B celeritate $s C$ præcedens directè impingat. Tantundem erit (ictum quod spectat) atque si (sublato utrobique communi $s C$) ferretur A celeritate $t C$, in B quiescens, (per prop. 8. hujus.) Adeóque (per prop. præced.) ictûs magnitudo $m t P C$, ut priùs.

PROP. XI.

Si duo Gravia Æqualia, celeritatibus utcunque Inæqualibus, ad contrarias partes lata, sibi mutuò directè occurrant: Ictus æquipollet momento utriusvis, Aggregato celeritatum lati.

Fig. 302. SIt Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum,) adeóque momentum $+mrPC$; & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorsum,) adeóque momentum $-msPC$, sitque $r+s=z$; atque intelligatur $mrPC$ momentum præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{r-s}{2}mP$; adeóque utriusvis momentum $\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC-\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mzPC$. Et Grave B (propter A præpollens) deperdit totum suum momentum retrorsum $msPC$; sed & acquirit momentum prorsum $\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msPC$: Quæ duo simul sumpta sunt $msPC+\frac{1}{2}mrPC-\frac{1}{2}msP=\frac{1}{2}mrPC+\frac{1}{2}msPC=\frac{1}{2}mzPC$. Ergo, omnium Aggregatum, $mzPC$ est (per prop. 5. hujus) ictûs magnitudo. Hoc est momentum ponderis utriusvis mP, celeritatum aggregato zC lati.

Aliter.

Sit, ut priùs, Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum;) & huic æqualis B, celeritas $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Intelligatur utrique conferri motus communis celeritate $+sC$ (prorsum:) Unde fiet celeritas A, $rC+sC=zC$; & celeritas B, $-sC+sC=oC$. Hoc est, feretur A, celeritate zC in B quiescens. Eritque ictûs magnitudo (per prop. 9. hujus) $mzPC=mP\times zC$. Tantúsque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XII.

Si Grave motum, Gravi quiescenti, utcunque inæquali, directè impingat: Erit Ictûs magnitudo, ad momentum Gravis moti, ut quiescentis pondus duplum ad ponderis utriusque aggregatum.

Sit Gravis A moti, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$; quod directè impingat in quiescens B, cujus pondus nP, (momentum, utpote quiescentis, nullum.) Erit (per prop. 2. hujus) celeritas deinceps utriusque $\frac{mr}{m+n}C$: Adeóque momentum A (propter pondus mP,) $\frac{mr}{m+n}mPC$; & momentum B (propter pondus nP.) $\frac{mr}{m+n}nPC$. Deperdit itaque A, momentum $mrPC - \frac{mr}{m+n}mPC = \frac{mnr}{m+n}PC$. Atque tantundem (ut ostensum est) acquirit B, (utpote cujus momentum prius nihil erat.) Ergo (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum $\frac{2mnr}{m+n}PC$ est ictûs magnitudo. Est autem illud ad $mrPC$ expositum momentum gravis moti, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus expositi quiescentis, ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum. Fig. 300.

Aliter.

Sit, ut prius, Gravis A, pondus mP, celeritas rC, adeóque momentum $mrPC$; quod directè impingat in B quiescens, cujus pondus nP. Intelligatur celeritas rC in duas partes dividi, ponderibus reciprocè proportionales; puta, $\frac{n}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus mP; & $\frac{m}{m+n}rC$, quæ respiciat pondus nP. Atque conferatur utrique motus communis celeritate $-\frac{m}{m+n}rC$ (retrorsum:) quò fiat celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n}rC = \frac{n}{m+n}rC$ (prorsum;) & celeritas B,

B, $\circ C - \frac{m}{m+n} r C = - \frac{m}{m+n} r C$ (retrorsum ;) adeóque celeritates ponderibus reciprocè proportionales, ad partes contrarias; istúsque magnitudo (per prop. 7. hujus) $m P \times \frac{n}{m+n} r C + n P \times \frac{m}{m+n} r C = \frac{2 m n}{m+n} r P C = \frac{2 n}{m+n} \times m r P C$; quod itaque est ad $mrPC$ expositum momentum moti A, ut $2 n$ ad $m+n$, (ut priùs:) Tantúsque erit ictus in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIII.

Si duo Gravia, vel æqualia vel inæqualia, celeritatibus quibuscunque, ad easdem partes ferantur, & Sequens Antecedenti directè impingat: Erit Ictûs magnitudo, ad momentum gravis Sequentis celeritatum differentiâ lati; ut duplum ponderis Antecedentis, ad simul utriusque pondus; ad momentum verò Antecedentis eadem celeritatum differentiâ lati, ut duplum Sequentis, ad simul utriusque pondus; hoc est, ad momentum utriusvis differentiâ celeritatum lati, ut duplum reliqui ad simul utriusque pondus.

Fig. 301. ESto Gravis A Sequentis, pondus $m P$, celeritas $r C$, adeóque momentum $m r P C$; Antecedentis B, pondus $n P$, celeritas (minor) $s C$, adeóque momentum $n s P C$; sitque $r = s + t$. Erit (per prop. 3. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{m r + n s}{m+n} C$; adeóq; momentum A (propter pondus $m P$,) $\frac{m r + n s}{m+n} m P C$; & momentum B (propter pondus $n P$,) $\frac{m r + n s}{m+n} n P C$. Deperdit itaque A, momentum $m r P C - \frac{m r + n s}{m+n} m P C = \frac{m n r - m n s}{m+n} P C$. Atque tantundem acquirit B, propter $\frac{m r + n s}{m+n} n P C - n s P C =$

$m n r - m n s$

$\frac{mnr - mns}{m+n} PC$. Adeóque (per prop. 5. hujus) utriusque aggregatum est ictûs magnitudo. Hoc est $\frac{2mnr - 2mns}{m+n} PC = \frac{r-s}{m+n} 2mnPC = \frac{2mn}{m+n} tPC = \frac{2n}{m+n} mPtC = \frac{2m}{m+n} nPtC$: Hoc est, ad momentum Sequentis mP celeritatum differentiâ tC lati, ut $2n$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Antecedentis ad simul utriusque pondus: atque ad momentum Antecedentis nP eâdem differentiâ tC lati, ut $2m$ ad $m+n$; hoc est, ut duplum pondus Sequentis ad simul utriusque pondus. Hoc est, ad momentum utriusvis, celeritatum differentiâ lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Esto, ut priùs, Gravis A sequentis, pondus mP, celeritas rC; atque antecedentis B, pondus nP, celeritas sC; sitque $r = s + t$. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta celeritas sC. Quo facto, B ad quietem redigitur, propter $sC - sC = 0C$; eique impingit A, tanquam quiescenti, celeritate $rC - sC = tC$. Eritque ictûs magnitudo (per prop. præced.) $\frac{2mn}{m+n} tPC = \frac{2n}{m+n} mtPC = \frac{2m}{m+n} ntPC$, ut prius. Idémque erit ictûs magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP. XIV.

Si duo Gravia, æqualia vel inæqualia, quibuscunque celeritatibus, motibus contrariis sibi mutuò directè occurrant: Erit ictûs magnitudo, ad momentum alterutrius gravium, celeritatum Aggregato lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus.

Sit Gravis A, pondus mP, celeritas $+rC$ (prorsum,) adeóque momentum $+mrPC$; & Gravis B, pondus nP, celeritas $-sC$ (retrorsum,) adeoque momentum $-nsPC$; quæ sibi mutuò directè impingant; sitque $r + s = z$; atque intelligatur momentum $mrPC$ præpollens. Fig. 302.

præpollens. Erit (per prop. 4. hujus) utriusque deinceps celeritas $\frac{mr - ns}{m + n} C$: Adeóque gravis A (propter pondus $m P$) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} m P C$; & gravis B (propter pondus $n P$) momentum $\frac{mr - ns}{m + n} n P C$. Deperdit itaque A momentum $m r P C - \frac{mr - ns}{m + n} m P C = \frac{nr + ns}{m + n} m P C$. Et B deperdit (propter A præpollens) totum quod habuerat momentum retrorsum $n s P C$; & simul acquirit momentum prorsum $\frac{mr - ns}{m + n} n P C$; quæ duo simul sumpta sunt $n s P C + \frac{mr - ns}{m + n} n P C = \frac{mr + ms}{m + n} n P C = \frac{nr + ns}{m + n} m P C$, (quantum scilicet deperderat A.) Adeóque omnium aggregatum $\frac{r + s}{m + n} 2 m n P C = \frac{2 m n}{m + n} z P C = \frac{2 m}{m + n} n z P C = \frac{2 n}{m + n} m z P C$, est (per prop. 5. hujus) ictûs magnitudo. Quod itaque est ad $m z P C$ ut $2 n$ ad $m + n$, & ad $n z P C$ ut $2 m$ ad $m + n$; hoc est, ad momentum alterutrius gravium aggregato celeritatum lati, ut reliqui pondus duplum ad simul utriusque pondus. Quod erat propositum.

Aliter.

Sit, ut priùs, Gravis A, pondus $m P$, celeritas $+ r C$ (prorsum;) & Gravis B, pondus $n P$, celeritas $- s C$ (retrorsum;) quæ sibi mutuo directè occurrant; sitque $r + s = z$. Intelligatur autem utrique addi, motu communi, celeritas $+ s C$ (prorsum:) Quo fiat gravis A celeritas $rC + sC = zC$; & B quiescens (propter $-sC + sC = 0 C$;) Adeóque ictûs magnitudo (per prop. 12. hujus) $\frac{2 n}{m + n} m z P C = \frac{2 m}{m + n} n z P C$; ut priùs. Idémque est ictûs magnitudo in casu proposito, per prop. 8. hujus.

PROP.

PROP. XV.

Percussiones particularum Gravis percutientis, pro variâ ejusdem Figurâ & Positione; calculo æstimantur. Adeoque & *Centrum Virium*, seu *Percussionis*. Quod ipsum est Punctum Percussionis maximæ.

INtelligatur A B, Pertica, Cylindrus, Prisma, aut istiusmodi corpus quodpiam; parallelo motu latum: Erunt ejus Partes infinitesimæ, (secundum longitudinem æquales,) ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Earúmque respectivæ Celeritates (utpote æquales, propter motum parallelum,) item ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium: Adeoque &, quæ inde resultant, Momenta seu Vires, erunt itidem ut 1, 1, 1, 1, &c. series Æqualium. Et propterea, si per mediam longitudinem secetur Axis in V; erit utrinque tantundem Virium & in distantiis Æqualibus. Adeóque V, *Centrum Virium*, seu Percussionis. Fig. 303.

Quod quidem non aliter differt à Centro Æquilibrii, (de quo Cap. 3. dictum est,) quàm quod (sumpto Axe prismatis pro Librâ) momenta, seu Libræ Gravamina, sunt illic (potissimum) nuda Pondera (quamquam nec alia gravamina ibidem excludantur,) hic vero Pondera cum Impetu, a celeritate contracto.

Idem similiter obtinet quæcunque sit figura Gravis A B, parallelo motu lati: Nempe, Centrum Virium V, idem esse atque Centrum Gravitatis figuræ. Quippe cum Celeritates sint series Æqualium; eadem erit Virium series quæ Ponderum: per Schol. prop. 1, 2. Cap. 5. Fig. 304.

Intelligatur deinde idem Cylindrus seu Prisma A B, circa Axis extremum A rotari. Cujus itaque Particulæ (ut priùs) erunt ut 1, 1, 1, 1, &c. seu 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, 1 *P*, &c. series Æqualium. Celeritates autem respectivæ, (ab A centro Motus inchoando) ut Arcus B B, & huic paralleli, sectorem B A B complentes; (quippe, propter æqualia Tempora, Celeritates erunt ut transactæ Longitudines; per prop. 23. Cap. 1.) hoc est, ut eorum Radii, seu Distantiæ ab A; hoc est, ut Rectæ Triangulum A B C complentes, (ipsi B C parallelæ:) Nempe, ut 1, 2, 3, 4, &c. seu 1 *C*, 2 *C*, 3 *C*, 4 *C*, &c. series Primanorum. Adeoque, propter Pondera invicem æqualia, Vires itidem erunt ut Fig. 305.

series

series Primanorum; puta ut $1PC$, $2PC$, $3PC$, $4PC$, &c. seu ut eædem rectæ Triangulum complentes. Quæ itaque si ad AB latus Trianguli, tanquam ad Libram, applicari intelligantur; quæ per Trianguli Centrum gravitatis applicatur VC recta, designat in AB librâ Centrum Æquilibrii V. Et propterea, si similiter in V secetur AB axis Cylindri seu Prismatis; erit V Centrum Virium: Quippe quæ Rectis illis sunt proportionales.

Fig. 306. Sin Cylindrus idem seu Prisma, Centro Motûs M, in Axe ultra A continuato rotari intelligatur: Pondera erunt (ut prius) ut $1P$, $1P$, $1P$, $1P$, &c. series Æqualium: Celeritates autem, ut Arcus descripti, seu eorum Radii; hoc est, ut Distantiæ ab M; seu rectæ complentes Trapezium ACCB: puta ut aC, $aC+1C$, $aC+2C$, $aC+3C$, &c. Series Æqualium aucta Serie Primanorum. Adeoque Momenta, seu Vires, aut libræ Gravamina, (propter Pondera invicem æqualia,) ut aCP, $aCP+1CP$, $aCP+2CP$, $aCP+3CP$, &c. series item Æqualium aucta serie Primanorum; seu ut eædem rectæ Trapezium complentes. Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad AB latus trapezii ut Libram applicetur VC; erit V Centrum Æquilibrii: Et similiter, in V, secto axe AB, erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Fig. 307. Intelligatur demum AB Cuneus, seu Asserculus Triangularis (æquabiliter crassus:) Cujus itaque (ab acie A computando) particulæ (secundum longitudinem in axe AB æstimatam æquales) sunt ut $0P$, $1P$, $2P$, $3P$, &c. series Primanorum: Celeritates (rotatione circa A factâ) ut $0C$, $1C$, $2C$, $3C$, &c. (distantiis ab A proportionales) series itidem Primanorum: Vires itaque (in ratione ex utrisque compositâ) ut $0PC$, $1PC$, $4PC$, $9PC$, &c. series Secundanorum; seu ut rectæ complentes ABC complementum Semi-parabolæ: (aut Plana Conum seu Pyramidem complentia.) Per cujus itaque Centrum gravitatis si ad Libram AB applicetur VC; atque similiter, in V, secetur AB axis Cunei; erit V Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium.

Si autem circa rectam B (basin trianguli) rotetur Triangulum vel Cuneus AB: distantiæ a B erunt rectis huic parallelis, æqualiter a medio distantibus, reciprocè proportionales; adeóque respectiva Momenta (utpote in ratione ex magnitudinum & distantiarum rationibus compositâ) invicem æqualia; & propterea Centrum Virium in axis AB medio.

Si vero intelligatur AB grave, ultra A (Centrum motûs) continuari; id non impedit quin V ut prius sit Centrum virium seu percussionis (ad partes B faciendæ;) sed vis augebitur ab impetu partium ultra A. Et similiter alibi.

Sin

c. seu ut
B latus
quæ per
in AB
secetur
Quippe

ultra A
P, 1P,
descripti,
omplen-
+ 1C,
Adeo-
Pondera
+ CP,
eædem
tatis si
ium Æ-
Virium;

(æqua-
læ (se-
P, 1P,
circa A
ionales)
que com-
; seu ut
ut Plana
rum gra-
n V, se-
ctis illis

ulum vel
er à me-
Momenta
compo-
B medio.
ntinuari;
ionis (ad
a A. Et
Sin

PROI

Sin
Erunt
rum :
C+1
ucta.
caPC,
norum
reum
semi-p
ritè co
gravita
trum
trum V

Inte
culæ (a
Secunda
:C, 1 C
Vires, u
rectæ c
Per cuju
bebitur

Sin N
Pondera
rum : C
C+1 C
rum auc
+8PC
Tertian
complen
loidis C
rum. F
bitur V

Atque
quæcunq
ordinata
cunque
renda e
series Vi
tur ut I
trum Vi

Sin sit M Centrum Motûs seu Rotationis in axe ultra A protracto: Erunt Pondera (ut priùs) ut $0P, 1P, 2P, 3P$, &c. series Primanorum: Celeritates autem (distantiis ab M proportionales,) ut aC, $aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea Vires, seu Momenta, aut libræ Gravamina, ut $0aPC, 1aPC+1PC, 2aPC+4PC, 3aPC+9PC$, &c. series Primanorum aucta serie Secundanorum. Puta, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex Triangulo A B T (quæ series est Primanorum,) & semi-parabolæ Complemento A T C (quæ est series Secundanorum,) ritè comparatis, compositum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis quæ ad Libram applicatur V C, designat in A B librâ Centrum Æquilibrii V: & similiter, in V, secto axe solidi, habetur Centrum Virium; utpote rectis illis proportionalium. Fig. 308.

Intelligatur demum A B Conus seu Pyramis: Cujus itaque Particulæ (ab A vertice numeratæ) erunt ut $0P, 1P, 4P, 9P$, &c. series Secundanorum: Celeritates autem (rotatione Centro A factâ) ut $0C, 1C, 2C, 3C$, &c. series Primanorum: Adeòque Momenta seu Vires, ut $0PC, 1PC, 8PC, 27PC$, &c. series Tertianorum: Puta ut rectæ complentes Semi-paraboloidis Cubicalis Complementum ABC. Per cujus itaque Centrum gravitatis si applicetur (ut priùs) V C; habebitur (ut supra) V Centrum Virium. Fig. 307.

Sin M Centrum Motûs seu Rotationis sit in axe ultra A protracto: Pondera erunt (ut priùs) ut $0P, 1P, 4P, 9P$, &c. series Secundanorum: Celeritates verò (distantiis ab M proportionales) ut aC, $aC+1C, aC+2C, aC+3C$, &c. series Æqualium serie Primanorum aucta. Et propterea; Vires, ut $0aPC, 1aPC+1PC, 4aPC+8PC, 9aPC+27PC$, &c. series Secundanorum aucta serie Tertianorum: Puta, ut rectæ complentes Trilineum A B C, ex A B T complemento Semi-parabolæ, & A T C complemento Semi-paraboloidis Cubicalis, (sic invicem aptatis ut casus postulaverit,) compositum. Per cujus itaque Trilinei Centrum gravitatis ductâ V C; habebitur V Centrum Virium, ut prius. Fig. 308.

Atque ad eandem formam mutatis mutandis, procedendum erit, quæcunque fuerit figura Gravis moti, (sive ordinata, sive utcunque inordinata,) & ubicunque ponatur Centrum Rotationis. Nempe, quæcunque fuerit Magnitudinum seu Ponderum series; cum eâ componenda erit series Celeritatum (utcunque acquisitarum;) ut habeatur series Virium seu Momentorum. Atque hæc momenta, si considerentur ut Libræ Gravamina; eisdem legibus hîc exquirendum erit Centrum Virium; quibus, in Cap. 5. Centrum Æquilibrii; &, in Cap.

4, 5. Centrum Gravitatis. Nos casus aliquot ex simplicioribus selegimus quæ speciminum instar sint; & in quibus Axis solidi saltem Rectam determinat in quâ sit illud Centrum Virium; ut nihil hîc opus sit aliud quam ut datæ Libræ (momentis virium gravatæ) Centrum Æquilibrii inquiratur; secundum tradita Cap. 3. Si vero illud non esset; determinanda esset ea recta, eisdem methodis quibus determinandus est Axis Æquilibrii (in ordine ad Centrum Gravitatis inquirendum) Cap. 5. Atque in eo tandem Centrum Virium. Sed singulis casibus immorandum non erat.

Denique; Quod in Centro Virium sit maxima Percussio; sequitur ex prop. 8. & 18. Cap. 3. (ampliato sensu expositis.) Quippe Centrum Virium, est Libræ sic gravatæ (non nudis Ponderibus, sed Ponderibus cum Impetu) Centrum Æquilibrii; in quo si sustineatur Libra (quod hîc fit à corpore percusso) totarum Virium impetus sustinetur, (quippe, propter Æquilibrium, in neutram partem rotando feretur;) si verò extra hoc Virium Centrum (à percusso) sustineatur; ad eas partes rotando propendebunt Vires quà est Virium Centrum; adeóque nec totus impedietur Motus: sed eâ saltem sui parte quâ Rotando minùs procedit Centrum Virium seu Æquilibrii, quàm si (non impeditum) rectè procederet. Quod, locis citatis, generali demonstratione ostenditur.

Si verò, percussione non in V puncto factâ, manu tenentis, putà in A, impediatur ne fiat Rotatio circa punctum ictûs in corpore percusso: Res referenda erit ad Vectem cum duobus Fulcris. Quippe motus Virium (seu, quod tantundem est, Centri Virium, per prop. 9. Cap. 3. vel prop. 16. Cap. 4.) partim Corpore Percusso, partim Manu Percutientis, tanquam duobus Fulcris, (utroque inferiùs posito, si Centrum Virium sit inter illa duo Fulcra; vel, si extra, altero inferiùs altero superiùs posito;) sustinetur: Secundum leges Cap. 6. (de Vecte duobus Fulcris sustento) traditas.

SCHOLIUM.

MOnendum hîc non incommodum duxi; processum à dato corporis percutientis Centro Gravitatis, ad ejusdem (circa Axem datum rotati) Centrum Virium inquirendum; alium non esse quàm à dato plani Centro gravitatis ad Ungulæ eidem insistentis (datam in eodem plano aciem habentis) Centrum gravitatis inquirendum. Quippe, ut illic, cum serie magnitudinum in Plano, componenda erit series altitudinum super istius plani respectivas particulas, (quæ quidem altitudinum

tudinum series alia non est quàm Distantiarum ab illâ Acie datâ,) & seriei compositæ commune Centrum inveniendum, (quod est Ungulæ Centrum gravitatis :) ita hic, cum serie magnitudinum in corpore percutiente, componenda erit series Celeritatum in respectivis istius corporis particulis, (quæ itidem series alia non est quàm Distantiarum à dato Rotationis axe,) & seriei compositæ commune Centrum (quod est Centrum Virium) inveniendum. Quo pacto autem ea seriei Distantiarum cum serie Magnitudinum compositio fiat, ut seriei compositæ Centrum habeatur; ostenditur (tum alibi, in casibus simplicioribus; tum, in obstrusioribus,) ad prop. 10. Cap. 5. Quæ sæpiùs in Ungularum Centris gravitatis inquirendis (per totum illud caput) in auxilium advocatur; atque hic, pro inquirendis Centris Virium, similiter (ubi opus fuerit) advocanda erit. Quod generatim monuisse sufficiat; ne sit necesse ad particulares casus descendere (quod longum esset, & tædii plenum;) quos cujusque industriæ, ubi res postulaverit, calculo determinandos permitto, & ad generalem Methodum exigendos.

Notandum porro; cum Centrum Virium, uti illud jam determinavimus, sit (ut plurimum saltem) intra ipsum Solidum; Percussio autem, à Solido illo facta, fit in superficiei puncto aliquo : Si quis quærat, in quo superficiei puncto (pro hoc aut illo solidi percutientis situ) id contingat : Dicimus, in eo superficiei puncto contingere quod est in ipsâ Directione Centri Virium in ictûs instanti. Hoc est, si Centrum illud per rectam feratur, in eâ rectâ per quam fertur : si verò per curvam, in rectâ curvam illam (in ipso Virium Centro) tangentem, eo instanti quo fit Ictus; (puta, in rectâ V T, seu V C, fig. 307. quæ curvam V V tangat in V :) eandem enim directionem esse Curvæ cujusvis (pro dato in eâ puncto) atque Rectæ ibidem tangentis; ostendimus ad prop. 15. Cap. 2.

Moneo etiam (quod & supra insinuatum est,) Quâ ratione Grave (Ponderationem si spectes) perinde se habere acsi totum ibidem esset ubi est ipsius Centrum Gravitatis, per Schol. prop. 16. Cap. 4. Eâdem & (Percussionem quod spectat) perinde se habere Corpus percutiens, acsi totum ibidem esset ubi est Centrum Virium.

Atque hinc ad Funipendula æstimanda, via patet : Nempe, cujuscunque figuræ sit suspensum solidum, (puta Cylindricum, Conicum, aliudve,) tantæ longitudinis (vibrationem quod spectat) reputandum esse, quanta est distantia à suspensionis puncto ad Centrum Virium. Adeóque, verbi gratiâ, (dato quod Funipendula ejusdem longitudinis, æqualibus temporibus vibrent,) si Conus vertice suspensus (cujus Cen-

trum Virium ut ex Calculo ſuperiùs inſinuato, à vertice diſtat, $\frac{4}{5}$ totius Axis ſeu Altitudinis,) cum Globulo ex tenuiſſimo filo (cujus itaque conſideratio hic non habetur) ſuſpenſo, cujus longitudo ſit (à puncto ſuſpenſionis ad Globuli Centrum Virium) ad longitudinem ſeu altitudinem Coni, ut 4 ad 5; æqualibus temporibus vibrabitur uterque: utpote quorum Centrum Virium æqualiter à puncto ſuſpenſionis diſtant. Atque ſimiliter in aliis judicandum erit.

CAP.

CAP. XII.

De Cuneo.

DEFINITIONES.

DEF. I.

Cuneum, *plerumque adhibent, ex Ferro seu duriorum aliquo metallo; formâ Prismatis (non admodum alti) cujus oppositæ Bases sint Triangula Æquicrura Acutangula: Quorum utriusvis Altitudinem, appello* Altitudinem Cunei, *(non, Prismatis;) ejusdem Basem,* Cunei Crassitiem *appello; Rectámque quæ Triangulorum illorum Æquicrurorum Vertices conjungit,* Cunei Aciem: *quódque eorum Bases conjungit Parallelogrammum;* Cunei Dorsum.

II.

Malleum, *seu* Tuditem, *adhibent plerumque ex Ligno duriore, formâ Cylindricâ (vel ad eam proximè accedente,) adjuncto ad Latus* Manubrio, *cujus ope Percussor Ictum infligit.*

III.

Eodem etiam referenda sunt, Malleus Ferreus *quo Clavos adigimus;* Ascia, *vel* Securis, *quibus Ligna Dolamus, aut Dissecamus; prægrandes* Tudites, *seu* Arietes, *quibus Pila, Palos, Sudes, (aliáque similia,) in Terram adigimus: aliáque non absimilia Organa innumera.*

PROP.

PROPOSITIONES.

PROP. I.

Datis Mallei Pondere & Celeritate Cuneum percutientis, Cuneique Formâ: Vis Cunei, sic percussi, Calculo æstimabitur.

Fig. 309. INtelligatur Ligni Tenacitas seu Firmitudo, Cuneo divellenda; aut quorumvis Obicum, Cuneo dirimendorum, Resistentia, ut *O*.

Dico primo; si adhibeatur in Cunei Dorso D, vis *V* quæ sit ad *O*, ut C C cunei Crassities, ad ejusdem Altitudinem D A; (puta, ut *c* ad *a*:) Vis illa in D, æquipollebit Obici; Adeoque, aucta superabit. Cùm enim, per prop. 5. Cap. 2. Motus in eâ ratione polleant quæ ex rationibus Virium Motricium, & Progressuum Regressuúmve secundum lineam directionis suæ componitur: Sitque amolitio Obicis (contra directionem suam) ad progressum Virium (secundum directionem suam,) ut C C ad D A, seu ut *c* ad *a*, (quippe dum detruditur Cuneus per totam suam Altitudinem D A, dirimitur Obex per totam ipsius Crassitiem C C, & in toto processu proportionaliter;) Si vires *V*, *O*, sint ipsis *a*, *c*, (progressibus suis,) reciprocè proportionales; æquipollebunt motus, (propter ex Reciprocis compositam rationem Æqualitatis, per prop. 6. Cap. 1.) Hoc est, si sit ut *a* ad *c* sic *O* ad *V*; seu $V = \frac{c}{a} O$. Adeóque, si *V* major sit, movebit: per prop. 9, 11. Cap. 1.

Dico secundò; si sit Mallei ferientis Pondus, *P*; Celeritas, in percussionis instanti utcunque acquisita, *C*; (putà, sive id fiat ob Gravis motum naturaliter Acceleratum, sive etiam ob porro additam à Percussore vim;) adeóque Mallei Momentum seu vires *P C*; sitque $P C = V = \frac{c}{a} O$: Vis Mallei Cuneo directè applicata, Obici æquipollebit; adeóque aucta movebit.

Et quidem (ob eandem causam) eousque amovere seu amoliri perseverabit, donec sic impensa Vis *P C*, particulis Cuneo propioribus rumpendis aut flectendis per æquipollentiam absorbeatur.

Idémque Momentum secundò adhibitum, tantundem præstabit; & tertiò, tantundem: atque sic porro prout opus fuerit.

SCHO-

SCHOLIUM.

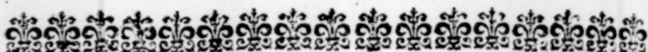
SUnt qui Cuneum, ad geminum Vectem referunt: quibus Vis in C, C, applicetur: Fulcra autem alii in O, O, ponunt; Oneráque in A utrinque protrudenda. Alii potiùs Fulcrum commune in A ponunt, & Onera in O, O; (eò potissimùm quod, in Lignis aliisve diffindendis, Cunei Acies non semper rem diffindendam attingit uspiam, sed medio suspensa pendet; adeóque non potest ibidem dici onus depellere.) Ego verò (ut alia taceam incommoda) rem simpliciùs exponendam duxi ex ipsis Motuum Elementis: uti factum est.

PROP. II.

Eadem similiter accomodari poterunt, *Malleo ferreo*, Clavum adigenti; *Tuditi prægrandi*, Pila, Sudes, Palósve præacutos in Terram altiùs defigenti; *Asciæ*, *Bipenni*, aut *Securi*, Ligna aliáve dolanti, dividenti, aut dissecanti; aliisve Instrumentis non absimilibus.

QUippe *Clavi*, *Pila*, *Sudes*, *Palive* præacuti; Cunei sunt: qui Malleo vel Tudite adiguntur. *Ascia*, *Bipennis*, *Securis*, & similia; sunt Malleus cum Cuneo connexo. Atque de aliis istiusmodi simile fiet judicium. Eadémque quæ ad prop. praeced. habetur Demonstratio; pariter & hanc valebit.

CAP.



CAP. XIII.

De Elatere, & Resilitione seu Reflexione.

Definitiones.

Def. I.

Vim Elasticam *appello, eam quâ Corpus de figurâ suâ Vi detrusum, seipsum in figuram pristinam Restituere satagit.*

II.

Elaterem *appello, Corpus (aut etiam Partem Corporis) eâ Vi præditum.*

VIs ἐλαστικὴ, ab ἐλαύνω, *Agito, Abigo, Excutio, Expello*, descendit: ut & (ejusdem originis) ἐλατὴρ. Vim eam insinuantes quâ Corpus, resiliendo, alia ab se Abigit.

Latinis (quantum scio) deest Vox propia quâ hoc significetur: unde factum est ut Vocabula Græca in usum sint recepta.

Elaterem Nostri *a Spring* vocant; à Verbo *to spring*, eâ significatione quâ *Salire* seu *Exsilire* significat, (ut Germanicum & Danicum *Springen*, Belgicum *Springhen*,) quæ est Vocis illius significatio primaria. Significat etiam (& fortè frequentiùs) sensu Metaphorico, *Germinare*; eò quòd Germina de surculo quasi *Exsiliant*: Atque hinc tempus Vernum *the Spring* dicitur; quo scilicet potissimum omnia Germinant. Sed & Aquæ Fons seu Scaturigo (Aqua Saliens dicta) *a Spring* dicitur; ob salientem Aquam. Item, *to spring a Mine*, dicimus, quando Cuniculum, pulvere pyrio instructum, admoto igne accendimus, & *Exsilire* facimus.

Hinc Corpus Elasticum, *a springy body* dicimus; hoc est, Corpus Elatere instructum: &, Vim Elasticam, *Springyness*.

Unde

Unde sit in Corporibus hæc Vis Elastica; non hic inquiro: Sed neque ipsius Naturam suscipio me ita explicaturum, ut vel Lectori, vel mihi ipsi, per omnia satisfaciam. Neque enim id necesse est ad rem præsentem. Sufficit ut, undecunque fuerit, Vim istiusmodi in rerum naturâ esse certum sit: Cùm & pressa resurgere; Corporáque suo nisu restituta, ab se alia abigere, nemo non videat. Atque de hac Vi, undecunque fuerit, jam agimus.



PROPOSITIONES.

PROP. I.

Si Grave motum, in firmum Obicem, directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Corpus Elasticum: Eâdem celeritate resiliet, seu repercutietur, quâ advenerat; & per eandem rectam.

Esto enim A Grave (cujus pondus *m P*, celeritas *r C*, adeóque momentum *m r P C*,) quod, per A A rectam, in firmum Obicem B directè impingat. Sitque non ita perfectè Durum; ut nullâ ratione ictui cedat, vel Corpus latum, vel Obex. Sed neque ita Molle, ut figuram pristinam ictu deperdat (quod in Cerâ, Plumbo, Luto, aliisque ejusmodi Corporibus vel fragilibus vel ductilibus fieri solet,) sed vim habeat Elasticam (alterum vel utrumque Corporum) quâ se restituere valeat in figuram pristinam, quamprimum Vis Comprimens cessaverit. Fig. 299.

Atque intelligatur Obicis pars percussa, Vi Corporis impellentis introrsum pressa; quæ itaque insitâ Vi Elasticâ se restituere conabitur.

Dico primò; Pressionem hanc eousque continuò fieri, donec Vis Elastica, compressioni adversa, Vi Comprimenti æquipolleat. Quippe quamdiu Vis Comprimens, fortior est quàm Elateris Resistentia, etiamnum Elaterem flectere seu comprimere perseverabit. per prop. 12. Cap. I.

 Est

Est autem ea Vis comprimens, dupla momenti Gravis impingentis. Nam vis ab impingente Gravi illata, est ipsius momento æqualis (utpote cujus motus totus sistitur,) puta *mrPC*. Sed &, propter æqualem Obicis resistentiam, (quæ tantundem ad compressionem confert acsi æqualis vis contraria occurreret,) tantundem inde advenit, puta alterum *mrPC*; (sed cujus hic minor habenda ratio, utpote quod aliunde compensatur:) Adeóque vis tota compressiva, 2*mrPC*.

Dico porro; Vim Impellentem seu Comprimentem, ubi ad Æquipollentiam res redigitur, cessare; (utpote quæ tota flectendo Elatere impensa est.) Vis enim extrinsecus impressa, qualem supponimus Impellentem, (secùs quàm Vis insita, qualis est Gravitas, & Vis Elastica compressa,) ubi semel ad quietem redigitur, perit; neque valet seipsam restituere: ut neque se accelerare, ubi retardatur. Utut enim Corpus in motu, nisi impediatur, eo ipso perseverat: non acceleratur tamen, aut ex quiete in motum reducitur, absque causâ positivâ, per prop. 11. Cap. 1.

Dico itaque tertio; cessante (ut dictum est) motu Impellente, seu Comprimente, Vim Elasticam, jam liberam, & (ut modo demonstratum est) Vi pridem comprimenti æqualem, æqualiter utrinque se explicare nitentem, vim dimidiam seu alterum *mrPC* in Obicem impendere (utut irrito conatu,) alterum verò *mrPC* in advectum Grave. Quod itaque eâdem Vi, adeóque & eâdem Celeritate, Corpus A repellit, quâ advectum fuerat. (Nempe, Vi *mrPC*; adeóque, propter pondus *mP*, Celeritate *rC*.) Nam Vis Æqualis, eidem Ponderi applicata, eâdem Celeritate movet; per prop. 27. Cap. 1.

Dico denique; per eandem rectam repercussum iri. Cum enim à corpore directè impingente introrsum flectatur Elater, idémque Vi Elasticâ in figuram pristinam se restituat, per def. 1. hujus, (adeóque eâdem viâ redeat quâ premebatur,) eandem Directionem Corpori repercusso impertit quam inde acceperat, nisi quod sit ad partes contrarias. Quod itaque per eandem rectam redibit.

Quódque jam demonstratum est, positâ in Obice Vi Elasticâ: perinde obtinet si Vis illa sit in Corpore impingente; vel etiam in utroque. Quippe illud utcunque obtinet; Non priùs sisti Vim Impellentem, quàm æquipolleat Elateris (sive Singularis, sive Gemini,) adversa Resistentia; sed neque ultra perseverare; Unde reliqua sequuntur.

Idem

Idem aliter.

Si Elater nullus eſſet; ſiſteretur motus A, ad quietem redactus: per prop. 1. Cap. 11. Totus igitur qui deinceps eſt motus, eſt ab Elateris Vi reſtitutivâ. Ea verò ſemper æqualis eſt Ictûs Vi, (Cap. 11. prop. 5. & ſeqq. traditæ.) Vis enim Elateri illata, Ictui (quem totum ſuſtinet) æqualis eſt: quæ itaque Elaterem euſque comprimit donec hujus reſiſtentia illi æquipolleat. Et quidem ſi reſiſteret ut nudum Impedimentum; quieſceret adhuc advectum Grave: Cum vero Elater reſiſtat, non ut nudum Impedimentum, ſed ut Vis contraria, & quidem tantundem renitendo agens quantum compreſſus patiatur; ſitque hoc quod patitur, Ictui ſeu Vi illatæ æquipollens: eidem æquipollet Vis reſtitutiva. (Quod & in propoſitionibus ſequentibus non minus locum habet, adeóque & ibidem pro demonſtrato habeatur.) Eſt autem, hoc caſu, (poſito Gravis A, pondere mP, & Celeritate rC,) Ictûs magnitudo (per prop. 6. Cap. 11.) $mrPC$: tanta igitur erit Vis Elateris reſtitutiva: Quæ itaque cum utrinque ſe explicare ſatagat, adeóque Vi dimidia ſeu $mrPC$ in Obicem, utut irrito conatu; & in advectum A, vi item dimidiâ $mrPC$ repellendo: Erit, propter pondus mP, Celeritas (retrorſum) rC. Quod erat propoſitum.

Adhuc aliter.

Cum nullus fortè ſit tam firmus Obex quin aliquatenus percuſſioni cedat; utut tam exigua poſſit eſſe ea ceſſio ut omnem ſenſum fugiat, adeóque meritò negligatur & pro nullâ habeatur, & Obex pro immobili; (ut, verbi gratiâ, ſi muſca vel pulex in telluris molem in aere pendulam inſultum faceret:) Si res ita concipiatur; demonſtrabitur idem (mutato propoſitionum ordine) ex prop. 8. hujus: Ubi ſupponitur A motum, in B quieſcens, ſed non impeditum, impingere. Quippe ſi ſic ſit A, ponderis mP (exigui) cum celeritate rC; B verò ponderis nP (immensè magni) quieſcens: Erit impingentis A celeritas poſt contactum $\frac{m-n}{m+n}rC$ prorſum, (per prop. 8. hujus;) hoc eſt, (propter prævalentiam ſigni —, ponitur enim nP multo majus quàm mP,) $\frac{n-m}{m+n}rC$ retrorſum; quod (propter exiguam & planè contemnendam ponderis mP magnitudinem reſpectu immenſi ponderis nP) tantundem erit, hoc caſu, atque $\frac{n}{n}rC = rC$ retrorſum: Reliqui autem gravis B (per eandem prop. 8.) celeritas poſt contactum

$\frac{2m}{m+n} rC$; quæ (propter exiguam & planè contemnendam rationem m seu $2m$, ad n nedum ad $m+n$,) instar nullius erit; ut non immerito dici possit B immotum quiescere.

Sin ea suppositio non admittatur, sed Obex B censeatur planè immobilis; censenda erit ejus firmitas æquipollere ponderi quiescenti sed non impedito nP infinito, (pondus enim finitum non impeditum, nonnihil saltem movebitur, per eandem prop. 8.) Adeóque impingentis A, Celeritas post contactum (ibidem exhibita) $\frac{n-m}{m+n} rC$ retrorsum, erit $\frac{\infty - m}{m+\infty} rC$; quod tantundem est (propter finiti m ad infinitum ∞, rationem infinitè exiguam sive nullam,) ac $\frac{\infty}{\infty} rC = rC$. Et quiescentis pridem B, Celeritas post contactum $\frac{2m}{m+n} rC$, erit $\frac{2m}{m+\infty} rC$; quod tantundem est (propter m finitum, & n infinitum) atque $\frac{2m}{\infty} rC$, seu $\frac{0}{\infty} rC$, celeritas nulla; quare & B etiamnum quiescet. Prout alias ante demonstratum fuerat.

SCHOLIUM.

NOn ignoro; plerosque Mechanicorum Vim nescio quam in Motu incepto ponere, quâ (si procedere non possit) mutatâ directione (etiam absque novâ causâ) resiliat. Cùm verò hoc gratis dictum videatur, (ut novus motus absque novâ causâ incipiat,) & Postulatum; atque multis porro incommodis urgeri possit: Id me potissimum movet, quòd, utut nudum Impedimentum Motui tollendo sufficiat, (adeóque inceptum motum impedire valeat ne procedat;) quò tamen contrarius ponatur, Vi Positivâ videtur Opus: (per prop. 11, 12. Cap. 1.) Cúmque ea in Vi Elasticâ præsto sit, cur illam respuamus non video. (Præsertim cùm in Molli Corpore, vel etiam Fluido, in Solidum impacto, motum Sisti videamus, sed non Reflecti.)

Si tamen istiusmodi Corpus sit, ut nec ita Molle sit quin aliquid habeat Elasticæ Virtutis; nec ita interim Elasticum planè quin fractis Elaterum fibris aliquot (nec tamen omnibus) figuram quadantenus immutari patiatur: Resilitio quidem fiet, sed imperfecta. (Supponit enim Demonstratio, tam Validam esse Vim Elasticam, ut Vi Impellenti

sustinendæ

ſuſtinendæ par ſit, abſque aliquâ ſui ruptione.) Sed & idem quadantenus accidit ob Medii reſiſtentiam: quæ Motum tum Directum, tum Reflexum, ſenſim imminuit. Item, ob naturalem gravium Deſcenſum; qui ſe cum reliquis motibus ſenſim inſinuabit. Sed eas conſiderationes, &(ſi quæ ſint) extrinſecas alias, hic ſecludimus.

Notandum etiam; utut Vim Impellentem, quaſi totam extrinſecùs impreſſam ſupponamus; adeóque ceſſare totam ubi ad Æquipollentiam res redigitur: Fieri tamen poſſe, ut ea partim naturalis ſit, à Gravitate orta; uti cùm deorſum projicitur corpus impactum, aut etiam deorſum cadens motu naturaliter accelerato eum acquirit Impetum quo in Obicem impingit. Quod ubi contingit, moderatione opus erit. Separanda utique eſt Vis extrinſecus impreſſa, ab eâ quæ Gravitatis eſt ſimpliciter conſideratæ: Eáque tota perit; dum hæc permanet, & Vim Elaſticam eatenus obtundit, quò Reſilitio imperfectior evadat & minori cum celeritate; Quin & tanta eſſe poteſt ut Elaſticam Vim ita ſuperet, ut quamvis aliquantulum reſurgat (ob ſublatam Vim extrinſecùs impreſſam, quâ etiam primitùs comprimebatur,) non valeat tamen impactum corpus ab ſe abigere.

Sed & qui accelerando acquiritur Celeritatis gradus, ſeparandus erit à nativâ gravitate: Quippe Grave acceleratum, ubi Objecto Obice ne procedat impeditur, nativam quidem Gravitatem retinet, ſed acquiſitam Celeritatem deperdit; atque deinceps tanquam à Quiete incipiens procedit, nullâ ratione habitâ Celeritatis pridem-acquiſitæ ſed jam deperditæ.

Sin (contra hanc de Vi Elaſticâ hypotheſin) objiciatur; Omnia omnino Corpora Dura, hujuſmodi Reſilitionem ſeu Reflexionem admittere; & quidem ea fortiùs quæ Duriora ſunt & firmiora: Fieri quidem id omnino poteſt, nec interim adverſari huic de Vi Elaſticâ doctrinæ; Nempe, ſi & illa omnia Dura Corpora, ſint etiam Elaſtica. Quod quidni dicendum ſit, non video. Et quamquam quò Duriora ſunt, eò minùs preſſui cedant: cedunt tamen; &, quò minùs cedunt, eò fortiùs reſiſtunt, adeóque & repercutiunt. Et quamquam Cap. 11. (ubi de Percuſſione agitur) Duritiem præcluſâ Elaſticitate conſideremus; (ut quid inde ſequeretur demonſtremus ſi nulla eſſet Vis Elaſtica:) Non tamen id volumus ut Vim Elaſticam de Duris ſimpliciter negemus; cum nulla forſan ſint Corpora ita ſimpliciter-Dura ut illam non habeant: (Utut, ita Mollia, forſan eſſe poſſint.) Et quidem ego (ut dicam quod res eſt) omnino exiſtimo; Vel nulla eſſe Dura Corpora, quæ non ſint Elaſtica; vel ſaltem (ſiqua ſint) ea, invicem commiſſa, nullam Reflexionem pati; ſed obſervare leges

Capitis

Capitis XI. Et quidem in Marmore, Vitro, Ligno, Fictilibus, Metallis durioribus, aliisque duris innumeris, Vim Elasticam inesse; non tantum ex sono edito (Bombo vel Tinnitu, prout repercussio tardior est vel expeditior,) auribus percipimus; sed Oculo, & Tactu, observare licet, ob tremorem utique notabilem.

PROP. II.

Si Grave motum, in firmum Obicem Obliquè impingat; sitque vel Alterum vel utrumque Elasticum: Resilitio, eâdem Celeritate (& in eodem Plano) ita fiet, ut Angulus Reflexionis sit angulo Incidentiæ æqualis.

Fig. 310. INtelligatur, in A B C planum firmum, per O B rectam obliquam, impingens Grave; Angulum Incidentiæ faciens O B A. Componetur hic motus Obliquus per O B, ex duobus motibus (per prop. 6. Cap. 10.) altero Parallelo, ut O P seu A B; altero Perpendiculari, ut P B. Quorum quidem ille (utpote parallelus) in A B C planum neutiquam offensat, neque ob eo impeditur: adeóque eâdem Celeritate quâ prius procedet; puta, quo tempore ferebatur ab O A ad P B, eodem vel æquali feretur (æquali longitudine) à P B ad Q C. Altero vero (utpote perpendiculari) per P B in A B C planum directè impingit: adeóque, propter Vim Elasticam (sive alterius sive utriusque Corporis) in B puncto Incidentiæ, eâdem Vi, adeóque & eâdem celeritate, directè repercutitur per B P. per prop. præced. Hoc est, eodem seu æquali tempore feretur ab A C ad O Q quo ab O Q ad AC ferebatur; hoc est, eodem quo à PC ad QC. Adeóque per rectam B Q. per prop. 6. Cap. 10. Et propterea, propter O P ipsi P Q æqualem, & P B seu B P communem, (omnesque æquali tempore transactas,) erit B P O triangulum triangulo B P Q simile & æquale, (& quidem, propter O P Q unam rectam, in eodem plano utraque:) Adeóque tum P B Q angulus æqualis angulo P B O, tum (reliquus ad rectum) Q B C angulus Reflexionis, (reliquo item ad rectum) O B A angulo Incidentiæ, æqualis. Quæ erant demonstranda.

SCHO-

SCHOLIUM.

SIquis autem ex Tyronibus (aut alius quispiam tyrone major) quæriter, Cur simplicissimum motum rectum OB, ex duobus compositum affirmem Gratis? Aut etiam, si compositum esse velim; cum tamen mille modis aliis, æquo jure, dici possit componi; cur ego, aliquis posthabitis, hoc præ cæteris modo compositum, affirmem Gratis; (nec Probem, tum Compositum esse, tum hoc non alio modo compositum?) Respondeo, Nullum ita simplicem esse motum posse, quin in plures componentes resolvi possit. Dum autem hunc præ cæteris modum seligo; utor ego meo jure, qui (cum quamlibet possim) eam adhibeo compositionem quæ præsenti negotio sit accommoda. Neque probandum erit, Compositionem hanc unicam, esse possibilem, sed, ex multis unam. Liberum utique est, pro suo cujusque constructoris arbitrio, ex Veris innumeris ea seligere quæ ad rem præsentem conducant.

Atque hoc perinde obtinet (ut aliis compositionibus rem illustrem) in aliis atque in præsenti casu. Notum utique est, numerum 12, componi ex 3 × 4, sed & ex 2 × 6, item ex 1 × 12, (aliisque modis innumeris per numeros fractos.) Si itaque exponatur numerus 12, dato Divisore 2 dividendus, & quæratur Quotiens: Afferam ego protinus, Numerum 12 ex 2 × 6 compositum; adeóque sumpto Divisore 2, Quotiens erit 6. Sin oggerat aliquis, Numerum hunc Duodenarium de quo fit sermo, nullâ hujusmodi compositione constructum fuisse; sed nudâ Unitatum collectione; (putà, si totidem homines viritim collecti fuerint.) Cur itaque velim ego, numerum (additione merâ constructum) multiplicando compositum affirmare Gratis? Et quidem, si velim esse multiplicando compositum, cur sic compositum (ex 2 × 6) affirmem Gratis, cùm possit eodem jure ex 3 × 4, vel 1 × 12, &c. componi dici? nec probem, eo potiùs modo fuisse compositum? Num audiendus, inquam, est hic Objector? Annon reprehendum statim videas, Non eò minùs numerum 12 ex factoribus 2 × 6 compositum esse, vel in eos resolubilem, quod fuerit (hac vice) additione constructus? Quippe cùm constitutus est numerus, utcunque constituatur, non ideo deperdit proprias affectiones. Quod autem non dixerim ex 3 × 4, vel 1 × 12, Compositum, (utut hæc vera sunt, atque aliàs, ubi opus fuerit, dicenda,) sed ex 2 × 6: ratio in promptu est: Nempe, non quòd reliquæ compositiones non sint veræ, sed quòd ad præsens negotium sint inutiles. Quippe non

quærebatur

quærebatur numerus qui cum 1, vel 3, vel 4 compositus, sed qui cum 1 compositus, constituat 12.

Similiter; cùm possit Ratio *A* ad *B*, mille modis componi: putà ex *A* ad *C* & *C* ad *B*; vel ex *A* ad *D* & *D* ad *B*; vel ex *A* ad *E* & *E* ad *B*; &c. Si tamen datis rationibus *A* ad *B* (putà 1 ad 2) & *A* ad *C* (putà 1 ad 3) quæratur, quæ sit ratio *C* ad *B*: Dicendum erit, non quidem rationem *A* ad *B* compositam esse ex *A* ad *D* & *D* ad *B*; aut ex *A* ad *E* & *E* ad *B*; (quippe hæ compositiones, utut veræ sint, ad rem præsentem non faciunt;) sed, ex *A* ad *C* & *C* ad *B*: Adeoque, si ex ratione *A* ad *B* eximatur (altera componentium) *A* ad *C*, habebitur (reliqua) *C* ad *B*; (puta 3 ad 2.)

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{C} \times \frac{C}{B} = \frac{A}{D} \times \frac{D}{B} = \frac{A}{E} \times \frac{E}{B} \ \&c. \quad \frac{A}{C}\Big)\frac{A}{B}\Big(\frac{C}{B}. \quad \frac{1}{3}\Big)\frac{1}{2}\Big(\frac{3}{2}.$$

Siquis autem quærat; cur velim ego rationem simplicissimam, 1 ad 2, compositam esse gratis affirmare? Et quidem, Cur sic compositam, cum aliis mille modis non minus componi possit? Omnino imprudenter atque imperitè hoc quæritur: Cùm nulla sit tam simplex ratio quæ non possit in plures resolvi: Neque, cur, reliquis posthabitis, hanc selegerim compositionem; aliam reddendam esse causam, quàm quod hæc sit præsenti negotio reliquis accommodatior.

Pariter; si expositi Gravis, datum sit Momentum *mrPC*, & datum Pondus *2mP*, quæratur autem Celeritas: Respondendum, non quidem $mrPC = mP \times rC$, vel $= rP \times mC$ (quæ quidem vera sunt, & alias dicenda, sed nihil ad rem præsentem,) sed $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$; (adeoque Celeritatem quæsitam esse $\frac{1}{2}rC$:) Non utique quærebatur, quâ Celeritate pondus *mP*, seu *rP*, sed quâ *2mP* ferendum sit ut momentum habeatur *mrPC*.

Atque similiter omnino in casu præsenti. Quippe cùm constet motum O B, eundem esse cum eo qui componitur ex O P & P B, (neque enim hoc negabitur;) quidni dicam motum O B ex O P & P B componi, aut (quod tantundem est) in hos resolubilem esse? (eodem jure quo, si constet numerum 12 eundem esse cum eo qui componitur ex 3 × 4, dixerim 12 ex 3 × 4 componi?) Et quamquam multis adhuc aliis modis componi possit; dum hunc præ cæteris seligo ut negotio præsenti accommodum; utor ego meo jure: Eodem usurus, si, exposito plano alio, aliam selegero compositionem. Quippe si pro A B C exponeretur planum α B γ; eundem O B motum, compositum dicerem (non, ex O P & P B sed) ex O π & π B. Adeóque, propter æquales O π, π χ, in eâdem parallelâ rectâ; & B π ipsi π B

XIII.

i cum 2

i ; puta
E & E
A ad C
rit, non
B; aut
sint, ad
Adeoque,
C, habe-

3
—.
2

imam, 1
compo-
Omnino
simplex
is post-
esse cau-
tior.
PC, &
dendum,
era sunt,
$P \times \frac{1}{2} rC$;
rebatur,
it ut mo-

constet
& PB,
OP &
em esse?
m eo qui
amquam
ris seligo
dem usu-
Quippe
m, com-
Adeò-
B π ipsi
π B

PROP.

B vel a
Angulú
Has aute
eæ; f
em pro
notùs C
separem
endo m
Estqu
guisse, f
non num

Si duo
mutu
que)
Aut eti
bean
sint
Resiliet
eand

INtelli
dus sit
C; huj
Moment
cum utri
priùs fle
(per de
quietem
(impelle
quæ eâde
quâ adv
prop.27
que rC,
rC, & p

,B vel æqualem vel eandem ; Reflexionem futuram esse in B χ recta ; Angulúmque Reflexionis χ B γ, angulo Incidentiæ O B α æqualem. Has autem (respectivè) compositiones adhibeo, non quasi aliæ non essent veræ ; sed quòd, ex veris multis, ea seligenda sit (utrobique) quæ ad rem propositam conducat. Id autem hic loci est ; ut totum illud motûs Obliqui O B cui adversatur planum A B C, vel α B γ, ab eo separem cui non adversatur : quod non aliter obtinetur, quàm resolvendo motum obliquum in Parallelum est Perpendicularem.

Estque res hæc tam Clara, ut nullâ illustratione putaverim indiguisse, si non hoc ipsum serio objectum viderim à Viro cum tyronibus non numerando.

PROP. III.

Si duo Gravia invicem Æqualia, æquali Celeritate sibi mutuò directè occurrant ; sintque (alterum vel utrumque) Corpora Elastica :

Aut etiam, si Gravia illa sint Inæqualia, sed Celeritates habeant reciprocè proportionales, (quo saltem Momenta sint Æqualia :)

Resiliet utrumque eâdem Celeritate quâ accesserat, & per eandem rectam.

INtelligantur, sic occurentia, A, B, gravia : quorum utriusque Pondus sit mP, Celeritas rC : Vel, illius quidem Pondus mP, Celeritas rC ; hujus verò Pondus rP, Celeritas mC : Adeóque (utrovis casu) Momentum utriusvis $mrPC$, & simul utriusque $2mrPC$. Quorum cum utriusque Vim sustineat Elater (sive singularis sive geminus,) nec prius flecti cesset quam hujus resistentia eorum utrique æquipolleat, (per demonstrata ad prop. 1. hujus ;) tum verò Vis impellens (ad quietem redacta, adeóque destructa,) urgere cesset : Elater Vi suâ (impellentibus æquali) æqualiter utrinque se expedire satagens, utrinque eâdem Vi (totius dimidiâ) $mrPC$ repellit gravia ; hoc est, eâdem quâ advehebantur ; adeóque & eâdem respectivè Celeritate ; per prop. 27. Cap. 1. Hoc est, si utrinque sit pondus mP, celeritate utrinque rC, (sed ad contrarias partes :) Sin secùs ; pondus mP Celeritate rC, & pondus rP celeritate mC : (propter $mrPC = mP \times rC$ Fig. 302.

 =

$= rP \times mC$:) Hoc est, eâdem Celeritate utrumque quâ advenerat.

Et quidem per eandem rectam (contrariis motibus) propter Elaterem eâdem Directione redeuntem quâ premebatur; utpote ad figuram pristinam se restituere satagentem. Quod & in sequentibus propositionibus pariter intelligendum erit; adeóque & ibidem pro demonstrato habeatur.

Idem aliter.

Si Elater nullus esset; sisteretur motus uterque, ad quietem redactus; per prop. 4. Cap. 11. Adeóque totus qui deinceps est motus, est ab Elateris Vi restitutiva: Quæ tanta semper est quanta est Vis Ictûs; (ut ad prop. 1. hujus, ostensum est:) Hoc est, in casu præsenti, (per prop. 7. Cap. 11.) $2mrPC$. Quæ utrinque æqualiter se expedire satagens, agit utrobique ut $mrPC$: Adeóque repellit Pondus mP celeritate rC, & pondus rP celeritate mC: ut prius.

PROP. IV.

Si duo Gravia Elastica (non ab invicem compressa) vel quiescant utraque; vel utraque per eandem rectam ad easdem partes æquali celeritate ferantur; vel denique Antecedens Celeritate majore; (sive invicem contigua sint, sive disjuncta:) Nullus Impulsus fiet, aut Elateris compressio; adeóque nulla propterea motuum immutatio.

Quare &, si, Gravibus aliàs motis, communis addatur (vel auferatur) Celeritas; nulla fit inde impulsûs mutatio, (aut quæ hinc sequuntur:) sed perinde est (Impulsum quod spectat, aut Elateris compressionem,) sive adsit sive absit communis illa celeritas.

PRopositio patet. Quippe, si utraque quiescant, nulla Vis utrius infertur, nullus obstruitur motus, neutrum impellit reliquum, nulláque fit quæ ab impulsu esset Elateris compressio, aut quæ ab utrovis procederet motuum immutatio, (putà, quæ vel Celeritatem spectat, vel Directionem,) utut contigua fuerint ea Gravia; nedum si disjuncta.

Similiter, si ferantur utraque ad easdem partes eadem Celeritate. Quippe,

Quippe, si disjuncta sint, manebunt adhuc disjuncta, (& quidem eodem intervallo,) propter eandem utriusque Celeritatem; adeóque ne quidem se contingent mutuò, nedum impellent. Sin contigua sint; dum tamen Antecedens eâdem Celeritate fugit quâ sequitur Insequens; utcunque nulla Vis infertur nulla motûs obstructio; adeóque nullus impulsus, nulla compressio, nulláque inde motûs immutatio.

Sin Antecedentis Celeritas sit major: tantum abest ut à segniùs Insequente prematur, ut hoc à tergo relinquatur, facto intervallo si fuerint contigua, & aucto ubi disjuncta fuerint.

Addo tamen, *modo ne sint ab invicem compressa:* Quippe, si hoc contigerit, Vis Elastica, quamprimum poterit, se exseret, motûsque immutationem efficiet.

Atque eâdem ratione constabit Corollarium. Quippe, quâ Celeritate fugit Antecedens, adeóque se subducens declinat ictum; eatenus sequenti non obstat, ejúsve motum obstruit, unde sequeretur impulsus vel compressio, (non magis utique quàm ubi sequenti contiguo se subducit antecedens;) sed tota Vis impulsiva seu compressiva, æstimanda est, ab excessu Celeritatis sequentis supra Celeritatem antecedentis ad easdem partes moti; qui idem utcunque erit quicunque vel addatur vel auferatur motus utrique communis.

Aliter.

Vel sic; Ob motum communem, nullus fit Ictus, vel ictûs immutatio, per prop. 7. Cap. 11. Ergo, nulla Elateris compressio (aut quæ hinc sequuntur) ut quæ Ictui æquipollet; per demonstrata ad prop. 1. hujus.

PROP. V.

Si Grave motum, Æquali Quiescenti (nec impedito tamen) directè impingat; sitque vel alterum vel utrumque Elasticum: Motum quiescet; & Quiescens movebitur, eâ Celeritate quæ fuerat priùs moti.

Esto Gravium hujusmodi invicem æqualium, A, B, pondus utriusvis *mP*. Quorum B quiescat; eique directè impingat A, Celeritate *rC*, adeóque Momento seu Impetu $mrPC = mP \times rC$. Vim huic æquipollentem Imprimeret Elateri, (eâdem seipsum exuens) quâ (retentâ) Elater post repelleret ipsum A (ad quietem redactum,) modò B fir- Fig. 300.

mum esset: per prop. 1. hujus. (Ut taceam id quod est ab Obice atque in Obicem rependitur.) Sed, propter non impediti B cessionem, quam ab A recipit Vim Elater, eandem cedenti B protinus impertit, (nec in se retinet, ut in casu prop. 1. quò possit A post repellere.) Unde factum est, ut impellens A (vi suâ destitutum quam in Elaterem impenderat) Quiescat; eâque Vi $mrPC$ (Elateris interventu in B collatâ) propellatur B; adeóque (propter mP pondus) Celeritate rC (prorsum,) quæ fuerat impellentis.

Demonstratio alia.

Sunto hujusmodi Gravia æqualia A, B, quorum utriusvis Pondus sit mP. Atque, in B quiescens, directè impingat A, Celeritate rC; adeóque Momento seu Impetu $mrPC$. Quo itaque, propter cessionem non impediti B, utraque junctim ferenda essent (si Vis Elastica abesset) Celeritate dimidiâ, $\frac{1}{2}rC$ prorsum, (propter $mrPC = 2mP \times \frac{1}{2}rC$,) per prop. 2. Cap. 11. Sed (propter Vim Elasticam) Elateri imprimitur Vis restitutiva ipsi $mrPC$ æquipollens. (Nam quamdiu Elateris flexio facilius fiat quam utriusque Gravis processus, Elater porro flectitur; & quâ Vi flectitur, eâdem propter Vim Elasticam se restituit.) Elater itaque, utrinque se explicare satagens (diremptis invicem Gravibus) Repellit A, Vi $\frac{1}{2}mrPC$; atque eâdem Vi $\frac{1}{2}mrPC$ Propellit B; Adeóque (propter pondus utrobique mP,) A quidem Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) B verò, Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorsum.) Sed ferendum erat A alio nomine (ut dictum est) Celeritate $+\frac{1}{2}rC$ (prorsum;) Ergo, cùm hoc nomine accedat Celeritas $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) quiescet A (seu nullâ in utramvis partem Celeritate movebitur) propter $+\frac{1}{2}rC - \frac{1}{2}rC = 0C$. Ferendum autem erat B alio nomine (ut item ostensum est) Celeritate $\frac{1}{2}rC$ (prorsum;) sed & hoc nomine propellitur item Celeritate (prorsum) $\frac{1}{2}rC$: Ergo, tota Celeritas est $\frac{1}{2}rC + \frac{1}{2}rC = rC$ (prorsum;) hoc est, ea quæ fuerit prius-moti A.

Vel sic brevius.

Positis ut priùs; ferenda essent utraque si Elater nullus foret, Celeritate $\frac{1}{2}rC$ prorsum; adeóque utrumvis momento seu Vi $\frac{1}{2}mrPC$; per prop. 2. Cap. 11. Est autem (per prop. 9. Cap. 11.) Ictûs magnitudo $mrPC$; atque huic æqualis Vis Elateris restitutiva, (per demonstrata ad prop. 1.) quæ se utrinque explicare satagens, dimidiâ Vi tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque ipsi A impertit Vim $-\frac{1}{2}mrPC$ (retrorsum,) & B, Vim $+\frac{1}{2}mrPC$ (prorsum:) quæ si prius positis respectivè addantur, fiet Vis in A $\frac{1}{2}mrPC - \frac{1}{2}mrPC = 0PC$; quod itaque quiescet; in B verò $\frac{1}{2}mrPC + \frac{1}{2}mrPC = mrPC$; (prorsum;)

(prorsum;) quod itaque (propter pondus *m P*) feretur prorsum Celeritate *r C* quæ fuerat ipsius A.

Adhuc alia.

Sunto ea Gravia æqualia (ut prius) A, B; & quiescenti B, directè impingat A, Celeritate *r C* prorsum. Intelligatur autem utrique superaddi motus communis, Celeritate $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum;) quo fiat Gravis A Celeritas $rC-\frac{1}{2}rC=\frac{1}{2}rC$ (prorsum,) & Gravis B Celeritas $-\frac{1}{2}rC$ (retrorsum.) Quo casu, ferretur A, post contactum Celeritate $-\frac{1}{2}rC$(retrorsum,)& B Celeritate $+\frac{1}{2}rC$(prorsum,)per prop. 3. hujus. Sed (propter communem motum nullius instar, impulsum quod spectat, per prop præced) idem erit impulsûs effectûs in casu præsenti. Si itaque in statum pristinum restituantur, demptâ utrinque quæ addebatur Celeritate $-\frac{1}{2}rC$, (seu, quod eodem recidit, additâ Celeritate $+rC$ prorsum,) habebitur Gravis A Celeritas $-\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=oC$; & Gravis B, Celeritas $+\frac{1}{2}rC+\frac{1}{2}rC=+rC$. Hoc est, quiescet A, & feretur B prorsum, eâ Celeritate quæ fuerat ipsius A.

SCHOLIUM.

Plures hic demonstrationes congessi (ut & in aliis propositionibus,) non quòd diffidam singulis (velimque numero supplere quod Vi deest,) inest enim singulis sua Vis: Sed, cùm pro vario lectorum gustu modò hic modò ille demonstrandi modus placeat magis, ut quam magis velit Lector eligat. Prima quidem, aut etiam secunda (ut ad prop. 1. & 3. Physicam rei causam magis explicant; quam tamen in sequentibus parciùs prosequor, ut quæ ab his dependent. Penultima (quæ ex Vi quæ foret si Elater nullus esset, eâque quæ ex Elateris Vi restitutivâ, ictui semper æquali, colligit Vim integram,) meis hypothesibus Cap. 11. traditis maximè accommodata est,& demonstratio Geometrica (uti mihi videtur) maximè genuina. Adjunxi tamen ultimam, in eorum præsertim gratiam quæ hypothesibus illis meis (vix dum receptis) difficiliùs forsan sint assensuri. Eâ quippe methodo (quam,unà cum præcedente, sequentibus item propositionibus accommodo,) missis aliis, ex solis prop. 3. & 4. hujus admissis (quas alii postulant, potiùs quàm probant, tanquam per se claras, aut experimentis Physicis satis comprobatas) sequentes solo calculo elicit: ut (quicquid sit de illis hypothesibus, quas tamen ego maximè genuinas existimo) nullus sit de propositionum illarum veritate dubitandi locus; ut quæ non aliter à meis hypothesibus dependeat, quàm quod ego inde probem propositionem tertiam hujus, quam alii gratis postulant. Sed & ex-

istimavi

istimavi non abs re fore, utriusque methodi consensum indicare: Adeóque Phænomena Motuum in Hypothesi nostra, (utut sint ex aliis principiis deducta; ipsáque Hypothesis nostra, in *Transactionibus Philosophicis* postmodum vulgata, *Societati Regiæ* prius fuerit exhibita & Regestis inserta, quam eorum vel vulgatæ fuerit vel exhibitæ;) eadem planè sint cum Phænomenis Hypothesium D. *Christophori Wrenni* nostri, & D. *Christiani Hugenii* Batavi. Id utique interest; quod, quæ illi vel postulant vel ex observatis nullâ habitâ Elateris ratione supponunt; nos, Elateris ope, ex primis Principiis deducimus: Phænomenis interim quæ nos inde ratiocinando colligimus, iisdem provenientibus quæ ex factis Experimentis observarunt ipsi. Ut inde minùs dubitandum sit, (cum singuli, clam reliquis, à diversis principiis, & diversis methodis ad eadem Phænomena pervenerimus,) quin in veritate Phænomenûn consentiamus omnes.

PROP. VI.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, ferantur (per eandem rectam ad easdem partes) Celeritatibus inæqualibus, & consequens (majori Celeritate latum) antecedenti directè impingat: Ferentur, post contactum, ad easdem partes utraque, celeritatibus alternatis, seu invicem permutatis.

SIt Gravium illorum æqualium A, B, utriusvis pondus mP; celeritas illius, $rC = sC + tC$; hujus sC: adeóque momentum illius, $mrPC$; hujus, $msPC$; prorsum utraque. Eritque propterea Vis Elateris restitutiva (utpote Ictui æqualis, per demonstrata ad prop. 1.) $mrPC - msPC = mtPC$; per prop. 10. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare nitens, vi dimidiâ $\frac{1}{2}mtPC$, tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque (propter pondus utrobique mP) confert illi celeritatem $-\frac{1}{2}tC = -\frac{r-s}{2}C$ (retrorsum;) huic, $+\frac{1}{2}tC = +\frac{r-s}{2}C$ prorsum. Sed & aliunde (si Elater nullus esset) fe-

rendum

[...]ndum erat utrumque Celeritate $\frac{r+s}{2}C$; per prop. 3. Cap. 11. Quâ utrobique additâ, fit Gravis A, celeritas $-\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C = sC$; & Gravis B, celeritas $+\frac{r-s}{2}C+\frac{r+s}{2}C = rC$: Hoc est, prorsum utraque & celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sint Gravia illa æqualia A, B; sitque antecedentis B, celeritas sC; insequentis A, celeritas (major) $rC = sC + tC$. Cum itaque sit utrique communis celeritas sC, tantundem est (compressionem quod spectat) atque si utrobique abesset; (per prop. 4. hujus.) Adeóque sequens A, celeritatis excessu tC, impingeret in B quiescens. Quo casu feretur B, post contactum, celeritate tC (quæ fuerat insequentis A,) A verò (quiescens utique) celeritate $0C$; per prop. 5. hujus. Si itaque utrique restituatur, quæ communis fuerat, celeritas sC (modò dempta;) habebitur celeritas A, $0C + sC = sC$; & celeritas B, $tC + sC = rC$: Hoc est, ferentur utraque ad easdem partes, celeritatibus permutatis.

PROP. VII.

Si duo Gravia (Elastica) invicem æqualia, Celeritatibus inæqualibus (per eandem rectam ad contrarias partes) sibi mutuò directè occurrant: Ferentur deinceps ad partes contrarias, Celeritatibus invicem permutatis.

Sit Gravium æqualium A, B, utriusvis pondus mP; illius verò celeritas, rC (prorsum;) hujus verò $-sC$ (retrorsum;) sitque $r+s=z$. Erit momentum illius, $+mrPC$; hujus, $-msPC$: Adeóque Elateris (qui utrumque sustinet) Vis restitutiva (Ictui æqualis) $mrPC + msPC = mzPC$: per prop. 11. Cap. 11. Quæ, æqualiter utrinque explicans, vi dimidiâ $\frac{1}{2}mzPC$ utrumque repellit; adeóque, propter pondus mP utrobique, confert Gravi A celeritatem $-\frac{1}{2}zC = -\frac{r+s}{2}C$ (retrorsum;) & Gravi B celeritatem $+\frac{1}{2}zC$ Fig. 302.

=

$= + \frac{r+s}{2} C$ (prorsum.) Sed & ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) celeritate $\frac{r-s}{2} C$; per prop. 4. Cap. 11. Quæ si utrobique addatur; habebitur celeritas A, $- \frac{r+s}{2} C + \frac{r-s}{2} C = - s C$ (retrorsum;) B verò, $+ \frac{r+s}{2} C + \frac{r-s}{2} C = + r C$ (prorsum:) Hoc est, ad partes contrarias, celeritatibus permutatis.

Aliter.

Sit Gravis A celeritas (prorsum) $rC = sC + tC$; & Gravis B (eidem æqualis) celeritas $-sC$ (retrorsum;) quæ sibi mutuò directè occurrant. Cúmque habeatur utrinque celeritas sC, sed ad contrarias partes; ferrentur post contactum (propter has celeritates) A quidem, celeritate $-sC$ (retrorsum;) B verò, celeritate $+sC$ (prorsum;) per prop. 3. hujus. Sin demi intelligantur celeritates hæ; relinquetur Gravi A, celeritas tC, quâ feratur in B ut quiescens: Et, propter hanc celeritatem, ferretur B (prorsum) celeritate tC; & A (quiescens) celeritate oC: per prop. 5. hujus. Quæ si priùs memoratis respectivè addantur; habebitur Celeritas A, $-sC + oC = -sC$ (retrorsum;) & celeritas B, $+sC + tC = +rC$ (prorsum;) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

Adhuc aliter.

Sint Gravia æqualia A, B, quæ sibi mutuò directè occurrant; A quidem celeritate $rC = sC + tC$ prorsum; & B, celeritate $-sC$ (retrorsum.) Intelligatur autem utrique conferri (motu communi) celeritas $+sC$ prorsum; quò fiat Celeritas A, $rC + sC$ (prorsum;) B verò, $-sC + sC = oC$: (ut feratur A celeritate $rC + sC$, tanquam in B quiescens.) Quod si ponatur; erit, post contactum, celeritas A, oC; B verò $rC + sC$ (prorsum;) per prop. 5. hujus. Sed & idem erit (impulsum quod spectat) in casu proposito. Si itaque utrinque dematur (quæ adjecta fuerat) celeritas $+sC$: habebitur ipsius A celeritas $oC - sC = -sC$ (retrorsum;) & B, celeritas $rC + sC - sC = rC$ (prorsum:) Hoc est, ad contrarias partes, celeritatibus permutatis.

PROP.

XIII.

i Elater

æ si u-

$^{s}C=$

C (pror-

s.

B (ei-
directè
ntrarias
quidem,
rsum;)
inquetur
ter hanc
iescens)
espectivè
rsum;)
ontrarias

; A qui-
(retror-
celeritas
B verò,
in B qui-
A, o C;
idem erit
ue dema-
A celeritas
$-sC=rC$
utatis.

PROP.

Si Gr
esc
Ela
Celer
qua
run
pro
qui
Celeri
qua
gen
pon
mot

Esto
men

tus n P.
per prop
ritate c
adeóque
(retrorfu
(prorfum
ret) con
Cap. II.
$\frac{n}{r+n} r$
prout m v

PROP. VIII.

Si Grave motum, quacunque Celeritate, in Grave quiescens (æquale vel inæquale) directè impingat; (sintque Elastica, alterum vel utrumque:)

Celeritas, post contactum, Gravis Impingentis, ad eam quæ priùs fuerat, est, ut differentia ponderum, ad eorundem summam; (& quidem prorsum vel retrorsum, prout Pondus impingentis majus est aut minus Pondere quiescentis; sin ea sint æqualia, quiescet:)

Celeritas autem Quiescentis, fiet (post contactum) ad eam quæ fuerat Impingentis, ut duplum ponderis impingentis ad eandem ponderum summam. Adeóque si pondera fuerint æqualia, eâ celeritate quæ fuerat priùs moti.

Esto Gravis A moti, Pondus mP, Celeritas rC, adeóque Momentum $mrPC$: Et quiescentis B (cui directè impingit A) Pondus nP. Erit Elateris vis restitutiva (ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}rPC$, per prop. 12. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicans, Celeritate dimidiâ $\frac{mn}{m+n}rPC$ tum Repellit A, tum Propellit B; adeóque confert illi (propter pondus mP) Celeritatem $-\frac{n}{m+n}rC$ (retrorsum;) huic (propter pondus nP) Celeritatem $+\frac{m}{m+n}rC$ (prorsum.) Sed & aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) communi Celeritate $\frac{m}{m+n}rC$ (prorsum;) per propos. 2. Cap. 11. Quæ si utrinque addatur, habebitur Celeritas A, $-\frac{n}{m+n}rC+\frac{m}{m+n}rC=\frac{m-n}{m+n}rC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutrà verò si fuerint æqualia, propter Fig. 300.

$m - n = \delta$:) & Celeritas B, $+\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$: Et quidem, si $m=n$, Celeritate rC. Quæ demonstranda erant.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; & Gravis B, pondus nP: atque intelligatur A, Celeritate rC, directè impingere in B quiescens. Intelligatur item dividi Celeritas rC, in partes ponderibus reciprocè proportionales; Nempe, $\frac{n}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi mP; & $\frac{m}{m+n} rC$, quæ respondeat ponderi nP. Atque intelligatur porro utrique subtrahi Celeritas (quæ B respicit) $\frac{m}{m+n} rC$, seu tantundem retrorsum addi; (Quæ communis vel additio vel subductio impulsûs valorem non immutat, per prop. 4. hujus :) Quò fiat Celeritas A, $rC - \frac{m}{m+n} rC = \frac{n}{m+n} rC$; & Celeritas B, $cC - \frac{m}{m+n} rC = -\frac{m}{m+n} rC$; quæ itaque sunt Ponderibus reciprocè proportionales. Repercutientur itaque (per prop. 3. hujus) eisdem Celeritatibus utraque quibus accesserant : Hoc est, A, Celeritate $-\frac{n}{m+n} rC$, (retrorsum;) & B, Celeritate $+\frac{m}{m+n} rC$ (prorsum.) Idémque erit impulsûs ratio in Casu præsenti. Adeóque si restituatur utrobique (quæ modò ablata est) Celeritas $\frac{m}{m+n} rC$ prorsum : habebitur Gravis A futura Celeritas $-\frac{n}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{m-n}{m+n} rC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n majus fuerit; neutrà verò si sint æqualia;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n} rC + \frac{m}{m+n} rC = \frac{2m}{m+n} rC$ (prorsum.) Ut priùs.

PROP. IX.

Si duo Gravia (Elaſtica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuſcunque Celeritatibus, ferantur utraque per eandem rectam, ad eaſdem partes; (ita tamen ut Inſequens, majore Celeritate latum, in Antecedens directè impingat:) Ferentur utraque, poſt contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas ſubjectus Calculus indicabit.

Sit Antecedentis B, pondus nP, Celeritas sC prorſum: Sequentis A, pondus mP, Celeritas (major) $rC = sC + tC$. Erit Elateris Fig. 301. Vis reſtitutiva (Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m+n}tPC$; per prop. 13. Cap. 11. Quæ utrinque ſe æqualiter explicans, adeóque vi utrinque dimidiâ, $\frac{mn}{m+n}tPC$; Gravi A, propter pondus mP, Celeritatem confert $-\frac{n}{m+n}tC$ (retrorſum;) & Gravi B, propter pondus nP, Celeritatem $+\frac{m}{m+n}tC$ (prorſum.) Sed & aliunde ferenda erant (ſi Elater nullus eſſet) Celeritate communi $\frac{mr+ns}{m+n}C$, per prop. 3. Cap. 11. Quæ itaque ſi utrobique addatur; habebitur Gravis A futura Celeritas, $-\frac{n}{m+n}tC + \frac{mr+ns}{m+n}C = \frac{mr+ns-nt}{m+n}C$ $= \frac{mr-nr+2ns}{m+n}C$ (prorſum vel retrorſum, prout ſignum + vel − prævaluerit, adeóque neutrà ſi æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{m}{m+n}tC + \frac{mr+ns}{m+n}C = \frac{mt+mr+ns}{m+n}C = \frac{2mr-ms+ns}{m+n}C$ prorſum. Quod oſtendendum erat.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP: & ferantur utraque per eandem rectam ad eaſdem partes; putà, prorſum utraque:

B quidem, Celeritate sC; A verò, Celeritate (majore) $rC = sC + tC$, atque in B directè impingat. Intelligatur autem, motu communi, utrique detracta Celeritas sC, (Quæ, cùm communis sit, impulsum non mutabit, per prop. 4. hujus.) Quo facto, B ad quietem redigetur (propter $sC - sC = cC$;) eique directè impinget A, Celeritate $rC - sC = tC$. Quo casu, ferretur post contactum A Celeritate $\frac{m - n}{m + n} tC$ (prorsum vel retrorsum prout m vel n major fuerit) B verò Celeritate $\frac{2m}{m + n} tC$ (prorsum;) per prop. præced. Cùm itaque eadem sit ratio (impulsum quod spectat) in casu præsenti: Si restituatur utrobique, quæ modò ablata est, Celeritas sC prorsum; habebitur futura Celeritas Gravis A, $\frac{m - n}{m + n} tC + sC = \frac{mt + ms - nt + ns}{m + n} C = \frac{mr - nr + 2ns}{m + n} C$ (prorsum vel retrorsum, prout signum $+$ vel $-$ prævaluerit, adeòque neutrà si æquipolleant;) & Gravis B, Celeritas $\frac{2m}{m + n} tC + sC = \frac{2mt + ms + ns}{m + n} C = \frac{2mr - ms + ns}{m + n} C$ prorsum. Ut prius.

PROP. X.

Si duo Gravia (Elastica) utcunque vel Æqualia vel Inæqualia, & quibuscunque Celeritatibus, per eandem rectam, sibi mutuò directè occurrant: Ferentur utraque, post contactum, eis Celeritatibus, & ad eas partes, quas calculus indicabit.

Fig. 302. SIt Gravis A, pondus mP, Celeritas $+ rC$ (prorsum;) & Gravis B, directè occurrentis, pondus nP, Celeritas $- sC$ (retrorsum;) sitque $r + s = z$. Erit Elateris Vis restitutiva (utpote Ictui æqualis) $\frac{2mn}{m + n} zPC$; per prop. 14. Cap. 11. Quæ æqualiter utrinque se explicare satagens, utrinque destribuit Vim dimidiam

$\frac{mn}{m+n}zPC$. Adeóque Gravi A, propter pondus mP, celeritatem confert $-\frac{n}{m+n}zC$ (retrorsum;) & Gravi B, propter pondus nP, celeritatem $+\frac{m}{m+n}zC$ (prorsum.) Sed aliunde ferenda erant utraque (si Elater nullus esset) celeritate $\frac{mr-ns}{m+n}C$, per prop. 4. Cap. 11. Quæ itaque si utrobique addatur; habebitur Gravis A futura celeritas $-\frac{n}{m+n}zC+\frac{mr-ns}{m+n}C=\frac{mr-nz-ns}{m+n}C=\frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum prout signum + vel — prævaluerit, adeóque neutrà si æquipolleant;) & Gravis B, celeritas $\frac{m}{m+n}zC+\frac{mr-ns}{m+n}C=\frac{mr+mz-ns}{m+n}C=\frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorsum item vel retrorsum, prout prævaluerit signum + vel —, adeóque neutrà si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

Aliter.

Sit Gravis A, pondus mP; Gravis B, pondus nP; quæ sibi mutuò directè occurrant: A quidem celeritate rC (prorsum,) B verò celeritate $-sC$ (retrorsum:) sitque $r+s=z$. Intelligatur autem (motu communi, qui itaque impulsum non immutabit, per prop. 4. hujus,) addita utrique celeritas $+sC$ (prorsum;) quò redigatur B ad quietem (propter $-sC+sC=0C$;) cui ut quiescenti impingat A celeritate $rC+sC=zC$. Quo casu ferretur, post contactum, A celeritate $\frac{m-n}{m+n}zC$; B verò, celeritate $\frac{2m}{m+n}zC$, per prop. 8. hujus. Adeóque, demptâ utrobique, quæ modò addebatur, celeritate sC; habebitur Gravis A, futura celeritas $\frac{m-n}{m+n}zC-sC=\frac{mz-ms-nz-ns}{m+n}C=\frac{mr-nr-2ns}{m+n}C$ (prorsum vel retrorsum prout signum + vel — prævaluerit; neutrà si æquipolleant:) & Gravis B, celeritas $\frac{2m}{m+n}zC-sC=\frac{2mz-ms-ns}{m+n}C=\frac{2mr+ms-ns}{m+n}C$ (prorsum item vel retrorsum, prout signum + aut — præpolleat; neutrà si æquipolleant.) Quod ostendendum erat.

CAP.



CAP. XIV.

De Hydrostaticis.

PROP. I.

A. Si Grave Fluidum (à latere ex omni parte & fundo ne effluat, conclusum; & ab aliâ Vi liberum;) supernè vel non prematur, vel æqualiter prematur ubique: Retinebit illud, supernam superficiem quod spectat, situm Horizontalem, seu potiùs Sphæricum, Telluri

B. concentricum: (quæ hic pro eodem habentur.) Atque, inde deturbatum, suapte se Gravitate eò restituet.

C. Sin supernè prematur Inæqualiter, (plus alibi, alibi minùs;) eâ parte quâ majori pressu urgetur, Descensus fiet; partibus ita pressis, alias, quæ vel non pressæ sunt, vel minùs pressæ, loco suo detrudentibus; quæ itaque, pro illo descensu, assurgent.

D. Quódque de Superficie supremâ dictum est; alii cuivis (intra fluidum) parallelæ, similiter accommodabitur.

A. Fig. 311. ESto Gravis Fluidi (vase conclusi, & ab aliâ Vi liberi,) superficies AB plana Horizontalis, (considerato scilicet Terræ Centro tanquam in infinitâ distantiâ, adeóque rectis perpendicularibus ut invicem parallelis;) seu potiùs Sphærica Telluri concentrica, (quæ hic pro eodem habentur,) quò partes ejus omnes sint æqualiter altæ, seu à Terræ Centro remotæ, (per prop. 3. Cap. 2.) Sitque supernè vel non pressa, vel æqualiter ubique pressa. Cùm itaque partes infernè positæ sursum (propter Gravitatem suam) non nitantur, (per pr. 1. Cap. 2.) quo possit superficiei hujus pars ulla elevari; nec locus infra sit (utpote qui æquè gravibus jam occupatus est) quò possit descendere; neque sit quod supernè deprimat, si non prematur; vel saltem quod hic magis quàm alibi deprimat

deprimat, si æqualiter prematur; nullúsque ea propter fiat motus, (per prop. 8. Cap. 2.) nihil est quod superficiem illam deturbet, quin retineatur.

Et quidem, si extra hunc situm, externâ Vi, deturbetur; ut sit pars alia, puta D, cæteris altior: se ipsum, ad situm debitum, gravitate suâ reducet Fluidum. Quippe pars illa D, partim deprimet (cum gravis sit) subjectas partes (ut post dicetur,) partim (cum fluida sit) diffluet in partes humiliores (propter Descensum qui sic obtinebitur, nec à partium connexione impeditur, utpote fluidum) per prop. 1. Cap. 2. Atque hoc (ob eandem causam) quamdiu pars ulla manet reliquis altior. Redigetur igitur ad situm Horizontalem, seu (quem diximus) Sphæricum. B.

Sin aliquid hic accidentarium contingat, sive propter Fluidi tenacitatem seu lentorem; sive quod supernè premens non ita commodè se possit omnibus partibus accommodare, (quæ causa esse potest cur Hydrargyrum in vase vitreo protuberet;) sive ejusmodi aliud: id hujus loci non est; sed à præsenti consideratione præcludendum.

Siquâ vero sui parte præ cæteris magis prematur, ut in C; putà propter incumbens D Grave (quod saltem gravius sit quàm tantundem incumbentis Aeris, aliúsve quicquid sit æqualiter prementis,) aut aliam utcunque vim adhibitam: deprimentur fluidi partes in C, surgentibus alibi aliis, quò locus fiat depressis. per prop. 8. Cap. 2. C.

Quódque de superficie A B ostensum est, similiter ostendetur de quavis aliâ intra fluidum eidem parallelâ, ut E F; quæ scilicet sit Sphærica Terræ concentrica, seu (quod nobis hic tantundem significat, ut & in sequentibus,) Planum Horizontale, (considerato scilicet Terræ centro tanquam in infinitâ distantiâ.) Nempe, si æqualiter ubique prematur, (à fluidi parte superiore, & siquod aliud est supernè, vel intra fluidum, vel fluido innatans,) situm retinebit; sicubi vero magis premitur, putà in G, ab incumbente H, (quod gravius sit quam Fluidi tantundem cujus locum occupat,) ibi deprimetur, surgentibus partibus minùs pressis. per prop. 8. Cap. 2. ut prius. D.

Atque hinc, ut totidem Corollaria, inferuntur propositiones sequentes.

PROP. II.

Fig. 311. Si Grave D, summæ fluidi superficiei A B horizontali, in C incumbens, æquè gravitet atque tantundem Aeris circumpositi, (aut quicquid sit quod Aeris instar est, æqualiter prementis ;) retinebit A B situm horizontalem.

(Quod de Aere hic dicitur, & similiter in sequentibus, similiter intelligendum erit de alio quovis quod Aeris instar est ; putà si Aquæ super natet Oleum, vel Spiritus vini, vel horum aliquod Hydrargyro, aut aliquod simile ; nam & hic eadem est ratio.)

SEquitur ex præcedente. Quippe cùm C tantundem præcisè prematur ab incumbente D, acsi hoc sublato tantundem Aeris circumpositi (aut quod Aeris instar est) eundem locum occuparet ; æqualiter ubique premitur.

PROP. III.

Fig. 311. Sin illud D minùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, aut quod Aeris instar sit, (nec avolet tamen, aut ab Aere circumposito sursum pellatur ;). Assurgent subjectæ partes C, (utpote minùs pressæ,) subsidentibus aliis.

Qui quidem Ascensus partium C subjectarum, eousque perseverabit (nec diutiùs) donec fluidi partes sic ascendentes compensant ipsius D levitatem, ut aggregatum ipsius D partiúmque sic ascendentium æquè gravitet atque tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est.

Fig. 312. SEquitur ex primâ hujus. Quippe dum (propter incumbens D levius quàm tantundem Aeris, aut quod Aeris instar est, ut ad prop.

prop. præced. expositum est,) minùs premitur C quàm superficiei AB partes reliquæ; assurgent partes C subjectæ, utpote minùs pressæ: (per prop. 1. hujus;) subsidentibus aliis. Idque eousque donec quod fluidi sic ascendit, ut K, unà cùm D, tantundem simul graviten, quantum circumpositi Aeris (aut quicquid aliud sit ita circumpositum) tantum, quantum utriusque locum impleret. Donec enim id fit, minùs premitur; tum vero, æqualiter cum cæteris ipsius A B partibus premetur.

Dico autem, *Si non avolet D, aut ab Aere circumposito sursum pellatur.* Quoniam si à circumposito aere non aliquo modo defenditur, D levius sursum feretur, (sive à levitate suâ, ut dici solet; sive à circumposito aere sursum pulsa, quod potiùs dicendum est;) deferens eam cui incumbebat superficiem A B; neque propterea sic ascendent fluidi partes subjectæ, Aere ipso (depulso D) æquilibrium restituente. Si verò ita ab aere circumposito defensum intelligatur D ne hoc fiat; demonstratio locum habet.

PROP. IV.

Si illud D plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris (aut quod Aeris instar est,) minùs autem quàm tantundem fluidi subjecti: innatabit D; sed depressis eousque partibus C subjectis, donec eum situm obtinuerit D, ut æquigravitet aggregato Aeris & subjecti Fluidi quorum locum occupat. Fig. 311.

SEquitur item ex prop. 1. hujus. Deprimentur enim partes C subjectæ, quia (propter D gravius quàm tantundem Aeris) magis premuntur, assurgentibus quæ minus premuntur, utpote ab his depulsis: idque eousque donec situm assignatum obtineat; quippe tamdiu minus premuntur subjectæ partes. Ubi verò eousque perventum est ut ipsum D æquè gravitet atque tantundem subjecti Fluidi quantum impleret locum immersæ partis K, atque tantundem circumpositi Aeris quantum impleret locum partis eminentis I: non ultra subsidet, sed innatabit; quippe jam contigua superficies horizontalis E F, tantundem premitur in G, atque si locum I occuparet Aer, & locum K subjectum Fluidum; adeóque superficies E F est æqualiter ubique pressa. Fig. 313.

PROP. V.

Si illud D, vel H, non modò plùs gravitet quàm tantundem circumpositi Aeris, sed & quàm tantundem subjecti Fluidi: Mergetur penitus, ad fundum usque subsidens.

Fig. 311. SEquitur & hoc ex prop. 1. hujus. Sive enim in summo intelligatur, ut D premens partes C; sive intra fluidum ubivis, ut H premens partes G; utcunque deprimet partes subjectas. Nempe partes C, quoniam gravius est quàm tantundem aeris; & partes G (in quacunque fluidi profunditate) quoniam gravius est quàm tantundem istius fluidi; adeóque C vel G magis premitur quàm si abesset D vel H ejúsq; locum suppleret tantundem fluidi; & propterea magis quàm superficiei E F partes aliæ. Atque hoc, donec ad ipsum fundum pervenitur.

SCHOLIUM.

FIeri quidem potest, (si fluidum illud non sit in omnibus sui partibus æquè grave, sed prope fundum gravius quàm prope summum,) ut non ad fundum usque mergatur H; utpote gravius quàm fluidum in summo, sed levius quàm fluidum in imo. Verùm hoc demonstrationem non turbat, quoniam ubi eò pervenitur, non jam plus gravitat H quàm tantundem *subjecti* fluidi. Idémque alibi intellige ubi opus erit; aut quod huic æquipolleat: ne opus sit istiusmodi sæpiùs insinuare.

PROP.

PROP. VI.

Si immersum H, minùs gravitet quàm tantundem fluidi cui immergitur; magis autem quam tantundem aeris (seu quod instar est:) Sursum propelletur; idque eousque donec eum obtinuerit situm, ut æquè gravitet atque tantundem Fluidi & tantundem superpositi Aeris (seu quod hujus instar est,) quorum respectivè locum obtinet simul sumpta. Fig. 311.

Sin præcisè quantum tantundem Aeris (seu quod hujus instar est,) aut eo minùs: assurget ad fluidi summam superficiem, aut etiam altiùs.

Sequitur item ex prop. 1. hujus. Dummodo enim immersum H, minùs Gravitat quàm tantundem circumpositi fluidi; minùs premitur G quam superficiei contiguæ E F partes aliæ; adeóque partes ad G, simul cum H, sursum pellentur à partibus plus pressis. Atque hoc eousque donec ad situm assignatum pervenitur; quoniam tamdiu minùs premitur G. Ubi verò eò perventum est, ut ipsius H seu D, pars extra fluidum ita emineat, ut totum simul tantum præcisè gravitet quantum tantundem Fluidi istius cujus locum occupat pars immersa K, & tantundem Aeris cujus locum occupat pars emersa I, (qui casus est propositionis quartæ;) ibi perstabit: quippe jam, superficiei E F contiguæ, partes omnes æqualiter premuntur. Fig. 313.

Sin æquè gravitet atque tantundem incumbentis aeris, (aut quod aeris instar est:) feretur ad summam fluidi superficiem, ibique consistet; (qui est casus prop. 2.) nam eousque minùs premuntur partes subjectæ.

Sin minus adhuc gravitet: aut avolabit, aut sursum pelletur: per prop. 3. hujus.

SCHOLIUM.

Notandum interim erit; id tantum hic in considerationem venire quod ex Gravitate simpliciter considerata provenit, non vero quod aliunde ex Impulsu seu præconcepto Impetu oritur. Si enim id in considerationem veniat, res omnino secus erit. Quippe Grave, utut

levius quàm est tantundem subjecti fluidi; si Vi dejiciatur aut deprimatur, vel, propter acceleratum gravium descensum, vim cadendo conceperit; non statim in fluidi superficie hærebit, sed altius immergetur, pro impetu quo priùs ferebatur. Et similiter, si submersum Grave, utut levius sit quam tantundem fluidi, & gravius quàm tantundem superpositi aeris; dum tamen vel Vi sursum pellitur, vel, propter inceptum motum, impetum conceperit; etiam extra superficiem fluidi altiùs in aerem prosiliet. Sed eam Impetûs considerationem hic loci præcludimus; ut & in sequentibus. Quanquam enim certum sit rem ita fore; tamen, post vibrationes aliquot hinc inde ab impetu factas, ubi ad quietem redacta res est, eum situm obtinebit quam indicamus; & quem, si impetus ascititius abesset, statim assequeretur.

PROP. VII.

Si immersum H, æquè gravitet atque tantundem Fluidi cui immergitur: situm quem habet retinebit, absque vel ascensu vel descensu.

Fig. 311. SEquitur item ex prop. 1. hujus. Quippe cùm tantundem gravitet acsi, eo absente, locus fluido suppleretur; subjecta superficies neque magis premitur in G, quò hic ab H deprimeretur; neque minùs, quò hic assurgeret ipsúmque H propelleret.

SCHOLIUM.

SEcundum has leges; reddenda erit ratio variorum in Experimento, *Torricelliano* dicto, Phænomenûm. Et quidem, in eam causam, hæc olim scripta erant, & *Societati Regiæ Londini* exhibita, Augusti 13 & 20. 1662. quò plurium Experimentorum, ibidem tum temporis agitatorum, ratio Statica redderetur: Qualia sunt quæ sequuntur.

PROP.

PROP. VIII.

Sit Hydrargyri, subjecto vase contenti, superficies Horizontalis A B externo Aeris pressui exposita, atque Tubus C D, (clausus in D, & apertus in C,) hydrargyro impleatur, & dein invertatur, immerso ejus Orificio C infra superficiem subjecti hydrargyri A B, (obturato aliquandiu orificio C donec sic immergatur, ne Hydrargyrum invertendo effluat, atque tum recluso;) atque in eo situ sustineatur. Quibus positis.

Si Hydrargyrum tubo contentum, quod superficiei A B eminet, plùs gravitet in subjectas partes C, quàm pressus incumbentis aeris in reliquas ejusdem A B partes; fiet descensus in C, depulsis quæ à latere sunt partibus minùs pressis, etiamsi à pressu superincumbentis aeris, clauso in D tubo, defendatur Hydrargyrum tubo contentum.

Qui quidem descensus eousque perseverabit; donec, effluente Hydrargyri parte (relicto intra tubum spatio D I vacuo Hydrargyri,) & surgentibus (propter hunc effluxum) superficiei A B partibus reliquis; quod in Tubo reliquum est I C tantundem premat C quantum Aer partes reliquas ipsius A B: eúmque situm retinebit.

PAtet ex præcedentibus. Quippe dum Hydrargyrum tubo contentum (utut ab Aere supernè defensum) plus premat C quàm ab aere premuntur partes reliquæ, deprimetur C (hydrargyro effluente:) ubi verò eò perventum est ut hydrargyri reliquum C I tantundem premat C, quantum premuntur ab aere partes reliquæ; (propter æqualem ubique pressum,) situm illum retinebit. per prop. 1. hujus. Fig. 311.

SCHO-

SCHOLIUM.

Dico autem, *Spatium* DI *vacuum Hydrargyri*: non enim hîc libet (neque opus est ad præsens negotium) disputare, num sit simpliciter vacuum, necne. Siquis enim vel gratis asserat, vel aliunde probatum eat, materiâ aliquâ repletum esse, quod vel pondus nullum habeat vel nullum quod in sensuum nostrorum observationem incurrat; nobis illud hac in re neque obest neque prodest.

Dico etiam *plus gravitat*, & *tantundem gravitat*, potiùs quàm plus aut æquè Grave est: Quoniam quæ in se æquè gravia sunt, possunt tamen pro vario situ inæqualiter gravitare.

Fig. 315. Atque hîc occurrit primò expedienda difficultas; Cur, si Tubus erectus DC, in situm obliquum reclinetur ut GE, Hydrargyrum nihilominus inibi contentum EF in situ obliquo, in eâdem altitudine perpendiculari consistet atque CI in situ erecto; cùm tamen (propter FE longiorem quam CI) suspensum Hydrargyrum FE plus sit (adeoque gravius) quam CI.

Hæc autem difficultas facilè solveretur si non subesset latentior alia. Quanquam enim verum sit, Cylindrum reclinatum FE majorem esse erecto CI, & plus Hydrargyri continere: tamen non minùs interim verum est, Basin etiam ampliari; nam ejusdem Cylindri sectio Obliqua E (Elliptica) longior est (nec latior tamen) quàm sectio recta (circularis) C; adeoque basin E in eâdem ratione majorem esse base C, quâ recta E (ellipseos Axis major) longior est, quam C recta, Circuli diameter, eademque Ellipseos axis minor.

Sed & (quod mox demonstrabimus) in eâdem ratione prolongatur C in E, quâ prolongatur CI in EF: Ut non sit mirum super majore base (ellipticâ) plus hydrargyri sustineri (& quidem in eâdem ratione plus) quàm super minore (circulari) C; utut C & E sint ejusdem Cylindri sectiones. Si autem intelligatur, super eâdem base E, Cylindrus EK; invenietur ejus portio æquè alta EH, tantundem hydrargyri continere atque EF; propter Cylindros (aut Prismata,) super eâdem base æquè altos, invicem æquales. At verò jam, Cylindrus (seu Prisma) EH (propter majorem basin) major erit quàm CI; atque in eâdem ratione major, quâ basis base major est.

Fig. 316. Quòd autem eandem rationem habeat C ad E, quam CI ad EF, sic ostenditur. Intelligatur Cylindrus CD situ erecto sectionem horizontalem habens LCM Circularem, obliquam verò NCO ellipticam:

m: atque reclinetur Cylindrus hic in ſitum EG, ut ſectio illa SCO jam fiat in ſitu NEO horizontalis, cui inſiſtat Cylindrus F inclinatus erecto EH æqualis (propter eandem utrobique tum ſin tum altitudinem,) ipſique CI æquè altus. Manifeſtum eſt demiſsà, in NEO rectam, perpendiculari FC,) propter æquales ngulos FEC, LNE, adeóque ſimilia triangula rectangula FEC, NL; eandem habere rationem EF ad FC, hoc eſt, ad CI; am habet NE ad EL, ſeu NO ad LM; hoc eſt, quam habet baſis ad baſin C. Quod demonſtrandum ſuſcepimus.

Sed nova hinc ſuboritur difficultas. Quippe cùm ſuper eâdem baſe , Cylindrus EH in ſitu erecto, tantundem contineat Hydrargyri uantum in ſitu obliquo EF; quidni magis in baſin illam gravitet H quàm EF, propter Deſcenſum illic Decliviorem, (gravitant autem æqualia Pondera in ratione Declivitatum, ſeu reciprocâ rectarum què altarum, per prop. 19. Cap. 2.) adeóque, quidni baſis E in obliquo EF plus hydrargyri ſuſtinere valeat (& propterea Cylindrum altiorem) quam in ſitu erecto EH.

Verùm & hìc paria paribus compenſanda ſunt. Quippe, ut Hydrargyrum per deſcenſum obliquum FE minùs deorſum premit quàm r FC vel HE (perpendicularem) premeret; ſic & vis ſurſum in E (quæ Hydrargyrum ſuſtinet) minus premit ſurſum per EF quam r EH premeret; & quidem in eâdem utrobique ratione, propter eandem utrobique obliquitatis angulum EFC ſeu FEH. Adeóque on minùs valet Vis ſurſum in E ſecundum directionem ſuam EH directè ſurſum premens, ſuſtinere pondus Hydrargyri ſecundum directionem ſuam HE deorſum prementis, quàm Vis eadem per EF directioni ſuæ EH obliquam, pondus idem FE directioni ſuæ FC pariter obliquam deprimens ſuſtinere; propter vires utrobique in eâdem ratione diminutas.

Vel ſic idem explices. Quâ ratione impeditur deſcenſus hydrargyri, rectà tendentis deorſum, à latere MO (producto) pondus illud partim ſuſtinente, eâdem ratione impeditur aſcenſus vis recta ſurſum tendentis in E, à latere (producto) NL eundem partim coercente ſupernè; (propter eandem utrobique obliquitatem;) adeóque eadem, quæ prius erat, manebit ratio preſſuum contrariorum.

Supereſt adhuc alia difficultas expedienda, quæ non tam ex Situ, quam ex Figurâ tubi ſeu vaſis ſuperpoſiti oritur. Conſideravimus enim hactenus Tubos ſuperpoſitos tanquam Cylindros ſeu Priſmata, ejuſdem

ejusdem ubique Crassitiei; (quod erat necessarium ubi de mole seu pondere suspensi hydrargyri agebatur:) Potest autem superponi Tubus seu Vas cujuscunque figuræ, quod vel plus vel minus hydrargyri continebit quam Cylindrus seu Prisma super eâdem base æquè altum; altitudo tamen suspensi hydrargyri in omnibus eadem erit.

Fig. 317. Verbi gratia; In tubo Capitato C H, atque in Acuminato C K, eadem erit Hydrargyri C I altitudo, atque in Cylindro illic inscripto hic circumscripto.

Causa est, quòd illud Hydrargyri quod in C H extra Cylindrum est, non tam à C sustinetur quam à tubi partibus seu lateribus sibi subjectis, quippe quibus sic manentibus non poterit illud nisi a latere latum iri quo descendat: Ne autem ad latus ferantur Hydrargyri partes, (sive quæ in Cylindro C H, sive quæ extra illum,) se mutuis occursibus & contrario nisu impediunt, ut nihil à C sustineatur præterquam quod est intra Cylindrum C H. Dummodo enim quod intra Cylindrum est ab æquipollente Vi in C sustineatur ne decidat; & quod extra est, similiter à Tubi lateribus: perinde est acsi solido fundo, sed minimè plano, coercerentur utraque; quo posito, superficiem supernam Horizontalem fore ad prop. 1. hujus ostensum est.

Simili modo; quanquam, in tubo Acuminato C K, minus contineatur Hydrargyri in trunco C I quàm in Cylindro huic circumscripto; attamen non altius ascendet in illo quàm in hoc Hydrargyrum. Quippe, quantum ad eas basis partes ubi libero ascensui locus patet, ad justam altitudinem ascendet C I; non ultra tamen, ne quæ subjectæ sint superficiei A B partes plus cæteris premerentur, & pressæ descenderent donec ad justam altitudinem perveniretur: quantum verò ad eas ipsius C partes quibus convergentia tubi latera liberum ascensum non permittunt, quod deest in pondere hydrargyri supereminentis, suppletur à coercentibus tubi lateribus; quippe quæ, utut non deprimant ut vis contraria, coercent tamen ut impedimentum, ne altiùs possit a vi infernè sursum premente Hydrargyrum protrudi.

Atque simile in aliis casibus fiet judicium.

Si verò vasa superposita, non tantum figurâ sint diversâ à Cylindricâ seu Prismaticâ, quod hic supponitur; sed etiam obliquo situ ponantur, quod supponebatur in difficultate priori: quæ utrobique reposita sunt; hic, conjuncta, locum obtinebunt: adeóque quæcunque sit vasis forma, & quocunque situ ponatur, ad eandem semper altitudinem (quatenus coercentia vasis latera non impediunt) hydrargyrum ascendet.

Nos autem tum hic tum in sequentibus (præsertim ubi moles suspensi hydrargyri

IV.

e seu
rponi
drar-
æquè
.
C K,
ripto

drum
is sibi
latere
i par-
nutuis
r præ-
od in-
t ; &
solido
uperfi-
t.
ntinea-
ripto ;
Quip-
tet, ad
bjectæ
descen-
vero ad
scensum
inentis,
on de-
, ne al-
i.

lindricà
onantur,
reposita
sit vasis
itudinem
yrum a-

suspensi
drargyri

PRO

hydr
mam
Scho
quo a
cunq

Posit
fin
fu
in
in
H
Sed à
int
pe
qu
Si ve
pr
inf
ũn

SI e
qu
gyrum
partes
censeat
partes
mus er
cumbe

Qui
jam fa
quàm
CI pe
reliquis
gyrum

hydrargyri consideratur aut calculo subjicitur) Cylindricam tubi formam potissimum spectamus: Inde autem, vi illorum quæ in hoc Scholio tradidimus, utut non quo ad eandem molem seu pondus, quo ad eandem tamen altitudinem suspensi hydrargyri, ad vasa cujuscunque formæ, utcunque inclinata eadem transferentur.

PROP. IX.

Positis ut priùs; Si Tubus sic inversus vel ex se tam brevis sit, vel Orificium infra superficiem A B tam altè immersum habeat, vel denique ita inclinetur tubus, ut quod inibi (supra A B) continetur Hydrargyri minùs gravitet in partes subjectas, quàm aer in reliquas: Non effluet Hydrargyrum. Fig. 318.

Sed &, si (manu vel aliàs) Tubus elevetur, ascendet etiam intùs Hydrargyrum; idque donec ad eam stationem perveniat, ut tantundem in partes sibi subjectas gravitet quantum in reliquas Aer.

Si verò non aliunde elevetur Tubus; non ab Hydrargyro propelletur sursum: sed deprimetur potiùs (si locus infra sit quo recipiatur) ab incumbente aere; nisi aliunde ab aeris vi defendatur.

SI enim tubus E brevior sit, vel ita immergatur orificium ejus ut quod superest C E brevius sit, quàm ut inibi Contentum Hydrargyrum tantundem premat subjectum C quantum ab aere premuntur partes reliquæ; vel etiam, si tubus F, utut satis Hydrargyri continere censeatur, ita tamen inclinetur ut non satis gravitet: Non deprimentur partes subjectæ, utpote non magis pressæ quàm reliquæ; (supponimus enim Tubos manu vel aliàs ita sustentos ut ab Aere Tubis incumbente nulla vis hydrargyro inferatur.)

Quinimo si elevetur tubus; assurget inibi Hydrargyrum, (loco jam facto quo recipiatur,) propter partes subjectas minùs pressas quàm quæ aeri exponuntur. Idque eousque donec ad altitudinem CI pervenitur, (quâ statione supponimus partes subjectas æquè cum reliquis pressas;) quippe tamdiu minùs premuntur, adeóque Hydrargyrum à partibus plùs pressis intro pellitur.

Si verò altiùs elevetur tubus, ut ad D; illud tubi quod est supra I manebit hydrargyro vacuum; quippe, cum partes subjectæ jam æquè cum reliquis premantur, cessabit illa sursum protrusio; (nec ob decantatam olim Fugam Vacui sursum altiùs trahi, experimentis nunc dierum ubique gentium notis abundè comprobatum est.)

Similiter si tubus F inclinatus, erigatur; ascendet simul Hydrargyrum, tubum replens: ita tamen ut si altiùs erigatur quàm est C I; quod superest, ut I G, manebit hydrargyro vacuum; ob causas modò dictas.

At verò si tubus ille brevior, ut E, sibi permittatur; non tamen ab Hydrargyro ascensum moliente sursum propelletur; sed, contrà, detrudetur ad fundum usque; (nisi quatenus ob Tubum minùs gravem quàm tantundem Hydrargyri impeditur.) Non quod Hydrargyrum alibi ab aere pressum non valeat illud in tubo & sustinere & sursum pellere; sed quoniam (nisi tubus aliàs sustineatur aut ab externo aere defendatur,) non tantùm ab eminente hydrargyro, sed & à supereminente aere tubum cum hydrargyro deprimente, premuntur partes subjectæ; adeóque fortiùs quàm reliquæ, propter hydrargyrum in tubo plùs gravitans quàm tantundem aeris: Quamdiu autem manu vel aliàs sustinetur tubus; eo impeditur aer ille (ob tubum in summo clausum) ne gravitet in partes tubo inclusas aut illi subjectas.

Sin aliàs, quocunque modo, defendatur tubus ille brevior à superno aere; non modò sustinebitur, sed & sursum propelletur (donec ad Altitudinem I perveniat) ab hydrargyri partibus reliquis plùs pressis quàm quæ Tubo subjiciuntur; propter superficiem A B eò loci minùs pressam.

Tota demonstratio dependet ex prop. 1. hujus, variè pro variis casibus applicatâ.

PROP.

PROP. X.

Positis ut priùs; Si tubi sic inversi altitudo (supra AB planum) CD, tanta sit quanta est CI, aut eâ major; quò Hydrargyrum inibi contentum tantundem gravitet in partes subjectas quantum aer in reliquas: non minori Vi sustinebitur tubus, nedum elevabitur, (sive id manu fiat; sive librâ, positis ponderibus in adversâ lance; sive utcunque aliàs;) quàm quæ potis sit sustinere seu elevare (præter ipsum tubi pondus) totum superincumbentem aerem, seu (quod eodem recidit) tantundem hydrargyri quantum æquet Cylindrum CI.

Dummodo enim tanta sit tubi intùs altitudo ut retinere possit tantum hydrargyri quantum valeat ita premere subjectas partes quantum reliquæ ab aere premuntur; (vel etiam major; quod tamen casum non mutabit, quippe plus inibi non retinebitur, quæcunque fuerit altitudo tubi, sed quo superest spatii ID relinquetur hydrargyro vacuum; ut supra ostensum est;) adeóque non adjuvetur vis elevans à vi partium hydrargyri extra tubum tanquam plùs pressarum sursum pellente quod partibus C supereminet, tanquam minùs pressis: Sustinendum jam erit vel elevandum, non modò tubus ipse cujuscunque fuerit ponderis, sed & totum illud aeris quod tubi cavo superincumbit; (*Tubi*, inquam, *Cavo*; nam quod Tubi lateribus utcunque crassis supereminet, ab Hydrargyro Tubi labiis subjecto sustinebitur.) Nam nisi hoc fiat, tubus (qui hydrargyrum jam deserturus est, ut quod altiùs non propelletur,) non sustinebitur vel elevabitur. Cui quidem, cùm Hydrargyrum, ex pulsu sursum, jam nihil ferat auxilii; (ut priùs tulerat, cùm ad justam altitudinem nondum pervenerat;) nec possit aer (propter tubi orificium, quod supponimus, in hydrargyro infra AB submersum,) ut alibi fieri solet, circuitu facto, à tergo in locum derelictum succedere, (adeóque, quod ex prop. 1. hujus facile demonstrabitur, tantundem quasi sursum propellere, quantum supernè deprimit; dempto saltem pondere quo res elevanda superat tantidem aeris pondus:) tantundem virium in sustinente vel elevante requiretur, quantum (præter ipsum tubi pondus) totum illud aeris quo cavum Fig. 314.

premitur sustinere aut elevare poterit; (dummodo enim Vis sustinens aut elevans vi deprimente minor est, non sustinebit aut elevabit, per prop. 12. Cap. 1.) Id autem aeris quod sustinendum aut submovendum est, æquipollet hydrargyri Cylindro C I, (saltem dempto tantidem aeris pondere cujus locum occupat C D, propter Atmosphæræ minorem altitudinem supra D quàm supra C; quod meritò tamen negligi possit: ut & submersa tubi labia minùs gravia quam tantundem hydrargyri; cujus differentia auferenda erit, si strictè agas, à pondere elevando. Sed hæc negligimus.) Cùm enim, Vis aeris extra Cylindrum hydrargyrum deprimens, tantum premat partes sibi subjectas quantum hydrargyrum in tubo premit subjectas sibi (quò superficiei partes omnes æqualiter premantur,) tantundem valet pondus aeris incumbentis quantum Cylindrus hydrargyri altitudinis C I: ut igitur tubus elevetur, adeóque submoveatur Vis aeris deprimens, vis ea requiritur quæ potis sit (præter excessum ponderis tubi supra pondus tantidem aeris cujus locum occupat, quod est ipsum tubi pondus in aere,) etiam tantundem hydrargyri elevare quantum est Cylindrus C I: &, quò sustineatur, quæ hydrargyri tantundem potis est sustinere. Quod demonstrandum erat.

Fig. 319. Adeóque si intelligatur tubi fundus D (fili ope) de librâ pendere, atque ex adverso pondus P: quò hoc tubo Gravato æquiponderet, requiritur ut æquet pondere tum tubi pondus (demptis saltem, quas diximus, minutiis,) tum tantum hydrargyri quantum æquet Cylindrum C I.

PROP.

PROP. XI.

Poſitis ut priùs; Si tubi ſic inverſi, altitudo (ſupra AB planum) CD, minor ſit quàm CI, (quò, ſi locus eſſet, pertingeret hydrargyrum;) adeóque, qui partibus reliquis eminet, aer præponderet: Quantum valet hæc præponderantia, tantundem preſſui in C ſurſum concedendum eſt; quod æquipollet ſublationi tantidem ponderis incumbentis, aut ponderi æquali in adversâ lance poſito: Adeóque tantò minor Vis (ſive in tenentis manu, ſive ponderis in adversâ lance poſiti, ſive aliàs ſimiliter applicata,) requiretur ad tubum ſuſtinendum in hoc caſu, quàm in caſu propoſitionis præcedentis. Fig. 319.

Quæ verò in eâ altitudine ſuſtinere potis eſt Vis, non tamen altiùs elevabit; propter pondus elevando auctum, ſeu minutum ſubſidium Vis ſurſum prementis: ſed neque in majore altitudine ſuſtinebit.

Cum enim Vis ſurſum in C, potis ſit ſuſtinere tantundem ponderis quantum eſt Cylindrus Hydrargyri, ſuper eâ baſe, altitu-[dinem] habens CI; ſitque CD eo pondere minus: Suſtinere valebit [...]&, niſi aliunde impediatur, elevare) præter illud hydrargyri quod [incu]mbit, tantundem ultrà ponderis, quantum illic à juſto pondere [dee]ſt; Adeóque tanto onere ſublevare ſuſtinentis manum (ſeu quod [e]jus inſtar eſt;) & propterea tantò minus virium requiretur, quàm [qu]i caſus eſt propoſitionis præced.) ſi Hydrargyri Cylindrus juſtam [alt]itudinem CI obtineret.

Et quidem ſubſidium illud à vi ſurſum premente propter Hydrargyri [alt]itudinem juſtâ minorem, tantundem eſt atque additamentum illi [æq]uipollens ſuſtinentis viribus additum, ſeu pondus æquipollens in [ad]versâ lance poſitum. Et, ſi, quod porro deeſt ad pondus prop. præ[ce]d. requiſitum, in lancem illam immittatur; ſuſtinebitur tubus (cum [incu]mbente aere) pariter atque ſi, in caſu prop. præced. totum illud [pon]dus immitteretur.

At vero, utut tubum ſic ſuſtinere poſſit, non tamen elevare poterit,

quoniam

quoniam prout elevatur tubus (donec ad justam altitudinem C I pervenit) assurget intùs Hydrargyrum (propter locum jam factum quo recipiatur) adeóque minuitur quod priùs erat subsidium, adeóque vis (debilior facta) tubum sustinere in eâ altitudine non potis erit.

Et quidem, si aliâ vi aliàs elevetur, sibi tamen permissa; ad eam altitudinem deprimetur: Sin infra detrudatur; eò assurget: ut nempe, præter illud oneris quod ponderi P æquipollet, reliquum quicquid sit æquipolleat Hydrargyri Cylindro C I. Quæ omnia, per priùs demonstrata constant.

SCHOLIUM.

SUmma rei huc redit. Æquabilis aeris alibi incumbentis pressura, potest (per æquiponderantiam suam) sustinere in C; Vel Columnam Aeris æquialtam; Vel Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; Vel partem hujus partem illius (quæ simul earum alteri æquipolleant:) Non autem utramque totam, aut plus quam quod earum alteri æquipolleat.

Adeóque, Si pars C, externo Aeri exponatur: sustinebitur hic, ut in partibus reliquis, Columna incumbentis Aeris. Sed tunc nihil ultra Hydrargyri sustinebit vis ea, nedum elevabit.

Si ab incumbentis Aeris pressu (inversi tubi fundo, vel aliàs,) defendatur: sustinebit, istius vice, Columnam Hydrargyri eidem æquipollentem; aut etiam (si locus sit quo recipiatur) tantundem elevabit. At verò jam nihil Aeris sustinet; quippe à quo defenditur ab inverso tubo, qui aliunde sustineri intelligitur; putà à tenentis manu, vel pondere in adversâ lance.

Si verò ab incumbentis aeris pressu defendatur quoad partem, sed non quoad totum; putà à pondere P in adversâ lance quod minus sit quàm ut totius aeris pressui æquipolleat: potis erit, propter hoc subsidium; sustinere, non tantum totum aerem incumbentem, (quem quidem sine auxilio sustineret,) sed & tantundem Hydrargyri quod isti auxilio æquipolleat; neque sustinere tantùm, sed & (si opus sit) eousque tubum impellere donec tantundem recipere possit.

Sin denique pondus P in adversâ lance majus sit quàm ut aeris pressui æquipolleat: proripiet tubum (nisi aliunde impediatur) in altum, etiam extra subjectum Hydrargyrum.

Exempli gratiâ. Intelligatur superficiei A B, pars C (inverso tubo inclusa,) tantæ amplitudinis esse, ut quæ, aperto aeri exposita, columnam aeris sustineret Ponderis unciarum 12 unius Libræ; (adeóque par-

us alia quælibet huic æqualis, propter æqualem aeris pressum, tantundem sustinere intelligenda est:) & propterea, si ab hoc aeris pressu penitus defendatur, tantundem Hydrargyri, istius vice, sustinere poterit; hoc est, columnam hydrargyri Unciarum 12 unius libræ.

Cúmque Tubus, quo sic ab aere defenditur C, suum pondus habeat; Ponatur hoc, Unciarum 2. (Pondus aeris, qui tubi lateribus supereminet non computamus; quoniam id ab Hydrargyro tubi labiis subjecto sustinetur.)

Totum igitur Onus (tubi cum superincumbente aere) erit Unciarum 14; quod aliunde sustinendum erit, quò pars C toto pressu aeris ubique liberetur. Quod factum intelligatur, posito, in adversâ lance, pondere P, unciarum 14.

Sustinebit igitur C (ab omni alio pondere sic liberata) columnam Hydrargyri Unciarum 12, (utpote vi sursum in C prementi æquipollentem;) atque ad illam altitudinem (si opus sit) tubum sic libratum impellet. Donec enim hoc fiat, minùs premetur C quàm partes reliquæ; nec huic ascensui quicquam officit Tubus cum incumbente aere, utpote qui sunt cum P pondere in æquilibrio positi. Verùm tum, Contraponderans P, gravius esse debet (putà unciis 2, propter pondus tubi,) quàm est suspensa Hydrargyri columna; utut Hydrargyrum illud non à P pondere, sed à vi sursum in C, sustineatur.

Si verò à Pondere P auferantur, verbi gratiâ, unciæ 4, ut nonnisi 10 supersint, non poterit hoc pondus, Tubi aerísque incumbentis pressum sustinere (utpote unciarum 14,) sed istius tantum 10 uncias; adeóque reliquis unciis 4 adhuc urgetur pars C; quæ itaque (cum non possit plusquam 12 uncias omnino sustinere) non ultra 8 uncias hydrargyri (quæ cum illis 4 conficiunt 12) sustinere poterit. Sed & ad hoc requiritur contraponderans P, unciarum 10, quod gravius sit (putà 2 unciis) quàm suspensum Hydrargyrum, unciarum 8; utut hoc, non à P, sed à Vi in C sustineatur.

Sin, pro demptis unciis 4, tolleretur totum Pondus P unciarum 14, vel saltem inde demerentur unciæ 12: Subsideret Hydrargyrum omne cum ipso Tubo; vel demptis 2 unciis, quippe jam pars C onere saltem unciarum 12 (quo majus ferre non potest) Oneratur. (Saltem si tubi partem subsidendo demersam ponderi eximamus; atque etiam, si omnes minutias sectare velimus, excessum ponderis Hydrargyri supra pondus demersæ partis tubi: Quæ tanta non sunt quin hic meritò possint negligi.)

Si jam ex demptis illis Unciis 4, restituantur unciæ 2, (quo Pondus P fiat unciarum 12; adeóque ex omnibus 14, nonnisi unciis 2 prematur

matur C;) Assurget Tubus donec supra A B emergant Hydrargyri unciæ aliæ duæ: Adeóque sustineat C, à pressu aeris ubique Uncias 2, atque Hydrargyri uncias 10; quæ simul faciant ipsius justum onus unciarum 12. Sed & adhuc pondus P unciarum 12, majus est (puta unciis 2) quàm suspensi Hydrargyri unciarum 10; utut hoc, non à P sed à Vi in C sustineatur.

Atque si adhuc restituantur aliæ 2 Unciæ, quò fiat Pondus P (ut prius) unciarum 14: Ascendet Hydrargyrum ad justam altitudinem C I, (tubúmque, si opus sit, eò propellet,) quò pars C (ab alio onere penitus libera) sustineat Hydrargyri Uncias 12, quæ pressui aeris in reliquis partibus æquipolleat.

At verò si porro augeatur pondus P, ut fiat, verbi gratia, Unciarum 16: Sursum adhuc in altum proripietur tubus (propter ponderis præpollentiam;) sed non simul Hydrargyrum, (utpote quod jam ad summam altitudinem ascenderit quam ferre potest C;) sed relinquetur superna tubi pars hydrargyro vacua. Idque eousque, donec vel obice impediatur descensus ponderis aut ascensus tubi; vel saltem donec, emersis extra subjectum hydrargyrum tubi labiis, Hydrargyrum inibi contentum (viâ jam patente) totum decidat, eíque protinus succedat Aer irruens, tantundem quasi subtus propellens sursum, quantum supernè deprimit tubum; ut jam nihil aliud sustinendum restet quam ipsum tubi pondus.

Quod autem Experimenta his Demonstratis respondebunt; tantùm abest ut metuam, ut ea jam ante in *Societate Regiâ* administrata fuerint (& quidem cum hoc eventu) quàm hæc primò scriberentur (Anno scil. 1662, ut supra insinuatum est.) Nempe, præter notiora Experimenti Torricelliani phænomena; (quæ recensere non erit opus,) observatum erat, 1. Si tubus ad justam altitudinem C I extenderetur; opus erat in adversâ lance quò sustineretur tubus, pondere aliquantò majore quam erat Hydrargyri suspensi pondus; (& quidem tantò majore quantum conjectando æstimabant ipsius tubi pondus.) Idemque accideret, si altiùs adhuc elevaretur D; relicto ID hydrargyri vacuo. 2. Si infra justam altitudinem C I, subsideret C D; minori opus esset pondere in adversâ lance, quò (propter æquilibrium) sustineretur tubus; & quidem tantò minori quantò minus erat pondus hydrargyri suspensi. 3. Si tamen superfluum illud pondus aut ejus pars aliqua (ultra quam quod necessarium erat) in lance relinqueretur; ascenderet Tubus, unà cum hydrargyro, donec fieret æquilibrium. 4. Denique, si plusquam illud superfluum pond... lanc...

nci eximeretur; ſubſideret tubus, unà cum hydrargyro, ad æquilibrium. Et quidem, univerſim, (prout in Regiæ Societatis Commentariis res ſummatim colligitur) *Pondus in adversâ lance contraponderans, æquipollebat ſuſpenſi Hydrargyri, cujuſcunque altitudinis, atque ſimul (quantum conjectando æſtimabant) ſuſpenſi Tubi ei parti, quæ ſtagnantis in ſubjecto vaſe hydrargyri ſuperficiei ſupereminebat.*

Quæ quidem res, cum primo aſpectu incautis nonnullis, atque ad rem ſtaticam minùs attentis, facilè imponeret; quaſi ab adverſo pondere P ſuſtineretur, non tantùm Tubus ipſe, ſed (propter neſcio quam cum tubo connexionem, ſeu Vacui fugam) contentum inibi Hydrargyrum: Quò ſcrupulus ille faciliùs tolleretur; ea ſtatim ſcripſi quæ in hoc Capite hactenus habentur, (eiſdem ferè verbis, niſi quod jam in Propoſitionum & Demonſtrationum formam redacta ſint;) eadémque *Regiæ Societati* exhibui, verbo quidem Auguſti 13. 1662. quo Obſervata illa libero ſermone exponebantur; atque deinde (id rogatus) ſcripto etiam Aug. 20. quo die etiam Obſervatorum illorum ſumma ab ipſis Obſervatoribus ſcripto exhibebatur. Quibus oſtenderem, ex Principiis Hydroſtaticis, rem ita omnino accidere debere, ſi ſuſpenſus Hydrargyri Cylindrus poneretur à Vi in C ſurſum premente ſuſtineri, dummodo inverſo Tubo ab incumbente Aere defenderetur, Tubúſque ille ſuſtineretur aliunde.

Si verò jam quæratur, Quanta ſit illa altitudo C I; ubi, propter preſſum aeris in partes reliquas, conſiſtet ſuſpenſum Hydrargyrum ſupra ſubjecti ſuperficiem A B:

Dicendum eſt, Altitudinem illam neque omnibus Locis, neque omnibus Temporibus, eandem eſſe; ſed, pro variâ Aeris Gravitate, ſubinde mutari.

Hìc autem *Oxonii*, quomodo ſe res habet, quantum ex propriis Obſervatis colligere licuit, ſic habeto. Jam ante Sex Annos, Tubum (Quatuor pedes longum cum ſemiſſe) implendum curavi Hydrargyro, ab intermiſto Aere diligenter purgato, (non ſummâ tamen diligentiâ;) eúmque ſic impletum inverti, obturato primum diligenter orificio, nec priùs recluſo quàm infra ſuperficiem Hydrargyri in ſubjecto vaſe contenti demergeretur; dein, factâ ſubtus exeundi poteſtate, effluxit Hydrargyri tubo contenti pars magna, cum impetu notabili; factíſque propter impetum illum vibrationibus aliquot, ſubſiſtebat tandem ad altitudinem Unciarum pedis Anglicani (plus minus) 29. Tubúmque cum ſubjecto vaſe (cujus fundo nitebatur

apertum tubi orificium, sed ita ut intrandi & exeundi à Vase in Tubum Hydrargyro via non intercluderetur) in pegma quoddam priùs ad id paratum intuli, atque in hunc diem in eo statu conservo.

Nec ita multò post; scilicet à Calendis Januariis Anni (exeuntis 1664, sed) ineuntis 1665, Ephemeridem continuam Altitudinis Hydrargyri in Tubo contenti, supra stagnantis in subjecto vase superficiem, institui, (nisi cum fortè me domo abesse contigerit,) atque etiamnum instituo.

Observavi autem, ut plurimum, infra triginta Uncias pedis Anglicani subsidere, sed supra Uncias Viginti octo; intra hos limites subinde nunc ascendendo, nunc descendendo. Semel autem iterúmque tantillo supra 30 ascenderat, semélque subsiderat infra 28, (sed vix aut ne vix decimâ unius Unciæ parte, utrovis casu,) ut altitudo mediâ sit Unciarum 29.

Verum quidem est, me aliquoties comparasse altitudinem in Tubo meo, cum altitudine in Tubo similiter inverso Honoratissimi D. *Boylii*, dum hic Oxonii ageret; atque altitudinem illius, altitudine meâ, aliquanto majorem deprehendisse, (quasi octavâ parte unius unciæ, si ritè memini,) sive quod in variis ejusdem urbis locis positi fuerint Tubi, sive quòd Hydrargyrum ejus meo fuerit aliquanto levius, sive quod alterum altero fuerit ab intermisto aere aliquantò depuratius, non dixerim: sed exiguum quicquid est discriminis innuere visum est; quò perspiciatur tantillum discriminis ex minutis & non observatis circumstantiis oriri posse.

Observo etiam, à Scriptoribus Gallis, altitudinem assignari solere Unciarum 27 pedis Parisini. Quod non tam altitudinum hic atque illic differentiæ dandum est; quàm differentiæ pedis Parisini, atque Londinensis seu Anglicani. Quippe Pes Parisinus superat Pedem nostrum Anglicanum, quasi quatuor quintis unciæ nostræ, (quod ego, collato semipede nostro, cum semipede Parisino ut dicebatur accuratissimo, memini me satis accuratè observasse;) Adeóque Unciæ Parisinæ 27, respondent nostris 29 quàm proximè. (Nam $12 . 12\frac{4}{5} :: 60 . 64 :: 27 . 28\frac{4}{5}$.) Ut vix ulla inde inferri possit differentia altitudinis istius apud illos observatæ ab altitudine mediâ Oxonii observatâ; quin eadem hic & illic (præter propter) altitudo censenda sit.

At interim, eâdem manente Aeris (quoad gravitatem) constitutione, aliam atque aliam deprehensam fuisse, eodem tubo æstimandam, altitudinem Hydrargyri, non tantum in ejusdem Montis, sed & ejusdem Turris, summo & imo, observatum fuit: minorem utique esse in summo quàm in imo altitudinem Hydrargyri, propter breviorem

illic

illic quàm hic incumbentis aeris Cylindrum, & leviorem pressum: quod, unà cum Honoratissimo *Boylio*, ego aliique experimentis aliquoties factis deprehendimus. Sed quâ proportione decrescat, altior est inquisitio quàm ut eam hic expedire locus sit.

Atque hactenus consideravimus pressum incumbentis Aeris, nullo facto discrimine, sive ab Aeris Gravitate, sive ab ejusdem Elatere procedat: Et quidem perinde est ad rem hactenus traditam utrovis modo fiat, modò pressus fiat.

Verùm aliunde certum est, ab innumeris Experimentis hoc seculo institutis, tum in *Organo Pneumatico Boyliano*, tum aliàs: Et Aeri inesse *Gravitatem*, quâ deorsum premit; & Vim *Elasticam*, quâ se vel à Gravitate suâ vel aliunde compressum restituere conatur.

Quibus positis; necesse erit, propter Aeris Gravitatem, ut superiores ejusdem partes proximè subjectas deprimant, & deprimendo comprimant, adeóque Elateri vim undiquaque restitutivam imprimant gravitati partium incumbentium æquipollentem (donec enim æquipollet renitentia, porro flectetur;) & quidem eâdem vi undiquaque se expedire satagentem; (Quod enim ad prop. 1. Cap. præced. ostensum, de Elatere, putà recto, se prorsum atque retrorsum æqualiter porrigente: pariter valet de Corpore Elastico se in Orbem explicante; Nempe, siquâ parte minus vel prematur vel coerceatur, eâ se expediet, pressum alibi declinans; ídque eousque donec undiquaque comprimatur æqualiter.) Eadémque vis, unà cum harum pondere; in partes adhuc subjectas propagatur: Atque sic porro, ad imum usque, aucto continuè pressu ob auctum pondus incumbens. Unde fit ut partes Aeris interiores sint superioribus magis compressæ; adeoque & (propter plus aeris intra easdem dimensiones) graviores superioribus.

Haud secus atque Lanæ Vellera accumulata, quæ sunt & Gravia simul & Elastica. Vellus supremum, gravitate suâ premit secundum; cui ad Vim imprimit restitutivam sursum gravitati comprimenti æquipollentem (secùs enim adhuc ultra comprimeretur;) quæ cum sursum se liberare non possit (propter urgens onus quod compresserat) eâdem vi deorsum nititur; additâ tamen gravitate suâ; quibus cùm premitur tertium, tantundem est atque utriusque gravitate premi: Vel, quod eodem recidit, (quódque omnino dicendum esset si Elateres abessent,) secundum sustinet supremi pondus; & tertium, utriusque; nempe secundi primo gravati. Utut enim secundum à primo quantum quantum comprimatur, id tamen non impedit quin sic compressum adhuc deprimatur, & utriusque onus à tertio sustineatur. Id saltem interest,

terest, quod, propter compressionem secundi, primum tertio propius quidem, sed eodem pondere, incumbat. Atque sic porro, Quartum à trium illorum Gravitate (sive interveniente, sive non interveniente, vi Elasticâ,) premitur; & Quintum ab illorum quatuor; & sic porro ad Sextum, & quæ sequuntur: Ut perinde omnino sit, sive à superiorum omnium Gravitate per se, sive interveniente Vi Elasticâ, comprimi dicamus. Dummodo saltem Vellera perfectè Elastica ponamus, nec simpliciter-Mollium naturam quadantenus participare; quippe, quatenus hoc obtinet, ad Gravitatem simpliciter recurrendum erit.

Sed &, propter Vim Elasticam, sive in Vellere sive in Aere, ad latera etiam undiquaque se expedire satagentem (siquâ parte debilior sit resistentia;) eâdem Vi Elasticâ (quæ incumbenti Gravitati, in quâcunque altitudine, æquipolleat,) ad latus undiquaque premit, quâ deorsum; haud secus atque alia fluida, quæ (propter facilem partium separationem) siquà fortius premantur, eà qua minùs premuntur se expediunt; sive id deorsum sit, sive à latere, sive etiam sursum.

Dato igitur, quòd Aer sit corpus elasticum, (de quo non ambigendum est,) quaqua versum a pressu se liberare satagens, procedimus ad propositionem sequentem.

PROP. XII.

Vis Aeris Elastica Vase inclusi, ejusdem tenoris cum ambiente, tantundem præstat atque onus incumbentis aeris aperti.

Atque hinc ex *Experimentis Boylianis* plurima (nempe quæ ex Aeris Elatere dependent) explicationem facilem sortientur, & Phænomenûm causa reddetur. Quod de aliorum item Experimentis Hydraulicis, aliisque innumeris, pariter intelligendum est.

Fig. 320. INtelligatur Tubus D, seu Vas quodpiam H (cujuscunque formæ & quocunque situ,) orificium habens E apertum, quo cum aere externo communicet internus. Si adjacentes aeris externi partes minùs premantur quàm quæ sunt intra vas, hæ dilatabunt sese donec ad æquipollentiam res redigatur, (per prop. 1. hujus.) Si verò partes externæ adjacentes (ob pressum aeris incumbentis) magis premantur quàm quæ

intu

ntùs sunt, seu quàm harum vis elastica potis sit sustinere, comprimentur adhuc quæ intùs sunt (per eandem prop. 1. hujus,) eousque donec æquipolleat earum Vis Elastica Vi extra comprimenti, hoc est oneri incumbentis aeris. Re itaque sic ad Æquipollentiam redactâ (ut ejusdem tenoris intensionis sit aer internus cum externo, adeóque Elateris vis eadem utrobique, ea scilicet quæ Oneri incumbentis aeris sustinendo par sit,) si firmetur orificium E, Vis Elastica (propter eandem quæ priùs tensionem) etiamnum æquipollebit oneri incumbentis aeris externi.

Atque hinc, ex D *Boylii* aliorúmque Experimentis Pneumaticis, Hydraulicis, aliisque, plurimorum ratio facilè assignabitur. Quippe si, ad ea quæ alias pressu vel trusione fieri possent, istius vice adhibeatur vis Aeris Elastica æquipollens, idem effectus consequetur. Quod in singulis prosequi supervacaneum esset, cum Theorematis generalis ad particulares casus applicatio facilis sit: sintque ea fere omnia vel hinc orta quòd Aeris inclusi compressio (adeóque Vis Elastica) major fiat quam est exterioris aeris, (unde plurima in Hydraulicis Phænomena derivantur à compresso aere orta;) vel, quod aeris exterioris compressio & vis elastica debilitetur minórque fiat quàm est aeris conclusi; (quod in *Antliâ Boylianâ* sæpe fit; putâ si Antliæ *Recipienti* immittatur Vesica seu Phiala vitrea Aerem ordinariæ tensionis continens, atque Recipientis Aer quadantenus saltem exhauriatur; qui, utut respectu aeris liberi Internus sit, respectu tamen aeris in Vesicâ illâ seu Phialâ contenti est Externus; cujus itaque exhaustione partis debilitetur Vis: idem fit acsi, hoc in statu suo permanente, fortiùs comprimeretur ille:) Utroque enim casu aer qui reliquo magis compressus est vim suam Elasticam in eum qui minùs est compressus exercebit.

SCHOLIUM.

Dici quidem potest, aliam esse Externi aeris pondus ad E, quàm ad H vel D, quoniam E premitur, non tantùm ab aeris partibus quæ ipsis H vel D supereminent, sed & ab interjectis. Quod quidem verum est, utut in exiguâ altitudine tantillum id sit ut meritò negligatur. Sed hoc, quicquid sit, præsentem speculationem non turbat; quippe idem intra vas evenit. Nam & hic partes E (infimæ) plus premuntur, quàm (supremæ) H vel D, quoniam illæ partium interjectarum pondus sustinent. Adeóque Vis Elastica interni aeris in E, æquipollet pressui externi in E; atque interni in H, externi itidem in H. Quod utut in vastis altitudinibus fieri possit alicujus momenti, in minutis tamen meritò negligendum est.

PROP.

PROP. XIII.

Si inversi Tubi, aliúsve Vasis, D vel H, aere pleni (ejusdem tenoris cum ambiente) Orificium apertum, Hydrargyri plano A B applicetur: Hydrargyri nihil inibi vel assurget, vel deprimetur.

Fig. 320. INtelligatur enim Tubi seu Vasis D vel H (aere pleni) orificium E, superficiei Hydrargyri A B admoveri in C. Cùm Vis Elastica aeris inclusi, æquipolleat oneri incumbentis externi, (per prop. præced.) æquè premitur A B in C atque in reliquis ejusdem partibus; (vas ipsum enim aliunde sustineri supponimus:) Adeóque nulla propterea Hydrargyri inibi vel ascensio vel depressio: per prop. 1. hujus.

SCHOLIUM.

PRopositiones has duas de aeris Vi Elasticâ, ejúsque effectu, apponendas censui, ut obviam eatur scrupulis quorundam inde ortis quòd huic non attenderint.

Putà, Si inversus Tubus D C, aere plenus ejusdem tenoris cum ambiente, Hydrargyro in C superponatur; Tubóque (aliunde sustento) impediatur pressus superincumbentis aeris; adeóque pars C aere tantùm qui tubo includitur (modicæ altitudinis) prematur, reliquæ autem toto onere aeris incumbentis (altitudinis immensæ:) Certum est, pondus aeris prementis C, longè minus esse quàm alibi prementis partem huic æqualem; adeóque, si pondus tantùm spectetur, assurgere deberet Hydrargyrum in C; (neque huic obstaret aer tubum occupans, ut qui compressionis capax est, & reapse comprimeretur si elater debilior esset quàm vis in C sursum prementis:) Sed, propter Elateris vim æquipollentem ponderi externi aeris, non minùs ab aere qui includitur tubo premitur C, quàm ab aperto aere partes reliquæ.

Similiter in *Antliâ Pneumatica*, seu *Organo Pneumatico Boyliano*, si pondere tantùm, non elatere, ageret inclusus aer; immissa animalia, etiam àbsque aeris exsuctu, paria fere paterentur (utpote minùs pressa quàm in aperto aere) atque jam post exsuctum aerem.

Item, in eâdem Antliâ, si intromittatur Vas hydrargyrum continens, cui ita ut suprà dictum est immergantur inversi Tubi (hydrargyro

prius

rius repleti) labia: Poſtquam undique occluditur Antlia ne ulla fiat mmunicatio cum externo aere, manet adhuc hydrargyrum in tubo dem quâ prius altitudine ſuſpenſum, putà ad uncias pedis Anglicani s minus 29; non quòd eodem quo prius pondere prematur ſubjecti ſis hydrargyrum, ſed quòd incluſi aeris vi elaſticâ externi aeris pon- ri æquipollente prematur; nec prius ſubſidit, quàm vis illa debili- tur. Ubi verò, propter exſuctam aeris partem, reliqui (utpote minùs compreſſi) Elater debilitatur, ſubſidit Hydrargyrum ad norem minorémque continuè altitudinem prout plus plúſque Aeris gitur: Idque eouſque, me ſpectante, aliquando factum fuit, ut ultra pedis Unciam unam altitudinis ſuſpenſum manſerit: (Sed &, truſo aere fortior redderetur elateris vis, adhuc altiùs aſcenderet drargyrum quàm extra Antliam.) Quod & inter Experimenta liana, *Phyſico-Mechanica* occurrit; *Experimento,* 17. Sed &, o tempore, vaſe jam commodius præparato, obſervavit idem Ho- raiſſimus *Boylius* aliquoties (quod ab eo ipſo accepi;) Hydrargy- in Tubo contentum, eâdem operatione præſtitâ, ad ipſam uſque nantis infrà Hydrargyri ſuperficiem ſubſidiſſe, neque ſupra illam nino eminuiſſe.

tque ſimilis ratio aſſignanda erit in variis iſtiuſmodi phænomenis non ab aeris gravitate immediatè dependent, ſed ab ejus vi elaſticâ vitatis preſſu impreſſâ. Quippe niſi foret hæc vis Elaſtica, gravitas ubi non poſſet directè applicari (ut in vaſe clauſo) non id præſta- : Sin autem Gravitas non foret, nec eſſet ea vis Elaſtica, à preſſu eris aeris incumbentis orta; Elater enim, utcunque in ſe fortis, comprimatur nil agit, utpote cujus tota Vis activa eſt tantùm co- s ſe reſtituendi in ſitum unde detruſus fuerat.

x eodem principio (de concluſi Aeris Elatere) reddenda eſt ratio, *Aeris pondus non ſentiamus.* Quippe ſi tanti ponderis ſit Aer i jam perhibetur (cum antehac, non modò nullius ponderis cen- ur, ſed poſitivè levis,) mirum videri poſſit quod tantum onus ſuſti- s non eo nos premi ſentiamus.

m, *Cur Aquâ immerſi non ſentiant Aquæ pondus.* Cùm enim, modò nunc dierum, ſed & in veteri Philoſophiâ, Aquam gravem on dubitetur; eò magis mirandum videatur, quòd, Aquæ ſup- , incumbentis gravitatem non ſentiant; cùm interim minorem molem alibi impoſitam ferentes opprimerentur. Quódque de hic dictum eſt, de aliis item fluidis intelligendum eſt: imò & luidorum inſtar ſunt; putà, ſiquis Arenæ ſeu Farinæ cumulo pe- nitus

nitus immergeretur, non magis ille (credo) Arenæ seu Farinæ, quàm Aquæ, pondus sentiret.

Ratio est, (non, quod dici solet, quòd Aqua non gravitet in suo loco; putà supra aquam, aut gravius quiddam; contrarium utique dicendum est, nam superiores aquæ partes premunt inferiores, ut ex multis Experimentis seu Observatis satis liquet; sed) quoniam Aer vel Aqua ex omni corporis immersi parte æqualiter premens, partium positionem non turbat. Comprimit quidem (propter Aerem in sanguine aliisque humoribus compressionis capacem) quod observavit Honoratissimus *Boylæus* (*Paradox. Hydrostat.* in fine) in Gyrinis, (nostrates, alibi *Tad-poles* appellant, alibi *Hob-nails*,) aquâ inclusis validè compressâ, ubi satis vividè se movebant, sed magnitudine imminuti: Sicut, ex adverso, Animalia, Antliâ Pneumaticâ inclusa, subducto aere, augeri solent; propter aerem humoribus contentum insigniter dilatatum; neque id sine dolore, propter insignem vasorum continentium & fibrarum seu membranarum distentionem, fortè & lacerationem.

Aerem autem, seu quod Aeris instar est, (*Spiritus* fortè dicas,) magnâ copiâ in Sanguine contineri, certissimum est, potéstque ad oculum demonstrari: Sanguinem enim, in aperto vase contentum, si *Antliæ Pneumaticæ Boylianæ* immiseris; subducto aere (quod ipse aliquoties vidi, spumescit protinus,& non in spumam tantùm sed amplissimas bullas se expandit, (aere sanguini immisto, propter sublatam à extra compressionem, se insigniter ampliante;) & quidem plus quàm speraveris, ita ut saponis inter lavandum expansio in bullas, huic aeri in sanguine expansioni cedat.

Quódque inde rumpantur fibræ, videtur hinc saltem existimandum quòd Sanguis ille, post innumeras istiusmodi bullas turgente aere sic inflatas ruptásque, per aliquot dies postea reservatus, non (ut fieri solet) in grumosam massam coaluerit, sed liquidus permanserit. (Quod ipse vidi, & inter Experimenta *Boyliana* alicubi, si bene memini, memoratur.)

Contrà verò; ubi ex omni parte (pro fluidorum naturâ) æqualiter premitur immersum Corpus; aerísque particulæ,in minutissimas quasque partes sese cum humoribus insinuantes, & pridem fuerant æqualiter pressæ (nam nisi sic fuissent, partes minùs pressæ reliquis locum concederent quo ampliarentur, per prop. 1. hujus,) &, novâ pressione jam accedente ab incumbente aquâ, æqualiter item (ob eandem rationem) porro comprimuntur; manent partes similiter ut priùs invicem sitæ, nec ulla fit fibrarum seu membranarum distractio aut laceratio, adeóque nullus dolor seu sensus oneris.

Co

XIV.

æ, quàm

et in suo
am utique
es, ut ex
iiam Aer
, partium
m in san-
vavit Ho-
, (nostra-
iis validè
mminuta;
subducto
insigniter
am conti-
& lacera-

tè dicas,)
ne ad ocu-
, si An-
l ipse ali-
l amplissi-
blatam ab
plus quàm
huic aeri

rmandum
e aere si
n (ut fieri
ir. (Quo
nini, me

æqualiter
imas quas
rant æqua
quis locum
novâ pre
ob eandem
it priùs a
io aut l
Co

PR

/ C
reni
ex f
tract
dem
nec
senf
fiat,
perc
tingi
liquo

Pe
Recip
aeris
efflua
& V
Si
& vi
magis
cum
turge
sint u
bet ae
pienti
minuo
gradu
dem,
major
vefica
tum e
Si
denuo
(fibri
dolore
culâ u
(exigu
est; c
quam
Ver

Contrahuntur quidem hac ratione fibræ membranæque sed non renitentes; (quippe jam ante in statu tensionis erant; quod patet ex fibrarum aut membranarum, siquando secantur, spontaneâ contractione;) adeóque nec dolor inde oritur seu sensus oneris. Et quidem, dummodo nulla sit inæqualis pressio seu partium dislocatio, nec caro ossium (utcunque conjunctorum) nec ossa carnis ullam ex sensu perceptionem habent; sed sicubi inæqualis pressio aut dislocatio fiat, quâ partes extra situm suum detrudantur, tum tandem fit tactûs perceptio. Sed hoc in immersis fluido (ut jam ostensum est) non contingit; adeóque nec sensus Oneris, sive ab Aere sive ab Aquâ (alióve liquore) incumbente.

Possunt hæc ex *Antlia Boylianâ* confirmari. Quippe, si Antliæ *Recipienti* immiseris Vesiculam, flaccidam quidem (utpote parum aeris inibi habentem,) sed stricto collo probè obturatam (nequid effluat;) dummodo eadem ubique maneat aeris Compressio adeóque & Vis Elastica, omnia ut priùs perseverant.

Sin ex Recipiente aliquid aeris exhaurias, adeóque compressionem & vim elasticam aeris in Recipiente minuas; aer in Vesicâ (utpote magis compressus adeóque & magis elasticus quàm qui est extra Vesicam in Recipiente) se expandet, vesicâ interim (tanquam inflatâ) turgente. Idque eousque fiet quamdiu Vesicæ latera ita extendi possint ut aeri intus contento expansionem similem concedant ei quam habet aer Recipientis. Ubi verò non ita possit extendi Vesica, si Recipientis aer reddatur adhuc minùs elasticus, qui itaque pressui interno minùs æquipolleat; violenter distenditur vesica, (nempe pro eo gradu vis Elasticæ quo superat interior aer exteriorem;) quod quidem, si adesset sensus, non sine dolore fieret; eâque violentia, si major sit quàm quæ laterum Vesicæ firmitati æquipolleat, rumpetur vesica. Quod & in phialis vitreis, tenuis corticis, sæpiùs observatum est.

Si verò inflatâ sic vesicâ (nec rupta tamen) aerem in Vas *Recipiens* denuo admittas; flaccesset iterum vesica atque in minorem locum (fibris se retrahentibus) recipiet: quod etiamsi adesset sensus, sine dolore fieret, cùm nulla vis fibris inferatur. Quodque in hac vesiculâ unicâ videre est, idem de innumeris in corpore vesiculis sive bullis (exiguas Aeris seu Spirituum particulas continentibus) intelligendum est; quarum pressio ex aere æquabiliter incumbente vix major erit quàm quæ fibrarum extensio priùs fuerat se jam retrahentium.

Verum quidem est, si vesicæ loco phialam vitream immiseris, cujus

latera rigida sint neque se (ut fibræ) contrahant, (modò vitri tenuitas & forma tales sint ut externæ pressionis excessui supra internam sustinere non valeant,) rumpetur phiala, partibus corticis intra trusis: at hoc in immersis fluido secus est, ubi vesicularum cortices flaccidi sunt, & pressuum sine violentiâ capaces. Si vero eò usque urgeretur (ob immensam putà aquæ profunditatem) compressio, ut non possent vesicularum cortices se ulteriùs sine dolore contrahere; non dubito quin oneris & doloris sensus tum futurus esset. Ossa vero, & cartilagines, in compressionibus minoribus, utut flaccida non sint, dolorem à pressu illo non sentiunt, eo quòd partes illæ corporis duræ sint perceptionis minus (si omnino) capaces; sitque sensatio tantùm in nervis, fibris, membranis, aliisve corporis partibus mollioribus.

Quanta verò sit ea sive Compressio sive Dilatatio cujus capax est Aer, non facilè dictu est. Magnam certè esse, ultra quàm quis putaverit inexpertus, experimentis plurimis compertum est.

Illum Aeris statum qui nobis ordinarius est, naturalem esse (quem sponte suâ subiret aer non vi compressus,) non est existimandum. Quippe, nisi compressus esset, nulla foret in eo statu vis Elastica, (quam esse experimur,) ut quæ ab Elateris compressione tota pendet, in situm ampliorem conantis se restituere.

Quousque verò, si omnis compressio tolleretur, se ampliaturus esset Aer (qui ex innumeris corpusculis Elasticis variâ figurâ varióque situ videtur componi,) tentatum potius quàm penitus exploratum est.

Mersennus olim, Æolipilæ ope, ingenti caloris vi adhibitâ, (quantam ejusmodi vasa sine fusione ferre possent,) Aerem se ita dilatâsse affirmat ut spatium *Septuagecuplum* illius quod priùs habuit occupaverit.

Honoratissimus *Boylius* noster, absque caloris ope, solâ vi suâ elasticâ Aerem se dilatâsse expertus est, in locum pristino majorem vicibus primùm 9; tum, vicibus saltem 31, (sed majoris adhuc expansionis capacem esse si spatium esset quo reciperetur:) deinde, plusquam vicibus 60: tum, vicibus plusquam 152; (quæ plusquam dupla est expansionis Mersennianæ, vi caloris obtentæ, quæ tamen tantum non incredibilis existimata fuerat:) Quæ recenset ille, inter *Experimenta* sua *Physico-Mechanica de Aeris Elatere*, &c. Experim. 6.

Post id temporis, sed jam ante Octennium vel Novennium plus minus, (ut idem refert in Experimentis nuper Editis *de Admiranda Aeris Rarefactione,*) Expansionem illam, aliis mediis, multò adhuc promovit; nempe, usque ad vices saltem 8000, (vi suâ Elasticâ solâ, absque caloris ope:) atque, iterato experimento etiam adhuc major inventa erat: quibus Experimentis etiam ipse interfui. Idem-

Idémque, Experimento adhuc aliter instituto, (prout ibidem recensetur) ad vices pervênit plusquam 10000, (seu plusquam *Decies Millecuplum* loci quem priùs occupaverat idem Aer,) imo ad locum occupandum vicibus 13769 majorem.

Et quidem, inter ingeniosa illa atque subtilia *Experimenta Florentina* ante paucos annos edita, inventus est Aer, non modò absque *Caloris* ope, sed & absque ope (quam *Boylius* adhibuerat) *Antliæ Pneumaticæ*, solius *Experimenti Torricelliani* auxilio, expansus in molem saltem 173 vicibus pristinâ majorem.

At quis interim spondere possit, etiam in expansionum harum actu præstitarum maximis, compressionem omnem penitùs sublatam esse? Quod in factum fuerit, etiam adhuc majoris Expansionis capax censendus erit Aer. Quem itaque judicemus, ex tenuissimis, eísque maximè convolutis, particulis, & Elatere forti præditis, compositum esse. Quippe secus, vix cogitari potest quomodo in tam vastam amplitudinem, solâ suâ Vi Elasticâ (sublatâ vi extrinsecus comprimente) se dilatare posset exiguus Aer.

Cúmque se ita sponte dilataturus foret (si abessent impedimenta) quem hic habemus Aer; manifestum inde est, quod parem huic Compressionem jam sustineat. Sed majoris adhuc Compressionis capacem esse, non est quòd dubitemus; imò quotidie experimur.

Huc referri possunt *Sclopeti Pneumatici* dicti, seu *Spiritalis*, (nostri *Wind-gun* appellant) Experimenta, à *Mersenno* recensita; ubi, à compresso Aere, globulus magnâ vi projicitur, tanquam à pulvere Pyrio. In quo tamen summâ quâ potuerunt industriâ non in minorem quàm partem quindecimam, ejus quem priùs occupaverat loci, aerem vi comprimere valuerunt: & quidem etiam de hoc dubitat, qui illa instituit, *Mersennus* ipse (*Phænom. Pneumat.* prop. 32.) an in partem $\frac{1}{15}$, an $\frac{1}{8}$ potiùs dicendum fuerit, ob fallaciam aliquam quam Experimento subesse suspicatus est.

Item quæ in *Machinâ Compressivâ* (à *Societate Regiâ Londini* in hunc usum paratâ) instituta sunt Experimenta: in quâ compertus est Aer in soliti spatii partem $\frac{1}{10}$, vel etiam $\frac{1}{12}$ (*decimam*, vel *duodecimam*,) vi coerceri.

Eáque quæ habet *Boylius* idem (à quo & cætera desumpsi) *Experimenta Condensationis Aeris à Frigore.* Alterum quidem; in quo, quum Glaciem Sale mixtam circumposuerat undiquaque vasi vitreo quo continebatur conclusus Aer, (eo modo qui in congelandâ aquâ adhiberi solet,) contractum deprehendit in spatium quod ad pristinum erat ut 147 ad 158 plus minus; (quæ multò minor est quàm quæ vi

mechanicâ obtineri solet; quippe hic non nisi $\frac{1}{158}$ pristini spatii amittitur, hoc est, $\frac{1}{14}$ fere; cùm illic adhibitâ vi mechanicâ vix tantundem retineretur: dum tamen frigus sic adhibitum tantum fuerit ut aquæ congelandæ abundè sufficeret, summúmque hyemis apud nos rigorem superaverit.) Alterum; quo quum Glaciem vel Nivem Sale mixtam vasi similiter circumposuerat, cui Aeris exiguum & Aquæ multum includebatur, Aqua vi frigoris expansa (utpote congelationi proxima) Aerem sic compressit ut intra partem *Quadragesimam* seu $\frac{1}{40}$ pristini spatii concluderetur; fortiùs adhuc eundem compressura si non (quod contigit) vas ipsum rumperetur. Quæ quidem Contractio, seu Condensatio, utut minor sit quàm modò dicta Expansio seu Rarefactio, (eò quod Aer jam fuerat, in statu ordinario, insigniter compressus;) multò tamen major est quàm vel hybernum Frigus, (aut illud artificiale, hyberno fortius,) vel vis Mechanica hactenus adhibita, potuerit efficere.

Si verò utramque (summæ Rarefactionis summæque Condensationis supra quàm est in statu aeris apud nos ordinario) considerationem componamus: Cùm spatium quod occupat Aer sic Dilatatus, sit ad spatium quod occuparet Aer nobis Ordinarius, ut 13769 ad 1; atque quod Aer Ordinarius occupat ad spatium quod occupat sic Compressus, sit ut 40 ad 1; erit spatium Aeris sic Dilatati ad spatium ejusdem sic Compressi, ut ($13769 \times 40 =$) 550760 ad 1; vel, numero rotundo, ut 550000 ad 1, seu ut *Quinquies Centena & Quinquaginta Millia*, ad *Unum*. Et, quantò, per media olim fortè excogitanda, removeri adhuc possit ab invicem uterque terminus; conjicere non valemus.

Unicum adhuc ex iisdem D. *Boylii* (de Aeris Rarefactione & Condensione, seu Dilatatione & Contractione,) Experimentis monendum duxi. Nempe, quòd, utut Aerem in statu admodum laxo seu dilatato conclusum detinuerit in vase vitreo per Menses aliquot, imò per aliquot Annos; non tamen hactenus observare potuit, quin Elaterem suum retinuerit, & quidem in eodem quo priùs vigore; nec ob laxitatem illam languorem contraxerit: Cùm tamen non rarò observemus, Corpora Elastica (putà, laminam Ensis, aliámve chalybeam) ubi aliquadiu in situ indebito detenta fuerint, Elaterem suum deperdere, nec vi suâ se in pristinum situm restituere; Sed & Magnetem, Acúmve Magnete incitatam, si extra situm suum longo tempore detineas, vel polos mutare, vel sensim deperdere verticitatem suam. Tantus scilicet est, etiam in rebus inanimatis, diuturnæ in eodem situ positionis effectus.

Verùm

Verùm hic loci dissimulandum non est Experimentum aliud, illustre quidem & satis stupendum, quódque me de Phænomeni causâ solicitum tenuit.

Nempe; *Si Hydrargyrum inverso Tubo* (ut dictum est) *suspensum, stante inversionem ab omni Aere accuratissimè depurgatum* (quod nonnisi summâ curâ & diligentiâ fiet,) *atque inversione cautè factâ, Tubus in loco firmo ab omni concussione liber constituatur; Hydrargyrum (aperto infra orificio) suspensum permanebit, etiam longè ultra altitudinem suprà indicatam: Si verò, Hydrargyro sic suspenso, vel tantillum Aeris admittatur, vel concutiatur Tubus; statim præcipitabitur Hydrargyrum usque ad solitam altitudinem, ibique* (post reciprocationes aliquot factas) *consistet.*

Phænomenon hoc, Experimentis quibusdam, in *Organo Boyliano* primum, deinde in aperto aere factis, debemus. Observaverat utique Honoratissimus *Boylius* (quod ex ejus *Experimentis Physico-Mechanicis*, Anno 1660. editis, *Exper.* 17. ante monuimus,) Hydrargyrum, intra Antliam suam Tubo suspensum, subducto Aere gradatim descendere, uti expectaverat, non ita tamen quin, quamcunque adhibuerit diligentiam, supra stagnantis inferiùs Hydrargyri superficiem (contra quàm speraverat) extaret adhuc ad altitudinem *Unciæ* vel saltem *Semi unciæ* (præsertim si ab aere priùs depuratum fuerit,) cui in Aquâ respondent pedis Unciæ saltem 7 aut 8. Idémque in Aquâ expertus, immissis in Antliam tubis brevibus (putà, 5 aut 6 unciarum pedis) eâ repletis, Aquam reperit (saltem si ab Aere priùs depurgata fuerit) non descendere. Quæ quamquam Organo minùs præcisè obturato, quàm ut potuerit Aer omnis inde exhauriri, imputari posse videatur; rem tamen cum iis è *Societate Regiâ* qui tum temporis solebant convenire communicavit, ut altiore dignam examine.

Cúmque, post Librum illum editum, Organúmque ipsum *Londini* 1661 conspectum, variis adhibitum usibus, id eousque approbavit Clar. *Hugenius*, ut domum reversus aliam sibi ad ejusdem Antliæ formam parandam curaverit: id ipsum ille in Aquâ expertus similiter evenire deprehendit, (nescius, credo, D. *Boylium* id pridem deprehendisse:) Nempe, immisso in Antliam tubo breviusculo aquâ repleto ab aere depuratâ, post Aerem ex Antliâ quantum potuit exsuctum, Aqua adhuc suspensa mansit.

Idémque (suis literis) ut notabilem in doctrinâ *Boylianâ* (de Aeris Pondere & Elatere) difficultatem objecit.

Cui (literis suis) reponebat D. *Boylius*, rem planè ita esse, atque ab

ipso

ipso jam ante observatam, tum in Aquâ (ut D. *Hugenius*) tum etiam in Hydrargyro; agnitámque difficultatem, & cum Societate Regiâ communicatam, ut ulteriori adhuc examine dignam. Interea tamen solvi difficultatem videri posse ob Antliam non ita penitùs exhaustam quin ut residuus Aer exiguum illud pondus sustinere potuerit; & siquando Aqua illa brevium tuborum, aut huic æquipollens Hydrargyrum, ab aere nondum depuratum, subsideret, id imputari posse latenti intùs Aeri elatere suo depellenti vim Aeris extra tubum jam valde debilitatam.

Quod quidem responsum, utut Objectioni (prout tum res erant) satisfacere videretur; non tamen fecit quin *Societati Regiæ* visum fuerit in rem illam altiùs inquirere, Experimentis tum coram ipsis publicè, tum alibi privatim, præsertim ab Honoratissimo Præside D. Vicecom. *Brounckero* & D. *Boyle*, (quorum præsertim curæ res ea demandata fuit;) sive in Organo *Boyliano* sive in aperto Aere, faciendis.

Póstque varia facta tentamina, retulit tandem Societati Regiæ D. *Præses*, se Hydrargyrum sic suspensum detinuisse, ultra solitam altitudinem ad Æquipondium necessariam (putà unciarum 29 aut 30,) nempe ad pedis uncias usque 34: Posteáque D. *Boylius*, se idem expertum in altitudine unciarum 52: Iterúmque D. *Præses*, se idem ad pedis usque uncias saltem 55; pollicitus porro se rem ulteriùs adhuc prosecuturum. Quæ ex Regiæ Societatis Regestis Annorum 1661 & 1663 liquent.

Idémque ex eo tempore, frequenti experientia, in aperto Aere (absque Antliæ ope) Experimentis Honoratissimorum *Brounckeri*, *Boylii*, aliorúmque, crebrò iteratis (quibus & ego aliquando interfui) confirmatum est; Hydrargyrúmque, non tantum ad usitatam altitudinem (quò Æquilibrium cum externo Aere fieret,) putà, ad pedis Anglicani Uncias 29 circiter, sed etiam ad Uncias usque 40, 50, 60, aut etiam plures, suspendi deprehensum est, atque ita suspensum per dies aliquot consistere; sed concussione factâ, vel tantillo Aeris admisso, statim præcipitari ad Æquilibrium usque: Ut de Phænomeni certitudine jam dubitandum non sit.

Atque hoc quidem Experimentum, illustre & insperatum, cùm leges Staticas suprà positas quadantenus turbare videatur, in Gravitatis naturam altiùs inspiciendum monet, eóque facem non contemnendam præferre fortè deprehendetur olim.

Interim, donec certius aliquod à Viris Eruditis conclusum fuerit, hæc mihi ratio videtur non improbabilis. Nempe; Cùm olim, in

teri Philosophiâ, Terra, Aqua, aliáque ejusmodi Corpora, Gravia nsereutur; Aer autem Levis: videri possit contrarium quadantenus nc dicendum; omnémque Gravitationem actualem ab Aeris Æthesive pressu vel Elatere (expansionem moliente, cæteráque propterea co suo deturbante,) provenire: Absque quo, segnia hæc Corpora, æ Gravia dicimus, in quiete posita sic permanerent, sine Gravitane actuali sive descensu; neque magis essent ad motum deorsum roclivia quàm ad lateralem. Hydrargyrum itaque ab omni intus re depuratum, atque ita ut dictum est suspensum, etiam ultra contam altitudinem ad æquilibrium necessariam, cùm ab omni Aeris essu liberum sit, nec ejus vel gravitate vel elatere urgeatur, (quippe, i intùs deprimeret, nullus est; quíque extra est, si omnino preme-t, sursum premeret; nempe, per Tubi orificium, quà solùm patet itus; nam à pressu aeris superno vel laterali à Tubo defenditur;) iquiete positum immotum manet, suúmque situm retinet. Si verò, pter Tubi concussionem aliquam, aliquámve intùs commotionem Aeris elatere, vel priùs inibi relicti vel jam demum admissi, in tu ponatur; motum illum (pro ratione quantitatis materiæ, vel dentis partium, vel quicquid id sit quod *Ponderis* nomine vulgò insiamus,) prosequitur, deorsum (quà via patet) vergens. Adeóque, icquid id sit quod in Hydrargyro (aliísque similibus) *Pondus* dicimus, t absque Elatere vel pressu aeris aut quod hujus instar sit non inbaret motum, motu tamen undecunque orto rationes Staticas deinps observat. Atque hæc est quæ mihi videtur Phænomeni hujus n improbabilis ratio.

Addo tamen, Tubi superficiem utcunque politam (quod de aliis perficiebus pariter intelligendum) non ita ab omni asperitate seu inæalitate immunem censendam esse, quin etiamnum aliquid asperitatis persit, unde corporis adjacentis cohæsio aliqua & (si moveatur) ictio oriatur, (ut suprà aliquoties insinuatum est.) quâ motus alitenus impediatur, atque ob quam mota corpora alii contigua Volvi ciliùs quam Labi deprehenduntur. Atque hinc, si post omnem adibitam diligentiam nonnihil aeris utut exiguum permanere censeatur, mpensatio fieri possit ne Hydrargyrum excutiat.

Fateor interim mihi ne sic quidem penitus satisfactum esse, scrupuque adhuc superesse & difficultates quibus respondendis necdum ficio; quin aliquid adhuc mecum hæreat. Et quidem fieri potest uod D. Vicecom. *Brounckerus* suspicatur) Aeris pondus multò majus huc esse quàm ut altitudini Hydrargyri unciarum plus minus 29 rendeat; sed ab aere intus latente (nisi expurgetur) ad eam usque alti-

altitudinem depressam esse Hydrargyrum: At ubi expurgatur Aer, nihilque tum supersit quod externi aeris ponderi se opponat praeter nudum Hydrargyri pondus, rem secùs deprehendi, hydrargyrumque ab aeris æquipondio altius sustentum iri.

Sed nihil certi hic ausim determinare, severiori adhuc disquisitione rem dignam censens.

PROP. XIV.

Quæ de Hydrargyro propositionibus superioribus ostensa sunt eadem in aliis Fluidis, servatâ Gravitatum proportione, pariter obtinent.

CUm enim omnium Demonstrationes Hydrargyro speciatim applicatæ, procedant ex generali Fluidorum naturâ, eædem pariter obtinebunt in fluidis aliis, pro suâ cujusque gravitate.

Verbi gratiâ: Cum pondus Aquæ ad pondus Hydrargyri, æqualis magnitudine, sit ut 1 ad 14 (numero rotundo,) seu potius (quod D. *Boylius* ex suis Experimentis accuratius judicat) ad $13\frac{1}{4}$ circiter; (*Getaldus*, in suo *Archimede promoto*, ponit ut 1 ad $13\frac{4}{7}$:) Quò Cylindrus Aquæ æquipolleat externi Aeris pressui, requiritur ut altior sit Cylindro Hydrargyri æquipollente, vicibus 14, saltem $13\frac{1}{4}$, aut $13\frac{4}{7}$; prout hæc, illa, vel ista proportio sit accuratior; & quidem pro diverso sive Aquarum sive Hydrargyrorum pondere, poterit nunc hæc nec illa esse accuratior; potest enim & Aqua aquâ & Hydrargyrum Hydragyro levius esse graviúsve. Adeoque quam posuimus altitudinem CI, (fig. 314.) in Hydrargyro, unciarum plus minùs 29; ponenda erit, in Aquâ, pedum plus minus 33.

Huic consonum est D. *Boylii* Experimentum (cui & ipse cum aliis interfui) cujus meminit in *Continuatione Experimentorum Physico-Mechanicorum*, Experim. 15. Qui, experimento quærens quousque posset Aqua Suctione elevari in tubo, supra superficiem infra stagnantis aquæ cui insistebat, invenit (summâ adhibitâ diligentiâ) maximam ad quam tunc temporis elevari posset altitudinem fuisse pedum 33 & unciarum 6, hoc est pedum $33\frac{1}{2}$; quo tempore altitudo Hydrargyri propter Atmosphæræ æquipondium suspensi, fuit unciarum pedis $29\frac{1}{4}$ proximè; quæ quidem Hydrargyri altitudo per $13\frac{1}{4}$ multiplicata, exhibet uncias 402 proximè, hoc est pedes 33 cum 6 unciis. Atque, eadem

XIV.

r Aer,
pr: ter
ùnique

ifitione

---

oftenfa
ropor-

n appli-
iter ob-

æqualis
(quod
circiter;
Quò Cy-
ut altior
$3\frac{1}{4}$, aut
quidem
erit nunc
ydrargy-
mus alti-
nùs 29;

cum aliis
Phyfica-
quoufque
ftagnantis
ximam ad
3 & un-
ydrargyri
pedis $29\frac{1}{4}$
cata, ex-
Atque,
eâdem

Pr

eâ
gli
ad
Qu
(q
ſeu
(ſe
tin
mé
rit
cec

(q
in
dep
ſtin
tan
An
res
cùr
ſup
que
Fu
Ae
anſ
der
tud
dur
vot
din
put
alti
mo
rur

gra

eâdem analogiâ, quo tempore assurgeret Hydrargyrum ad pedis Anglicani uncias 30 (qui ascensus est quasi maximus,) assurgeret Aqua ad altitudinem unciarum 412 $\frac{1}{2}$, hoc est pedum 34 & unciarum 4 $\frac{1}{2}$: Quo tempore verò Hydrargyri ascensus esset nonnisi unciarum 28 (qui quasi minimus est,) ascenderet aqua ad altitudinem unciarum 385, seu pedum 32 $\frac{1}{12}$. Ut maximam Aquæ ascensionem ob Suctionem (seu, quod tantundem est, ob Atmosphæræ æquiponderantiam) obtinendam, ritè judicemus, nunc pedum 34 $\frac{1}{3}$, nunc pedum 32, (proximè,) nunc his intermediam, prout maxima minima vel intermedia fuerit Atmosphæræ gravitatio; saltem ab his limitibus quam parum recedendum erit.

Verùm non opus est, ad hoc de Aquâ Phænomenon probandum, (quod non ultra certam altitudinem suctione possit elevari,) ut ad idem in Hydrargyro tentatum recurramus. Quippe illud in Aquâ primò deprehensum est. Utut enim, qui ob Fugam Vacui suctiones fieri existimaverint, putaverint etiam (nec quidem inconsequenter) ad quantamcunque altitudinem sic posse Aquam elevari; nec dubitarint quin Antliarum atque Siphonum ope posset aqua etiam supra altissimas Turres nedum Montes suctione trahi: Deprehenderant tamen Antliopœi, cùm ad praxin deventum esset, rem non succedere; omnésque aquam supra certam altitudinem his mediis elevandi conatus frustra esse. Atque hoc ipsum est quod *Galilæo* primùm in animum induxit, Vacui Fugam illam non infinitam esse, sed intra certos limites coerceri; Aerísque Æquipondium illius loco substituendum. Indéque *Torricellio* ansa data est idem in Hydrargyro tentandi. Quippe non imprudenter conjecit ille, si ob Aeris Æquipondium nonnisi ad certam altitudinem elevaretur Aqua, ad minorem adhuc elevandum fore Fluidum aquâ Gravius: atque, in Hydrargyro tentata, res successit ex voto. Atque exinde, Torricellio præeunte, res jam redacta ab altitudine pedum plus minus 33, ad altitudinem tubi breviusculi, unciarum putà 29 plus minus, facta est magis tractabilis; (cùm tubi tot pedes alti, liquoribus aerique impervii, nec facilè obtineri possent, nec commodè tractari:) Unde tot tantíque momenti Experimenta profluxerunt, profluúntque indies.

Quódque in Aquâ ostensum est, in Fluidis aliis, servatâ proportione gravitatum, perinde obtinere censendum est.

PROP. XV.

Quæ de Hydrargyro, aliisve Fluidis, in Tubo suspensis ostensa sunt; eadem Siphonibus, Antliis, aliisque ejusmodi organis, accommodanda sunt.

Fig. 321. Esto enim, verbi gratiâ, Siphon seu Tubus incurvus C D E (utrinque apertus,) cujus alterum extremum C Aquâ aliove Fluido immergatur, alterum E extrà propendeat. Notum est Experimentum (ut in deplendis vasis vinariis, aliisve,) si sugendo in E proliciatur liquor donec effluat, omissâ deinceps suctione continuabitur effluxus, donec liquor in vase vel penitus exhauriatur, vel à justâ altitudine deficiat: Eâ tamen lege, ut orificium E inferius sit quam A B liquoris in vase superficies.

Hujus Phænomeni causa à Fugâ Vacui peti solebat olim; nempe, quòd exsucto in E aere qui in Siphone fuerat, ascendat (contra gravitatis suæ propensionem) Fluidum in C, ne daretur (quod naturam omnibus modis aversari putabatur) Vacuum in Siphone. Et, consequenter, hujusmodi artificio etiam supra altissimos montes in oppositas valles aquam transferri posse putabatur.

Postquam verò experimento compertum est, non posse aquam (aliúdve fluidum) ultra certam altitudinem suctione attrahi, eámque in altitudinem immensam sic elevandi spes fuisse fallaces; cœpitque in Fugæ Vacui locum succedere (Galilæo id primùm suggerente, & promovente Torricellio,) Aeris Æquipondium: ad leges Staticas deventum est, quò altitudines illæ pro cujusque Fluidi gravitate determinentur.

Exsucto igitur Aere in E, (seu potius, loco facto in sugentis Thorace dilatato quo recipiatur aliunde protrusus aer,) subjectum Fluidum ab aeris extrà incumbentis pressu in Siphonem protruditur (eâdem ratione quâ, suprà, in Tubum rectum) in C; idque eousque (nec ultra) donec fiat Æquilibrium cum externi Aeris pressu, (per ante demonstrata;) putà, ad altitudinem C I; (hoc est, in Hydrargyro, Unciarum quasi 29; in Aquâ, Pedum quasi 33, plus minus; atque in aliis liquoribus proportionaliter pro suâ cujusque gravitate.) Si itaque Siphonis summum D, altius non sit quàm I; assurget fluidum ad summum usque; exitúque illic invento per crus descendens D E, effluet

ex

ex E; atque hoc continuè, causis perseverantibus. Eâ tamen lege, ut inferius sit E quàm C (superficiei A C B:) Secùs enim, cùm æquali Atmosphæræ pressu urgeantur C & E, si Cruris D E altitudo minor sit quàm Cruris D C, adeóque fluidum quod illo continetur minùs gravitet quam quòd in hoc, contrario cursu feretur fluidum ab E per D ad C, succedente Aere in E: Saltem, nisi Siphonis amplitudo tanta sit ut possit Aer simul ascendere (per fluidi latera) dum defluit fluidum curis D E; quo casu, partiri poterit fluidum in D, descendente parte alterâ per D C, alterâ per D E, ascendente Aere per fluidi D E descendentis latera; in Siphonibus verò strictioribus retrò feretur fluidum in E, per E D C, ab aere in E urgente propulsum.

Sin D altius sit quàm I, sursum propelletur Fluidum (ob causas suprà traditas) à C ad I usque, sed non ultra; adeóque ad D non pertinget: Adeóque tantum abest ut cessante suctione continuè profluat per D ad E, ut nullâ suctione ad E protrahi possit. Cùm enim suctio non aliter agat quàm (aperto Thorace, aut quod Thoracis instar est,) locum faciendo quo recipiatur fluidum (non suctionis vi tractum, sed) ab externi aeris pressu (seu quod hujus instar est) propulsum; si, utut loco facto, non valeat tamen externus aer eò propellere Fluidum (propter D altiùs quàm I,) Fluidum ad I consistet, neque altiùs feretur quò per D ad E possit pertingere. Et quidem, si totus fluido impleatur Siphon C D E; aperto utrinque orificio, factâ partitione in D, quod est in crure D C deprimetur saltem usque ad I, (ne plus prematur C quam superficiei A C B partes reliquæ,) quódque est in crure D E effluet per E (aere in illius locum succedente;) saltem nisi tam strictum sit crus D E ut non commodè possit ascendens Aer descendens fluidum præterire; quo casu, postquam descenderit fluidum in D E usque ad altitudinem I, suspensum illic detinebitur donec se possit Aer sensim insinuare; viáque tandem factâ quâ possit externus Aer liberè per E intrans vim suam exercere, deprimetur quod erat residuum in crure D E ad C usque.

Idémque in Antliâ (seu Organo Ctesibico) obtinet; Cujus structura ad hunc fere modum fieri solet; Lignum oblongum (vel ex pluribus, si opus sit, compositum) intus excavatum Cylindricè, in puteum demittitur, (extante parte superiore,) infra superficiem aquæ in putei fundo; quæ quidem Aqua intelligenda est, non libera ab aeris pressu, sed eidem obnoxia (secùs enim non sursum propelletur aqua;) Atque alicubi in Antliæ cavo repagulum transversum figitur Fig.322.

 in

in cujus medio est foramen D per quod ascendat Aqua; & huic foramini incumbens operculum seu valva E, transversario ita fixa ut aperiri aut claudi possit prout infra suprave premitur; Item, Situla à manubrio supernè demissa, (ita Cavi lateribus aptata ut non possit Aer per latera se insinuans transire,) quæ similiter in fundi medio foramen habeat F, eique sic aptatam valvam G, ut E ad D.

His ita constructis; dum manubrium versando Situla sursum trahitur, cúmque illâ incumbens Aer, quò minùs subjecta intra Antliam aqua eo prematur, impelletur in Antliæ cavum aqua aliunde pressa per C ad D, & per foramen (valvam E aperiens) ad fundum usque situlæ (modò altior non sit quàm C I summa æquilibrii altitudo,) utpote à pressu supernè libera, atque infrà propulsa: Contrà verò; dum manubrium aliàs versando deprimitur Situla, deprimátque proximè subjectam aquam quæ per D ascenderat; clauditur hac depressione valva E, atque aperitur G; per quam aqua, situlam supergressa, cum retractâ situlâ (clausâ G valvâ) sursum trahitur, viâque illic inventâ per orificium H effluit, succedente ut priùs in retractæ situlæ locum aquâ per D denuo assurgente: atque hoc continuè.

At verò, si altitudo C D major sit vel non minor quàm C I (quâ fieri supponimus æquilibrium cum externi aeris pressu) Aqua per D non ascendet (ne plus premeretur C quàm superficiei A C B partes reliquæ,) totúsque Antliæ labor incassum erit. Sin D sit infra I, ascendet aqua per D ad I usque, modò non impediatur; saltem ad usque fundum situlæ, nisi altior sit hic quàm I. Si verò eousque sursum trahatur situla ut F vel G superet altitudinem I, desertâ situlâ infra subsistet aqua ad I; ita tamen ut si situla dum infra I fuerat aquam per F G hauserat, hanc secum (clausâ G valvâ) elevabit atque per H effundet; sed cum majore exantlantis vi, utpote cui nihil subsidii conferat aqua infernè premens.

Hinc est, quòd Hydrargyrum non possit Siphone, Antliâ, Syringâ (nam & illic eadem est ratio,) alióve Suctionis Organo quocunque, ultra pedis Uncias 29 aut 30 in altum trahi; nec Aqua, ultra pedes 33 aut 34, circiter; aliáque Fluida pro suâ cujusque gravitatis ratione. Causa utique in omnibus eadem est; Nempe, Ea quæ Suctione fieri videntur omnia, Pulsione reverâ fiunt; putà, ab aere extrà gravitante, alióve pressu; suctione nil aliud faciente quàm ut locus paretur ad recipiendum id quod pressu aliunde pellitur.

CAP.



CAP. XV.

Epilogus, ex Miscellaneis.

CUm tandem ad umbelicum perveniendum sit, ne opus in immensum crescat, (utut pro materiæ copiâ satis arctum;) nonnulla in caput hoc strictim congerere visum est, quæ vel suis locis omissa fuerant, vel consultò huc rejecta.

PROP. I.

De Spatiis Hyperbolicis, addi possunt supra traditis hæc quæ sequuntur.

NEmpe, in hujus Operis Parte Secundâ, Cap. V. prop. 31. prope finem; *pag.* 555. post *lin.* 23. hæc inserantur.

SCHOLIUM.

PRiusquam autem hoc Spatium Hyperbolicum dimittam, libet ejusdem cum aliis aliquot figuris Symbolizationes, non olim observatas, recolligere.

1. *Si rectarum quotlibet arithmeticè proportionalium quadrata, quadratis invicem æqualibus (vel eodem communi) augeantur; aggregatorum latera quadratica, ad rectam ut axem æqualibus intervallis ordinatim-applicata, complebunt Spatium Hyperbolicum, Curvæ, Semi-axi transverso, & Axi Conjugato interjectum, rectâque axi transverso parallelâ clausum.* Puta, Si expositæ rectæ C A fig. 323. normalis fiat C δ Δ quantumvis producta, in quâ sumantur partes æquales quotlibet C δ, δ δ, δ Δ, &c. adeóque C δ, C δ, C Δ, &c. arithmeticè proportionales; & junctis δ A, Δ A, &c. æquales ponantur δ o, Δ O, &c. Erit A o O curva Hyperbolica, cujus Semiaxis transversus C A, & C Δ axis conjugatus; spatiúmque C A O Δ hyperbolicum complebunt rectæ δ o, &c. ipsis δ A æquales. Hoc demonstramus Fig. 323.

ſtramus in Tractatu *De Curvarum* 'Ευθυνσει, iterúmque ad prop. 32. hujus Capitis V.

Fig. 323, 324. 2. Si exponatur, fig. 324. A o O parabola, cujus Axis interceptus A d D, ordinatim-applicata D O, tangénſque O F axi producto occurrat in F; tangátque in vertice A τ T, = D O, diviſa utcunque in τ; cui æqualis ponatur C δ Δ (fig. 323.) ſimiliter in δ diviſa; fiátque angulo D F O, æqualis C Δ A, determinans (in rectâ ipſi C δ Δ normali) rectam C A; & junctis δ A, Δ A, æquales ponantur δ o, δ O, ipſi C A parallelæ, fiátque (ut modò dictum eſt) A o O Hyperbola, cujus Semiaxis C A; ſitque aſymptota C m M: Erit, *Ut ſpatium hyperbolicum* C Δ O A, *ad* C Δ M *triangulum*; *ſic* A o O *curva parabolica*, *ad ejus axem interceptum* A d D: *Itémque*, *ut* C δ o A, *ad* C δ m; *ſic* A o *curva parabolica, ad ejus axem* A d; *& ſic ubique.* Hoc demonſtramus in eodem De 'Ευθυνσει tractatu; iterúmque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

3. Si converſione Parabolæ A O D circa Axem A D deſcribatur Conoides parabolicum; & converſione Rectanguli circumſcripti A D O T circa eundem axem deſcribatur Cylindrus: Erit, *Ut momentum ſpatii hyperbolici* C Δ O A, *ad momentum trianguli* C Δ M, *reſpectu ejuſdem* C A; *ſeu, ut erecta Ungula ſuper illud. ad Ungulam erectam æque altam ſuper hoc, quarum communis acies ſit eadem* C A; *ſeu, ut Solidum ex converſione illius, ad Solidum ex converſione hujus, circa eandem* C A; (ſunt enim hæ rationes, eædem omnes:) *Sic Conoidis hujus parabolici ſuperficies curva, ad duos trientes ſuperficiei curvæ Cylindri circumſcripti.* Vel etiam (propter C Δ O A = C Δ O D − A O D.) Ut *Momentum Rectanguli* C Δ O D *minus momento Semihyperbolæ* A O D, ad *momentum Trianguli* C Δ M, (reſpectu ejuſdem C A D;) Sic *Conoidis hujus ſuperficies Curva*, ad *duos trientes curvæ ſuperficiei Cylindri circumſcripti.* Quod ibidem demonſtramus, atque hic monemus ad prop. 31. hujus Cap. V.

4. Sed; poſitis (ut § E prop. 32. hujus Cap. V.) A C $= S = \frac{1}{2}T$, Latereque recto $= L$, A D $= d$, DO = CΔ $= h = \sqrt{\frac{dT + d^2}{T}L}$,

ΔO = CD $= c = \frac{1}{2}T + d = S + d = \sqrt{: s^2 + \frac{T}{L}h^2 :} = \sqrt{: \frac{1}{4}T^2 + \frac{T}{L}h^2}$, ΔM $= \sqrt{\frac{T}{L}h^2} = h\sqrt{\frac{T}{L}}$: *Momentum Semi-hyperbolæ* AOD *reſpectu rectæ* C A D (utpote Semiquadrata omnium D O) eſt $\frac{\frac{1}{2}d^2T + \frac{1}{3}d^3}{2T}L$; (Quod ibidem ut demonſtratum aſſumimus ex

prop.

prop. 164. *Arithm. Infin.* iterúmque ostendimus ad § L. prop. 31. hujus Cap.V.) Momentum autem (respectu ejusdem C A D rectæ) Rectanguli C △ O D, $\frac{1}{2}ch^2$; & Trianguli C △ M, $\frac{1}{3}h^3\sqrt{\frac{T}{L}}$; (per pr. *6.* ejusdem.) Ergo, Ut $\frac{1}{2}ch^2 - \frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}d}{2T}d^2L$, ad $\frac{1}{3}h^3\sqrt{\frac{T}{L}}$; hoc est, Ut $ch^2T - \frac{1}{2}d^2TL - \frac{1}{3}d^3L$, ad $\frac{2}{3}h^3T\sqrt{\frac{T}{L}}$; Hoc est (propter $c = \frac{1}{2}T + d$, & $h^2 = \frac{dT+d^2}{T}L$,) Ut $\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2$, ad $T + d$, in $\frac{2}{3}\sqrt{:dT + d^2}$: Sic *illa superficies curva Conoidica*, ad $\frac{2}{3}$ *Cylindricæ:* Seu, Ut $\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2$, ad $T + d$, in $\sqrt{:dT + d^2}$; Sic *Conoidica* ad *Cylindricam.*

5. Sed & eadem est ratio momenti curvæ parabolicæ A O, ad momentum rectæ T O, respectu ejusdem rectæ A D, (nempe, quæ est conversione factorum:) Cum itaque Momentorum ratio ex rationibus ponderum & distantiarum componatur; si ex hoc momentorum ratione eximatur ratio magnitudinum, hoc est (ut modo ostensum est) quadrilinei C △ O A ad triangulum A △ M, (seu hujus conversa cum eâ componatur:) habebitur ratio *distantiæ Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O, ad *distantiam centri gravitatis rectæ* T O, (ab eâdem A D,) hoc est ad $AT = C\triangle = DO = h = \sqrt{:\frac{dT+d^2}{T}L}$: Adeoque $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d, \text{ in } \sqrt{:dT + d^2}} \times \frac{A\triangle M}{C\triangle OA}AT$ *Distantia Centri gravitatis curvæ parabolicæ* A O *ab ejus axe* A D: Vel, propter $A\triangle M = \frac{1}{2}h^2\sqrt{\frac{T}{L}}$, si ponamus $hg = C\triangle OA$, adeóque $\frac{A\triangle M}{C\triangle OA} = \frac{\frac{1}{2}h}{g}\sqrt{\frac{T}{L}}$; erit ea distantia $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d, \text{ in } \sqrt{:dT + d^2}} \times \frac{\frac{1}{2}h}{g}h\sqrt{\frac{T}{L}}$, hoc est, reductione factâ, (propter $h = \sqrt{\frac{dT+d^2}{T}L}$ & $h\sqrt{\frac{T}{L}} = \sqrt{:dT + d^2}$:) $\frac{\frac{1}{2}T^2 + dT + \frac{2}{3}d^2}{T + d} \times \frac{\frac{1}{2}h}{g} = \frac{3T^2 + 6dT + 4d^2}{6T + 6d} \times \frac{\sqrt{:dT + d^2}:}{2g}\sqrt{\frac{L}{T}}$. Ubi quantitates omnes sunt Geometricæ determinatæ præter unam g, quæ cum $C\triangle = h$ intelligitur Rectangulum comprehendere æquale Quadrilineo C △ O A; eáque ipsa ap-

prox-

Fig. 323, 324. proximatione quamlibet accuratâ determinatur prop. 31. hujus Cap. V. Sed & hinc similiter habetur ejusdem ab O T distantia; adeóque ratio superficiei ab AO curvâ circa O T conversâ descriptæ, ad Cylindricam rectâ A D sic conversâ descriptam. Aliáque de ejusmodi aliis curvæ parabolicæ conversionibus; quæ hic ulterius prosequi non est animus, ne nimis divagarer.

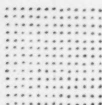
6. Si eadem curva Parabolica A O circa tangentem verticis A T ut axem convertatur, Conoidis Parabolici Acuti superficiem curvam describens; rectáque A D sic conversa describat circulum: Erit, *Ut Ungulæ Quadrilinei Hyperbolici* C △ O A, *aciem habentis* C A, *momentum respectu aciei suæ* C A: *ad Ungulæ Trianguli* C △ M, *aciem item habentis* C A, *momentum respectu ejusdem* C A: *Sic superficies curva Conoideos parabolici acuti ab* A O *circa* A T *descripti; ad circulum rectâ* A D *ut radio circa* A *ut centrum conversâ descriptum.* Quod etiam in eodem De Εὐθύνσει tractatu demonstratur. Manente scilicet Magnitudinum ratione o o, d d, in Parabola, ut δ o, δ m, in Hyperbola; distantiæ to, t o, sunt (non ut d o, d o, arithmeticè proportionales, sed) ut quadrata arithmeticè proportionalium: adeóque comparantur (non cum Quadrilinei C △ O A, & Trilinei C △ M, Ungulis seu Momentis respectu C A rectæ, sed) cum Momentis Ungularum C △ O A & C △ M respectu communis aciei C A. Eademque (quæ factorum à conversione) est ratio momenti curvæ A O, ad momentum rectæ A D, respectu A T rectæ. Atque, ex hac momentorum ratione, si eximatur ratio magnitudinum, (vel hujus conversa cum eâ componatur,) habetur ratio distantiæ centri gravitatis Curvæ parabolicæ A O, ad distantiam Centri rectæ A D (quod est ipsius punctum medium,) ab A T eâdem tangente verticis. Adeóque (propter habitam istius Centri distantiam à duabus rectis non parallelis) habetur ipsum curvæ Parabolicæ A O Centrum gravitatis; &, quæ inde dependent.

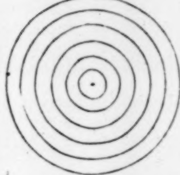
7. *Figura ex Primanorum Reciprocis conflata, est Spatium Hyperbolicum, Curvæ & Asymptotis interjectum, rectâ Asymptotarum alteri parallelâ terminatum.* Ut A S H h σ fig. 210. Hoc demon-
Fig. 210. stravimus prop. 94, 95. *Arithmet. Infinit.* iterúmque prop. 31. hujus Cap. V.

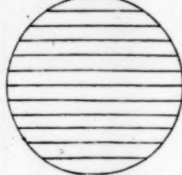
8. *Idémque spatium Hyperbolicum, est Figura Secantium, finibus rectis complementorum (aut arcuum suorum finibus versis) arithmeticè proportionalibus respondentium.* Hoc insinuatum est, § B. prop. 17. hujus Cap. V. iterúmque occurrit § E. pr. 30. (Nam quæ illic occurrunt

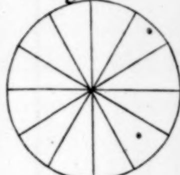
rectæ

Fig 81


Fig: 82


Fig: 83.


Fig. 84.


Fig. 85

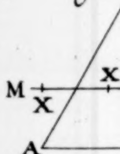


Fig 86

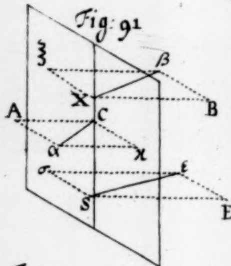


Fig: 91

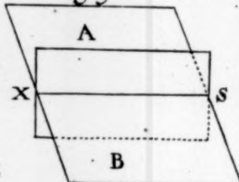


Fig. 92.

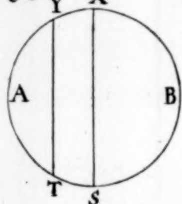


Fig. 93

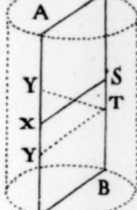


Fig. 94

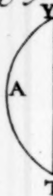


Fig. 95



Fig 99.

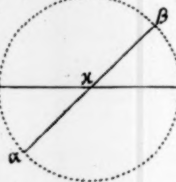


Fig. 100.



Fig. 101.



Fig. 102.

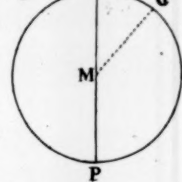


Fig 103

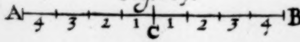


Fig: 107.

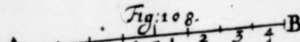


Fig: 108.

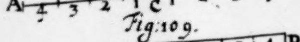


Fig: 109.

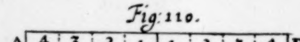


Fig: 110.

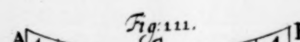


Fig: 111.

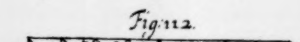


Fig: 112.

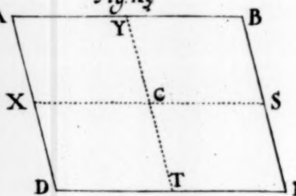


Fig. 113

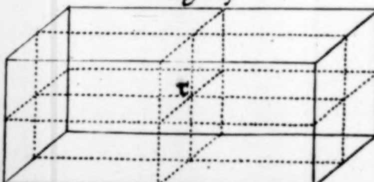


Fig. 114

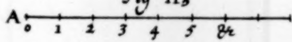


Fig 115

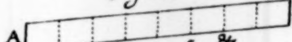
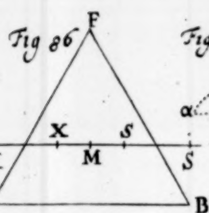
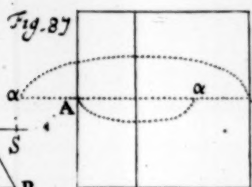


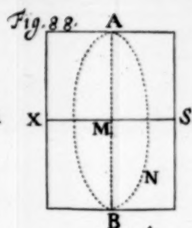
Fig. 116.

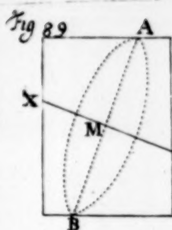

Fig. 117.

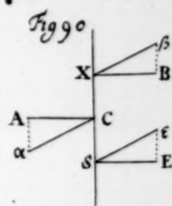

Fig. 118

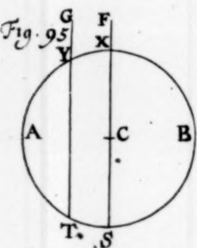

Fig 86
F
X
S
M
S
B

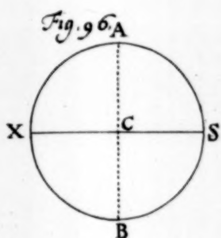

Fig. 87
α
A
α
A

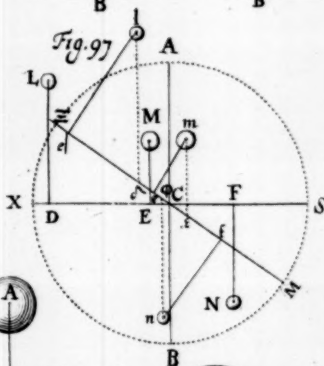

Fig. 88.
A
X
M
S
N
B

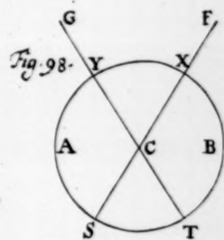

Fig 89
A
X
M
S
B

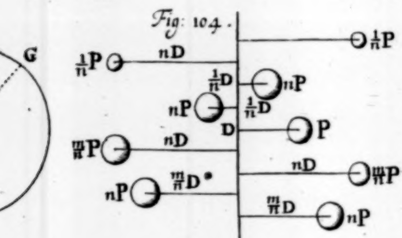

Fig 90
β
X
B
A
C
ε
α
S
E

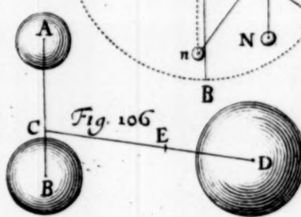

Fig. 95
G
F
X
Y
A
C
B
T
S

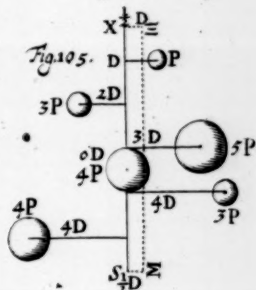

Fig. 96.
A
X
C
S
B

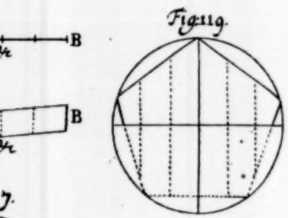

Fig. 97
l
A
L
M
m
X
D
E
C
F
S
f
N
n
B
M

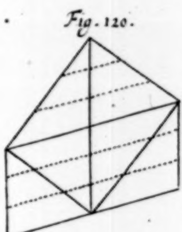

Fig. 98.
G
F
Y
X
A
C
B
S
T

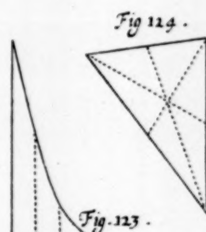

Fig: 104.
1/n P
nD
1/n P
1/n D
nP
nP
1/n D
D
P
m/n P
nD
nD
m/n P
nP
m/n D
m/n D
nP

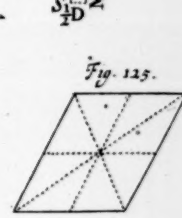

A
C
Fig. 106
E
B
D

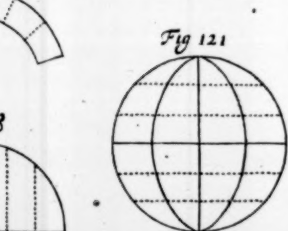

X
1/2 D
Fig. 105.
D
P
2D
3P
3 D
5P
0D
4P
4D
3P
4P
4D
S 1/2 D

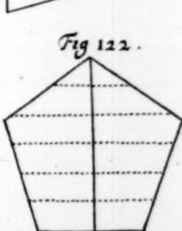

B
B
Fig. 119.

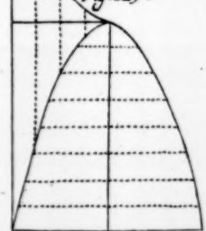

Fig. 120.

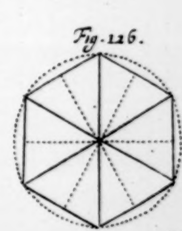

Fig 124.


Fig. 125.

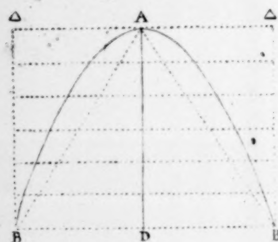

Fig 121

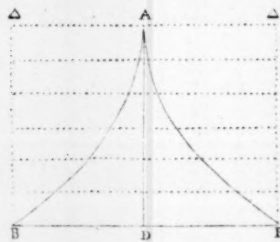

Fig 122.

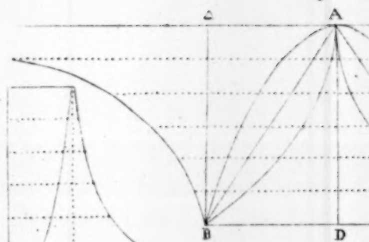

Fig. 123.

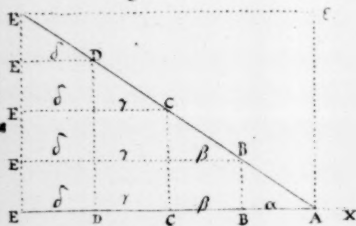

Fig. 126.

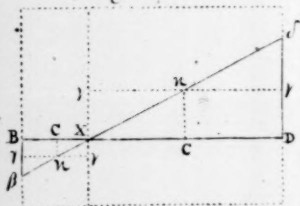
1

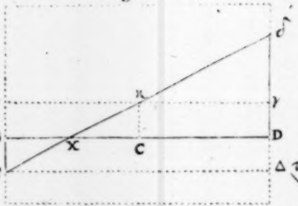

Fig: 127.
Δ A Δ
B D B

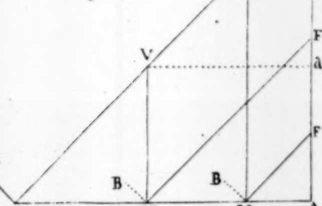

Fig: 128
Δ A Δ
B D B

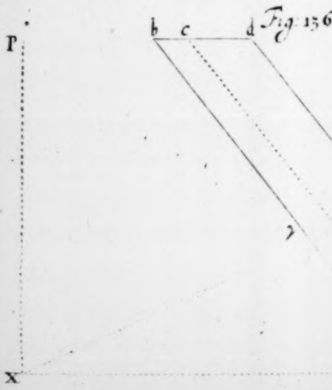

Fig: 12
Δ A
B D
δ
β

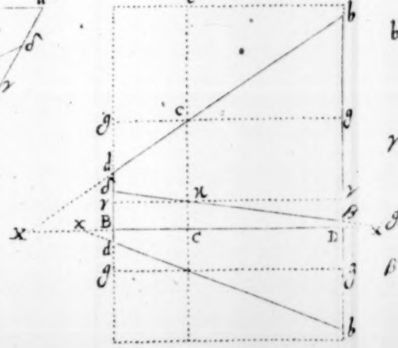

Fig 135
E D C B A X
δ γ β α

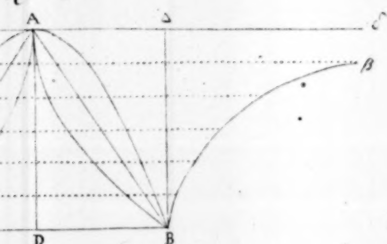

Fig: 137.
B C X C D
γ β κ δ

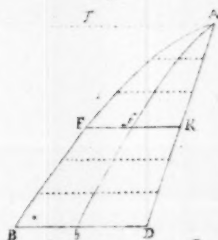

Fig 138
γ B β X C D Δ δ κ

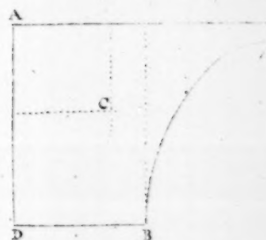

Fig 141.
f a F a F V V B B α V V A τ
Fig 15

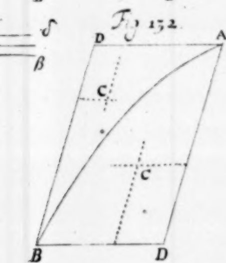

Fig: 136.
b c d
P X B C D
γ β δ κ

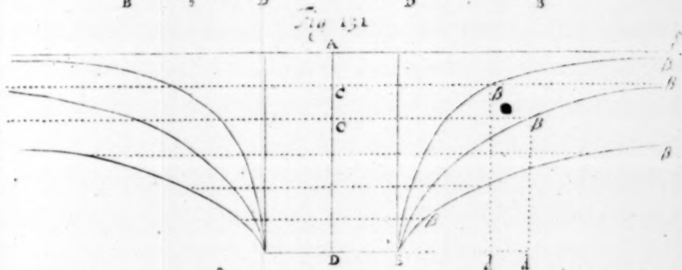

Fig: 139.
b g d δ γ B d g c κ C D X
b

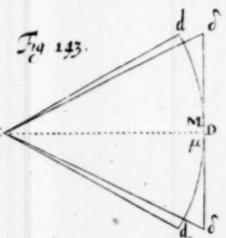

Fig. 129.
A
Δ
δ
β
D
B

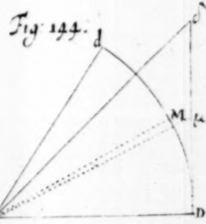

A
F
K
B
D

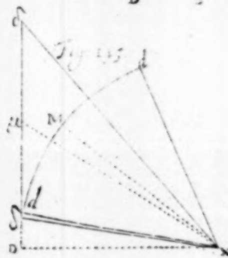

A
C
D
B

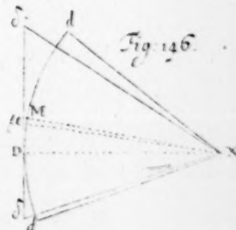

Fig 132.
D
A
C
C
B
D

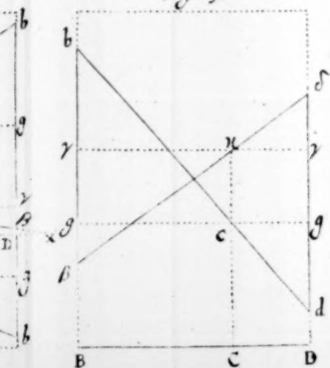

Fig 131
A
C
C
D

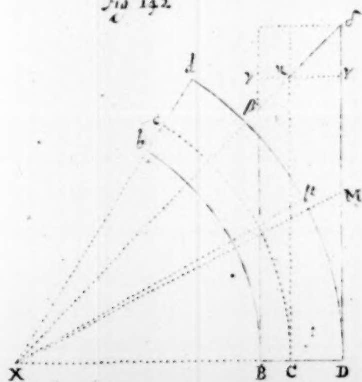

Fig 143.
d
δ
M
D
μ
d
δ

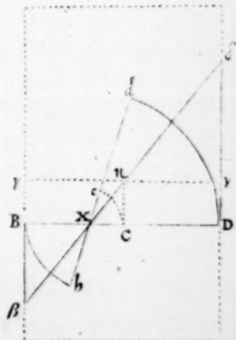

Fig 144.
d
δ
M
μ
X
D


δ
d
μ
M
d
δ
D
X


δ
d
Fig 146.
M
μ
D
X
δ
d


Fig. 190.
b
δ
γ
n
γ
ϑ
c
ϑ
β
d
B
C
D


Fig 142.
δ
γ
n
γ
d
c
b
M
X
B
C
D


δ
d
γ
n
B
X
C
D
h
β

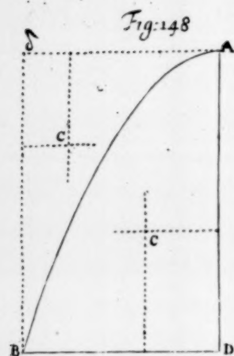


Fig:148

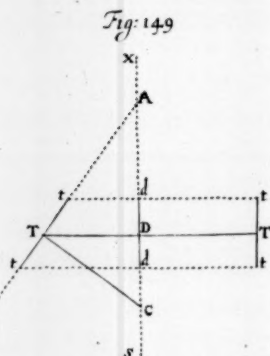


Fig:149

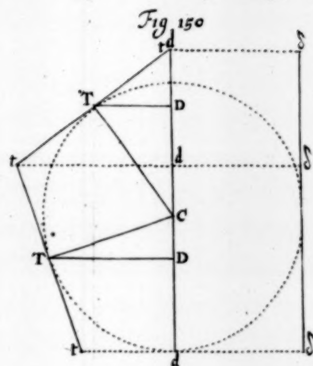


Fig 150

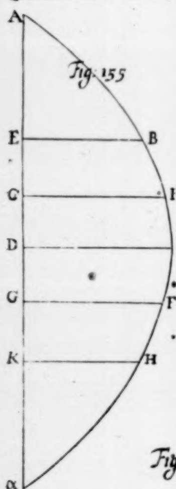


Fig:155

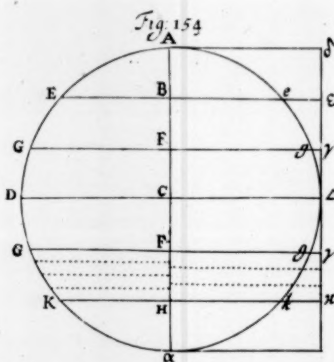


Fig:154

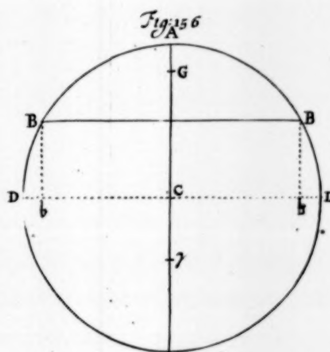


Fig:156

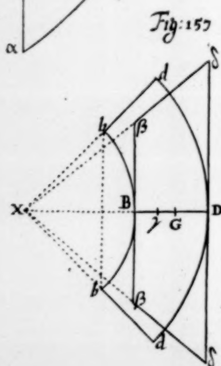


Fig:157

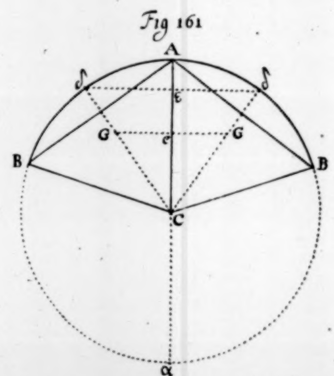


Fig 161

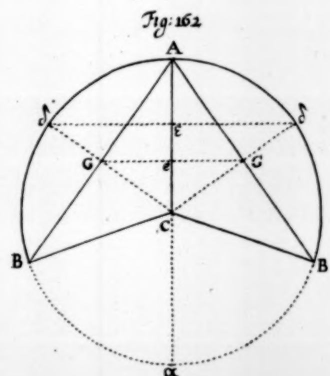
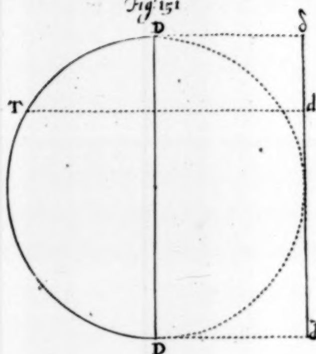
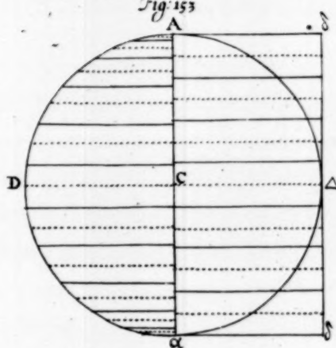
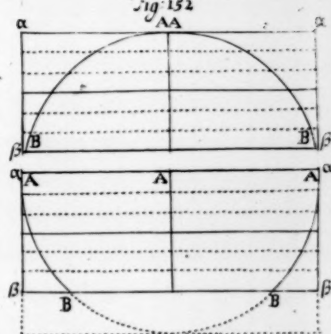
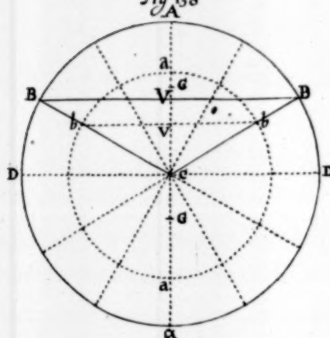


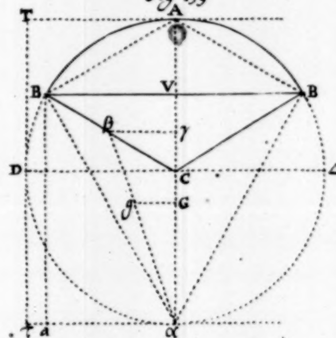
Fig:162

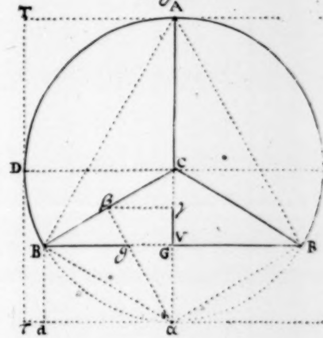

Fig: 151
D
δ
T
d
D

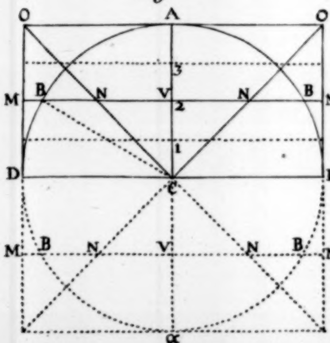

Fig: 153
A
δ
D
C
Δ
α
δ

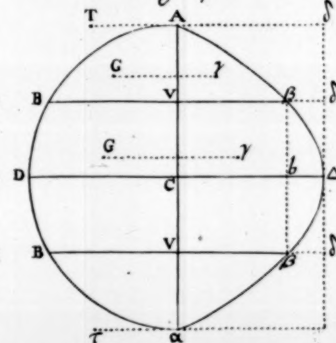

Fig: 152
α
AA
α
β
B
B
β
α
A
A
A
α
β
B
B
β

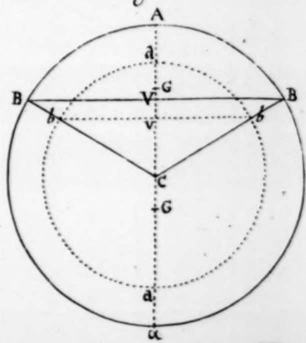

Fig 158
A
a
B
V
G
B
b
V
b
D
C
D
G
a
α


Fig 159
T
A
B
V
B
β
γ
D
C
Δ
g
G
a
α


Fig 160
T
A
D
C
β
γ
V
B
g
G
B
τ
a
α


Fig: 163
O
A
O
3
M
B
N
V
N
B
M
2
1
D
C
D
M
B
N
V
N
B
M
α


Fig: 164
T
A
δ
G
γ
B
V
β
δ
G
γ
b
D
C
Δ
B
V
β
δ
τ
α


Fig: 165
A
a
B
V
G
B
b
V
b
C
G
a
α

3

Fig: 171.

Fig: 172.

Fig: 166.

Fig: 167.

Fig: 168.

Fig: 169.

Fig: 170.

Fig: 168.

Fig: 173.

Fig: 174

Fig: 177

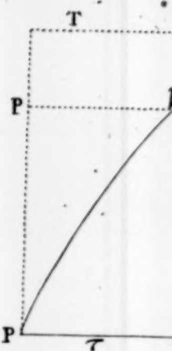


Fig 175

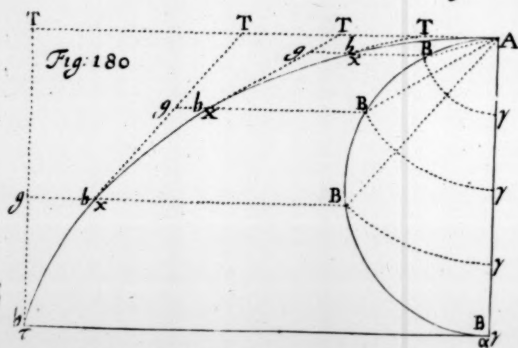


Fig: 180

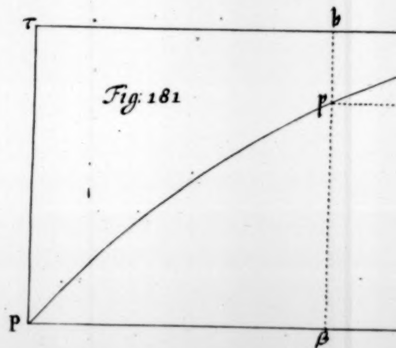


Fig: 181

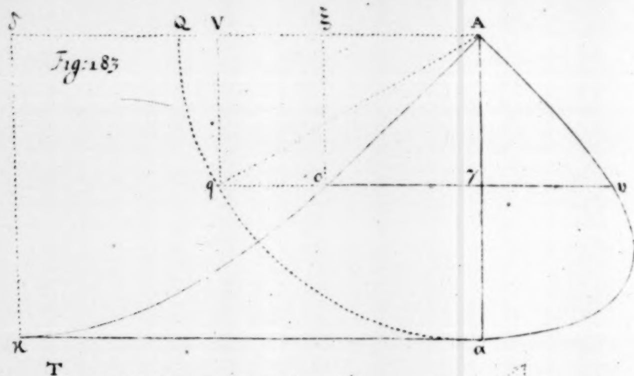
Fig: 178

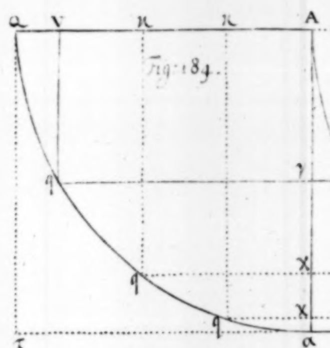
Fig: 179.

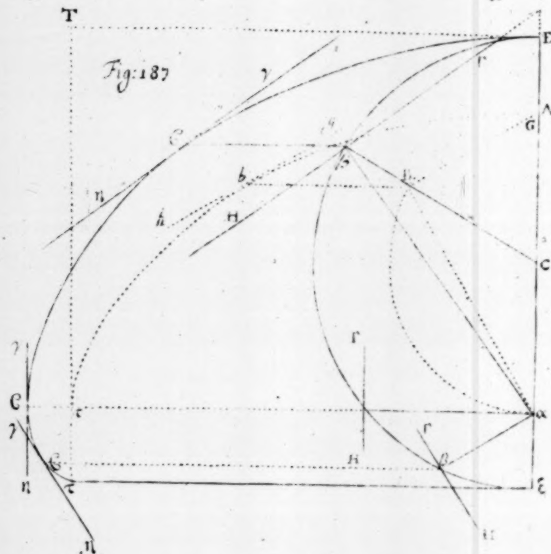
Fig: 176

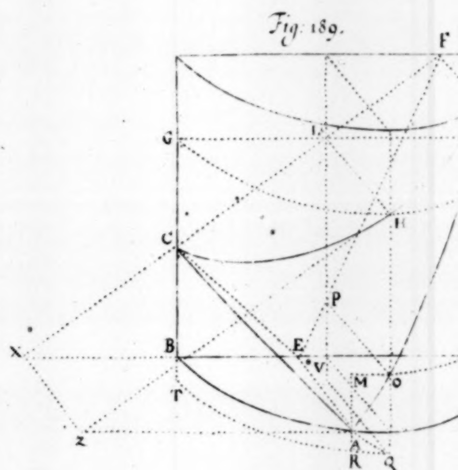
Fig: 182

5


Fig: 183


Fig: 184.


Fig: 187


Fig: 189.

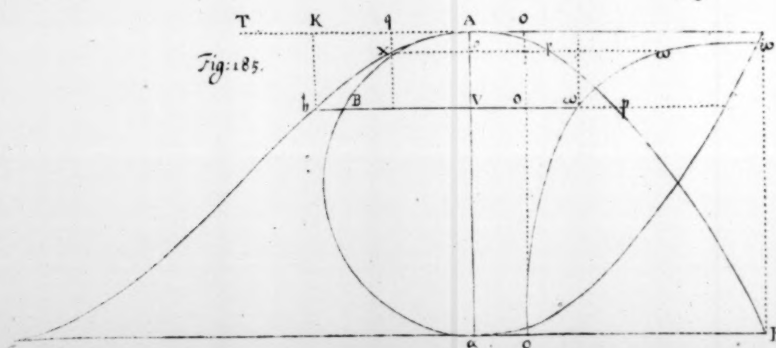

Fig: 185.

Fig. 191.

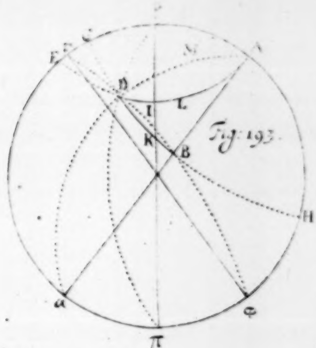


Fig. 190.

Fig. 188.

Fig. 186

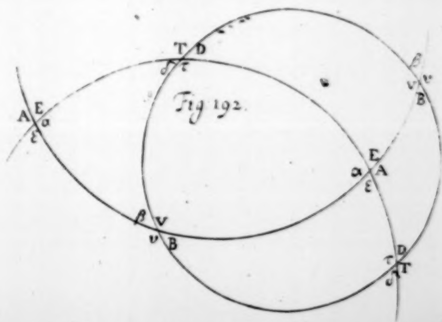
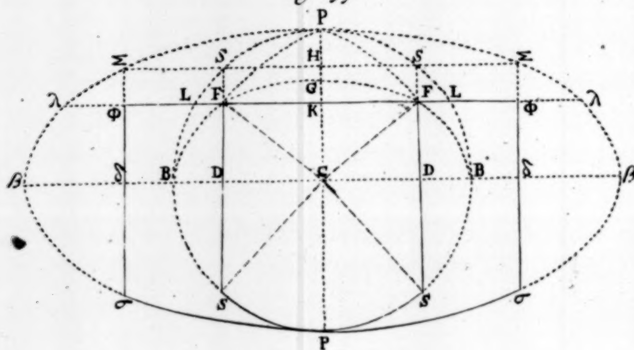


Fig 194



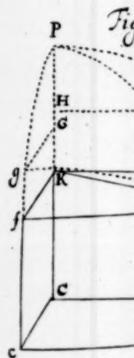


Fig: 195

Fig: 196.

Fig: 200.

Fig: 197.

Fig: 199.

Fig: 198.

7

Fig: 201.

Fig: 203.

Fig: 2

Fig: 202

Fig: 204

Fig: 206.

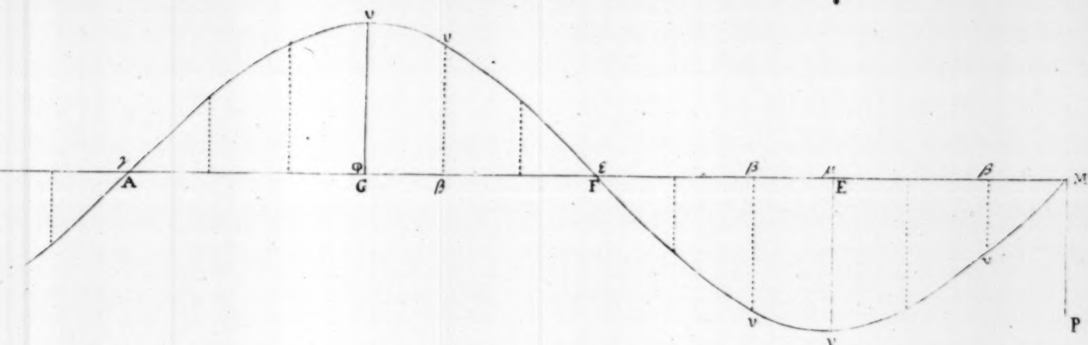


Fig: 205.

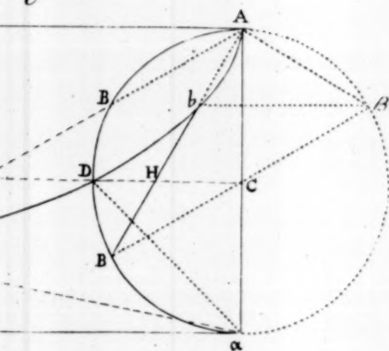


Fig: 207.

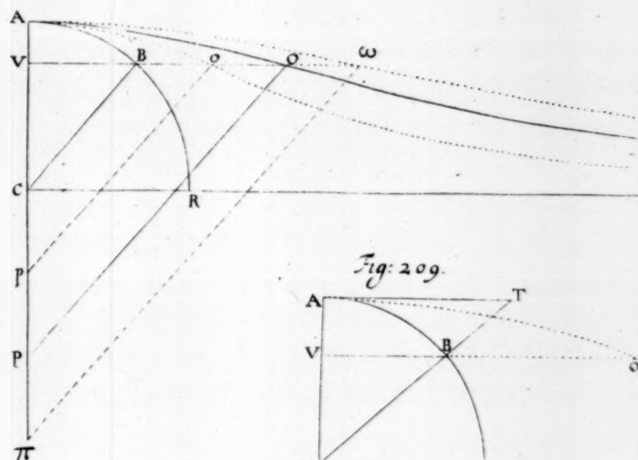


Fig: 209.

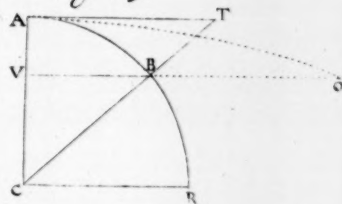
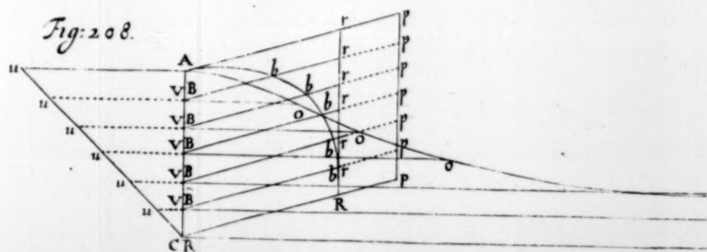
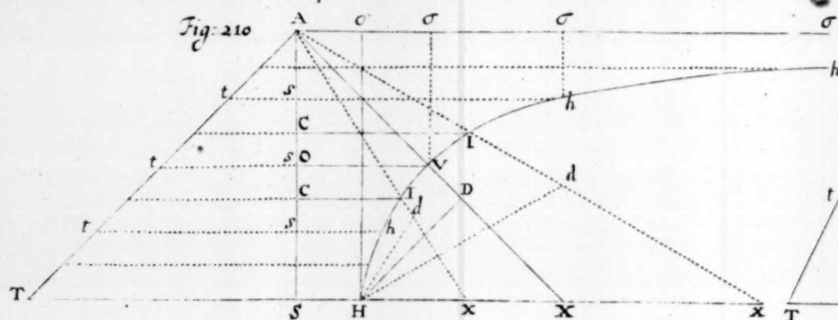
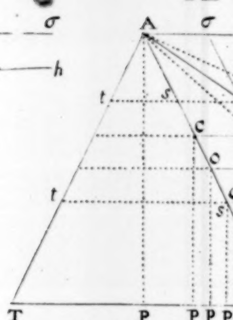


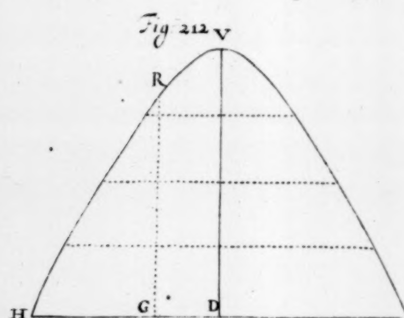
Fig: 208.

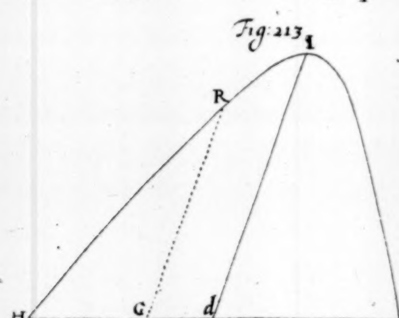


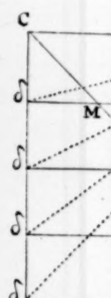
8

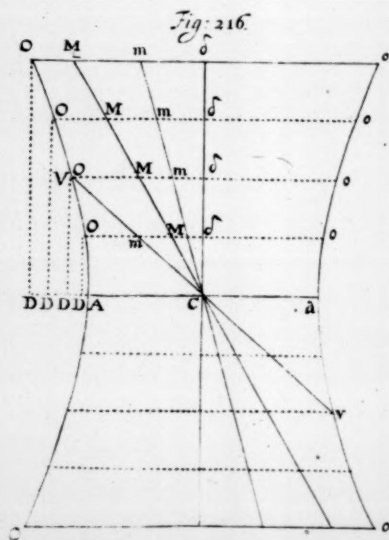

Fig: 210

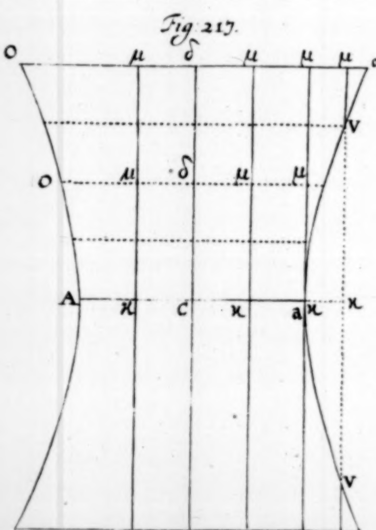



Fig: 212


Fig: 213




Fig: 216.


Fig: 217.

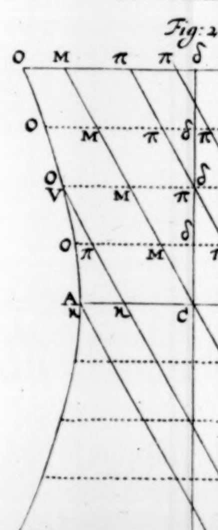


Fig. 211

Fig: 215.

Fig: 214.

Fig: 218.

Fig: 219.

Fig: 220

9

recta

Cum

radiu

Sinib
& fi
tur (

appl

ticè
erit ,
mod
N
ptota
dicta
Et
(ut f
ipsis
vior
CT,
Axis
prop
occur
ratio
Secar
Nec
nusqu
C bis
lum
occur
Contr
lam :
A) e
Si
micir
verso
Sin
Hype
symp

rectæ $\frac{R^2}{x}$ ſunt hæ Secantes.) Eſtque obvium & demonſtratu facile. Cum enim ſit, in fig. 327. Ut ſinus complementi CV$=x$, ad radium CB$=R$; ſic radius CA$=R$, ad ſecantem CT$=\frac{R^2}{x}$: Sumptis Sinibus complementi CV$=x$ arithmeticè proportionalibus (adeóque & ſinibus verſis AV$=v$ arithmeticè item proportionalibus;) ſi ponantur (fig. 325, 326.) rectis C B T ſecantibus, æquales ordinatim-applicatæ V B O; (quæ itaque erunt totidem $\frac{R^2}{x}$, ipſis x arithmeticè proportionalibus reciprocæ, *Figuram Secantium* complentes;) erit, eadem Figura Secantium, ſpatium illud Hyperbolicum, (per modo dicta;) utpote Figura ex Primanorum Reciprocis conflata. Fig. 325, 326.

Nempe, ut C A H O M: Ubi hyperbolæ Centrum, C, Aſymptotæ C M, & C A, Vertex, H. (Quæ autem de C, A, H, O, M, dicta ſunt; pariter intelligantur de κ, α, η, o, μ.)

Et quidem, ſi ſumatur A H, æqualis ſemidiametro Circuli C A, (ut fig. 325, 326.) ordinatim ad Aſymptotam applicatæ V O ſunt ipſis ſecantibus C T æquales; eritque H Vertex Axis. Si verò brevior ſit A H quàm A C, in eâdem ratione breviores erunt V O, quàm CT, reſpectivæ Secantes ad Radium C A: neque erit H vertex Axis, ſed alterius alicujus diametri; Axis autem vertex ſitus erit propiùs ad Aſymptotam, (nempe ubi recta biſecans angulum C, occurrit curvæ.) Sin longior ſit A H quàm A C, etiam in eâdem ratione longiores erunt V O quàm C T; (utrobique ſcilicet æquales Secantibus ad Radium A H, ſive longior ſit ſive brevior quàm A C:) Nec erit H vertex Axis ſed alterius diametri, Vertex autem Axis nuſquam comparet, quippe qui ibi futurus eſſet ubi recta angulum C biſecans occurreret curvæ ultra H productæ. Quippe recta Angulum C biſecans, in figurâ *Primariâ*, (ubi A H ipſi A C æqualis,) occurrit rectæ A H, in H: Secùs autem in *Secundariis:* Nempe, In *Contractâ*, (ubi A H brevior quam A C,) ultra H, intra Hyperbolam: In *Protractâ*, (ubi A H longior quàm A C, citra H (inter H & A) extra Hyperbolam.

Si verò Duo Circuli Quadrantes componantur, (ut fig. 325.) ſemicirculum abſolventes; erunt duæ Hyperbolæ H O O, $\eta o o$, ſitu inverſo poſitæ communem habentes Aſymptotam C M, ut & A C α: Sin quadrantes duo inverſis verticibus componantur, (ut fig. 326.) Hyperbolæ duæ, H O O, H $o o$, communem verticem H habentes, Aſymptotas habebunt oppoſitas C M, $\kappa\mu$, communem verò C A κ.

Duæ autem Hyperbolæ, H O O, H $o\,o$, sic compositæ; utut similes sint, & quidem quamvis (ut in *Primariâ*, fig. 325.) communem habeant Axis Verticem H; non tamen eandem continuant Curvam hyperbolicam: sed Angulum in H faciunt (productæque, se mutuò secabunt,) Rectum quidem in *Primariâ*; Acutum, in *Protractâ*; Obtusum, in *Contractâ*; magisque vel Acutum vel Obtusum, quo magis vel Protracta vel Contracta fuerit: adeò ut, in valde contractis, fere videantur unam facere continuam curvam.

Ponuntur enim (fig. 326.) H O O, H $o\,o$, semihyperbolæ, situ distorto; propter diremta puncta C, κ; (quæ, ut O H o foret una Hyperbola, idem essent punctum, nempe commune centrum semihyperbolarum H O O, H $o\,o$;) convergentibus punctis M, μ; adeóque &, O, o. Neque est A H utriusvis vel Axis vel Diametrorum ulla: utpote quæ per C transire debent omnes quæ spectant H O O; & per κ, quæ H $o\,o$ spectant.

Si verò, in figurâ *Primariâ*, (propter H verticem Axis,) manente communi puncto H, divaricari intelligantur curvæ O o; simúlque Asymptotæ in M, μ, donec in unum coeant K, κ, puncta; evanescet angulus ad H, fiétque o H O una Hyperbola. Sed non item in *Secundariis*, (in quibus H non est vertex Axis:) Possunt quidem, etiam in his, manente H puncto, ita divaricari curvæ in O o, ut, evanescente angulo ad H, coeant in unam curvam, at non in unam *Hyperbolam* (sed duarum portiones.) Manifestum enim est (ex constructione) hyperbolas H O O & H $o\,o$ omnino similes esse & congruentes: fieri autem non potest in ullo hyperbolæ puncto, præter ipsum Axis Verticem, ut curvæ utrinque adjacentes congruant.

9. Verùm hic cavendum est ne existimetur O H O fig. 326. eadem Fig. 186. curva cum $\omega\,\omega\,\omega$ fig. 186. Quanquam enim A α O $\omega\,\omega$ sit etiam figura Secantium, (sed Contracta, propter A O minorem quam A C,) ut § B. prop. 17. insinuatum est: Sunt tamen illæ (non, ut hic, Secantes sinibus versis, seu complementorum rectis, sed) Sinibus Rectis, arithmetice proportionalibus respondentes. Sunt enim illic rectæ $V\omega = \frac{BR}{s}$ (sinibus rectis $s = VB$, arcuum A B, reciprocæ;) hic verò, $VO = \frac{R^2}{x}$, ipsis $x = VC$ sinibus complementorum B D reciprocæ. Hoc est; Sumptis A V arithmetice proportionalibus; spatium complentes rectæ V O fig. 326. sunt arcuum A B secantibus Fig. 327. C T fig. 327. proportionales; sed $V\omega$ fig. 186. proportionales complementorum B D secantibus C τ.

10. Cúmque

10. Cúmque sint $s = \sqrt{:R^2 - x^2}$. Si sumantur x=CV (adeóque & v = AV) arithmeticè proportionales; erunt omnes s, ut rectarum in parabolâ, axi parallelarum radices quadraticæ, seu in ipsarum ratione subduplicatâ; putà quæ sint in rectarum V β fig. 164. semiparabolam complentium ratione subduplicatâ; (cùm enim rectæ $\beta\delta$ complentes semiparabolæ complementum sint ut x^2, quadrata primanorum; erunt harum continuationes V β, axi parallelæ, ut $R^2 - x^2$; sumpto Axe ut R^2:) quæque ex istiusmodi radicum reciprocis conflatur figura, est ipsa CAOω fig. 186. Omnésque s^2, sunt ut ipsæ rectæ axi Parabolæ parallelæ. Puta, ut ipsæ Vβ fig. 164. (ut pr. 112. *Arithm. Infin.* & § V. pr. 15. hujus Cap. 5. ostenditur:) atque harum reciprocæ, $\frac{R^4}{s^2}$, sunt ut rectarum Vω (fig. 186.) $\frac{BR}{s}$ vel $\frac{R^2}{s}$ quadrata, seu ut earum momenta respectu Aα, aut circuli earundem conversione circa Aα facti. Rectarum verò VO=$\frac{R^2}{x}$ fig. 326. (spatium hyperbolicum complentium) quadrata seu momenta, ut $\frac{R^4}{x^2}$, sunt ut ipsarum $\beta\delta$ (fig. 164.) rectarum reciprocæ. Quæ autem sunt ipsis β b fig. 164. vel V p fig. 178. ordinatim-applicatis in parabolâ reciprocæ, sunt ut Vω figuram AαOω (fig. 178.) complentes, curvæ Cycloidalis particulis (continuè sumptis) proportionales; spatiique (quod illæ complent rectæ) AαOω portiones, proportionales respectivis Curvæ Cycloidalis partibus quas illæ complent particulæ: ut § B, C. prop. 22. ostensum est. Sed rectæ Vω fig. 186. sunt peripheriæ circularis particulis (continuè sumptis) proportionales; spatiique quod illæ complent rectæ, proportionales respectivis peripheriæ partibus quas illæ complent particulæ: ut § B. prop. 17. ostensum est.

Multáque alia adjungi posset, nisi sic nimius essem.

PROP. II.

De Cissoide, addi possunt supra traditis hæc quæ sequuntur.

NEmpe, in Parte hujus Operis secundâ, Cap. XXIX. (ubi de Cissoide agitur,) ad finem, (pag. 533. lin. 20.) hæc subjungantur.

Fig. 205. Sed & sic potest construi eadem Curva.

Ductâ rectâ $\alpha\beta$T, quæ tangenti TAT occurrat in T; erit ubique βb = AT. Est enim αV . Vβ :: VA . Vb :: αA = αV + VA . AT = Vβ + Vb = βb.

Demonstratio D. Hugenii.

Quòd autem *Spatia Cissoidalia* bαA, bαb, b$\alpha\tau$, *&c. sint tripla respectivorum in Semicirculo* αBα, BαB, BαA, &c. & sic ubique. Demonstrationem Clar. *Hugenii* ingeniosam, (quam ab ipso, post impressam partem secundam, accepi nuper,) libet hic adjungere, ne pereat: cui subjungam meam.

Erat autem D. *Hugenii* Demonstratio ad hunc sensum; (verbis nonnihil, ipso insinuante, mutatis;) quàm potui proximè ad mentem suam descripta.

Fig. 328, 329. "Sit ACB, semicirculus, (cui Centrum Z, tangens BF) & "AVPE Cissoides Dioclis inde genita: Cujus hæc proprietas, ut "sit ubique AC = EF. Atque eidem Semicirculo (seorsum transcripto, quò vitetur linearum confusio,) circumponatur ABS circuli Quadrans (Centro A radio AB descriptus;) cui AC producta occurrat in K.

"Dico, *Spatium* AVPEFB *æquari Triplo segmento* CBT "*unà cum Triangulo* ACB: Hoc est, Sectori AKB una cum Spatio "CTBK. Est enim Segm. CBT = Spat. CTBK. Nam (junctâ CZ) erit Ang. CZB = 2 Ang. CAB. Adeóque Sect. "ZCB = ½ Sect. AKB. Ergo Sect. ZCB = Triang. ACZ + "Spat. CTBK. Auferantur æqualia, hinc Triang. ACZ, inde Triang. ZCB: Fit, Spat. CTBK = Segm. CBT.

"Ostendendum ergo, quod Spat. AVPEFB = Sect. AKB + "Spat. CTBK.

"Præ-

"(Præsumitur autem, tanquam facile demonstratu, per notas "exhaustionum methodos, *Sectori* AKB *Inscribi posse & circum-* "*scribi figuram Dentatam, ita ut altera alteram excedat spatio minore* "*quolibet dato: Et similiter, Spatio Cissoidali* AVPEFB.)

"Si dicatur Cissoidis Spatium AVPEFB, minus esse quàm "Sect. AKB + Spat. CTBK: Sit horum excessus Ω. Et inscri-"batur sectori AKB figura ordinatè, ut duplum omnium Trilineo-"rum KND sit minùs quàm Ω. Et Cissoidis Spatio AVPEFB, "figura inscribatur ex totidem trapeziis. Ostendetur Trapezium "EFGQ = Triang. AKN + Trapez. CN. Est enim Trapez. "EG ad Triang. ACL, ut FG + EQ ad CL, (quia eandem ha-"bent altitudinem;) Hoc est, ut FA + AE ad AC; Hoc est, ut "AF + FC ad AC; Hoc est, (demissâ perpendiculari CR) ut "AB + BR ad RA. Ergo, componendo, Trapez EG + Triang. "ACL ad Triang ACL, ut 2 AB ad AR; Hoc est, ut 2 Qua-"drat. AB ad Quadrat. AC; Hoc est, ut 2 Qu. AK ad Qu. AC; "Hoc est, 2 Triang. AKN ad Triang. ACL. Ergo, Trapez. EG "+ Triang. ACL = 2 Triang. AKN. Et, ablato utrinque Tri-"ang. ACL, manet Triang. AKN + Trapez. CN = Trapez. "EG. Et similiter de cæteris. Ergo, figura in Sectore Inscripta + "Omn. Trapez. CN, = Figuræ spatio Cissoidis Inscriptæ. Sed fi-"gura in Sectore assumens omnia KND, item Trapezia CN assu-"mentia omnia KND, ista inquam omnia simul sumpta superant "Sectorem AKB + Spat. CTBK. Ergo, figura in Sectore + "trapeziis CN (hoc est, figura in Cissoide,) assumens spatium Ω, "longe superabit Sectorem AKB + spat. CTBK. Sed ipsum Cis-"soidis spatium AVPEFB + Ω æquatur ex hypothesi Sectori "AKB + spat. CTBK. Ergo figura in Cissoide ipso Cissoidis "spatio major erit. Quod est absurdum.

"Dicatur jam Spatium idem AVPEFB, majus Sectore AKB "+ Spat. CTBK. Sitque excessus Ω. Et circumscribatur Sectori "figura, ut omnia KND bis sumpta sint minora excessu Ω. Et "Cissoidis spatio, figura ex totidem Trapeziis; (nisi quòd, pro ultimo "Trapezio, habeatur in Cissoide Triangulum AHB = Triang. "AHB in Sectore.) Ostendetur, ut supra, Trapez. PQFG = "Triang. ADN + Trapez. LD. Ergo, tota figura circumscripta "Cissoidi, æqualis circumscriptæ Sectori + omnibus Trapeziis LD. "Sed ab his si demantur bis omnia Trilinea KDN, residuum minus "erit quàm Sector AKB + spat. CTBK. (Nam primùm au'e-"rendo omnia KDN, à figurâ circumscriptâ Sectori, relinquitur

Fig. 330, 331.

"Sector

" Sector A K B: At eadem K D N auferendo à Trapeziis L D, residua " omnia simul minora sunt spatio C T B K: Quin additis rursus spatiis " L I C, omnia simul æquantur demum spatio C T B K) Ergo, " Si ab his ipsis, à figurâ nimirum circa Sectorem + Trapeziis L D; " Hoc est, à figurâ Spatio Cissoidis circumscriptâ; Auferatur Ω: Re- " liquum multò minus erit Sectore A K B + spat. C T B K. Sed " spatium ipsum Cissoidis dempto Ω æquale dicebatur his ipsis. Ergo " Cissoidis spatium majus erit figurâ sibi circumscriptâ. Quod est ab- " surdum.

" Hoc itaque demonstrato, Quòd Spat. A V P E F B = 3 Segm. " C B T + Triang. A C B: facilè ostendetur, Quòd *Spatium infi-* " *nitum* A V P E Y F B = 3 *Semicirc.* A C B.

" Item, *Quòd Spatium* A V P E B = 3 *Segment.* C B T.

Atque hactenus Demonstratio D. *Hugenii*. Aliam se dicit ad D. *Slusium* olim misisse, (quam non vidi,) sed cui hanc præfert.

Idem aliter.

Huic D. *Hugenii* demonstrationi, libet etiam meam subjungere, (*Hu- genianæ* consulto accommodatam,) ad eandem fere formam quâ suprà in Cycloide usus sum; retentis item eisdem Symbolis. Nempe;

Fig. 169, 174, 332. Intelligatur (ut, in Cycloide, §. C, H. prop. 20. & alibi,) Semi- circuli Genitoris peripheria A D α, in punctis X, B, D, &c. in partes quotlibet æquales dividi; putà, X B, B D, vel X B D, &c. Quibus re- spondeant Sectores X α B, B α D, vel X α D, &c. semicirculum com- plentes: Seu (quod in partibus infinitè exiguis tantundem valet) Triangula figuram Inscriptam complentia, quorum unum sit B α P; vel complentia figuram Circumscriptam, quorum unum sit B α Y; vel denique (quod hic potissimùm sequemur) complentia figuram partim inscriptam partim circumscriptam, quorum unum sit P α Y.

Quibus respondeant Triangula (situ contrario) ad Circulum, B A P, B A Y, P A V; ad Cissoidem, b A p, b A y, p A y; ad Tangen- tem, β A π, β A υ, π A υ; & (Triangulorum ad Cissoidem, & ad Tangentem, differentiæ) Trapezia b β π p, b β υ y, p π υ y. Quæ quidem (figuras partim inscriptas partim circumscriptas spectantia) P α Y, P A Y, p A y, π A υ, p π υ y, repræsentent axes sui α B, A B, A b, A β, b β. Quanquam enim, in sectione definitâ, major sit B Y quàm B P, adeóque b y quàm b p, & β υ quàm β π; neque rectæ A X, α D, in eodem Y puncto præcisè coeant; aut rectæ α X, A D, in eodem præcisè puncto P: sectione tamen in infinitum continuatâ, differentiæ illæ evanescunt; adeóque hic pro nullis habendæ, ipsáque

recta

recta PB = BX arcui, & BY = BD, & PBY = XBD. Ut, ex supra traditis de Cycloide, liquet.

His ita constructis; Ponamus Triangulorum P α Y, PAY, (seu α F, AB,) basin PBY $= B$; Adeóque (propter hujus altitudinem AV $= v$,) erit Triangulum PAY, seu AB, $= \frac{1}{2}vB$. Sed (propter similia triangula) ut recta AB, ad Ab, & ad Aβ; hoc est, ut AV $= v$, ad AΣ = αV $= h$, & ad A$\alpha = 2R$; sic est PY $= B$, ad $\frac{hB}{v} =$ py, & ad $\frac{2RB}{v} = \pi v$. Adeóque (propter altitudinem, illic A$\Sigma = h$, hic A$\alpha = 2R$,) erit Triangulum Apy, seu Ab, $= \frac{h^2 B}{2v}$; & Aπv, seu Aβ, $= \frac{4R^2 B}{2v}$; & (horum differentia) Trapezium py$v\pi$, seu bβ, $= \frac{4R^2 - h^2}{2v} B$; hoc est (propter $h = 2R - v$, adeóque $h^2 = 4R^2 - 4vR + v^2$, & $4R^2 - h^2 = 4vR - v^2$,) $\frac{4R - v}{2} B$. Et sic ubique.

Ut igitur, Omnia AB Triangula, hoc est *Omn.* $\frac{1}{2}vB$, (sumptis arcubus α arithmeticè proportionalibus usque ad a maximum seu arcum AB, quorum communis differentia B,) complentia vel totum Semicirculum ADα, vel illius Segmentum ABA, vel Sectorem BAα; ad Omnia py$v\pi$, hoc est *Omn.* $\frac{4R - v}{2} B$, complentia vel totum spatium Cissoidale interminatum Q b b A $\alpha\tau$, vel ipsius partem (item interminatam) b$\beta\tau$Q arcum AB spectantem, vel partem reliquam A b b$\beta\alpha$ arcum Bα spectantem, (nam de toto & de partibus perinde valet demonstratio;) vel (propter omnes $\frac{1}{2}B$ invicem æquales) ut *Omn.* v, ad *Omn.* $4R - v$, eò spectantia; sic spatia illa *Circularia*, ad respectiva *Cissoidalia*.

Sunt autem (sumptis, ut dictum est, a arithmeticè proportionalibus) *Omnes* v arcum AB spectantes, (hoc est, AbK fig. 170.) $= eR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4aR$. Adeoque Segmentum ABA, ad correspondens spatium Cissoidale b$\beta\tau$Q, ut eR ad $4aR - eR$, hoc est, ut e ad $4a - e$, vel (propter $e = a - s$) ut $a - s$ ad ($4a - a + s =$) $3a + s$. Est autem Segmentum ABA, $= \frac{1}{2}eR = \frac{1}{2}aR - \frac{1}{2}sR$ (per § G. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale b$\beta\tau$Q, $= \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Et, additis Triangulis, illic αBA, hic αbβ, (invicem

cem æqualibus, propter æquales bases A B, b β, & altitudinem eandem,) quorum utrumvis $= sR$; fiet Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$, & Spatium Cissoidale α b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, Sectoris Triplum.

Similiter; *Omnes v* arcum B α spectantes, (hoc est K b τ T fig. 170.) $= \frac{1}{2}PR - eR = \frac{1}{2}PR - aR + sR = \alpha R + sR$ (per § B. prop. 17.) & *Omnes* $4R$, $= 4\alpha R$. Adeóque Sector B A α, ad correspondens Spatium Cissoidale A b b β α, ut $\alpha R + sR$ ad ($4\alpha R - \alpha R - sR =$) $3\alpha R - sR$, hoc est, ut $\alpha + s$ ad $3\alpha - s$. Est autem Sector B A α $= \frac{1}{2}\alpha R + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) Ergo, Spatium Cissoidale Abb$\beta\alpha$ $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Et, sublatis æqualibus Triangulis, (illic α B A, hic α b β,) $= sR$; fiet Segmentum α B α $= \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$, & spatium Cissoidale α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$, segmenti Triplum.

Totum autem, quod A D α semicirculum spectat, Spatium Cissoidale A b b Q τ α, utrovis modo consequemur, propter evanescentia Triangula α B A, α b β; seu $sR = 0$.

Eadem non multò aliter consequemur, ope Triangulorum P α Y. Nam, ut (Omnia Triangula P α Y arcum A B spectantia, hoc est) *Omnia* $\frac{1}{2}hB$, ad (omnia respectiva Trapezia p y υ π, hoc est) *Omnia* $\frac{4R - v}{2}B$; seu ut *Omn. h.* ad *Omn.* ($4R - v =$) $2R + h$; sic Sector (quem illa complent Triangula) B α A, ad Spatium (quod ea complent Trapezia) β b Q τ. Sunt autem *Omn. h*, eo spectantia, (hoc est, A b β α fig. 170.) $aR + sR$ (per §. B. prop. 17.) adeóque *Omn.* $2R + h$ respectiva, $2aR + aR + sR = 3aR + sR$. Ergo, ut $aR + sR$ ad $3aR + sR$; seu ut $a + s$ ad $3a + s$; sic Sector B α A $= \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}sR$ (per § H. prop. 15.) ad Spatium β b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{1}{2}sR$. Si huic itaque addatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; fiet totum spatium α b Q τ $= \frac{3}{2}aR + \frac{3}{2}sR$, Triplum Sectoris B α A.

Item, ut *Omn.* (Triang. P α Y, seu) $\frac{1}{2}hB$ arcum B α spectantia, ad *Omn.* (Trapez. p y υ π, seu) $\frac{4R - v}{2}B$ respectiva; seu *Omn. h* ad *Omn.* ($4R - v =$) $2R + h$ eò spectantia; sic Segmentum (quod illa complent) α B α, ad Spatium (quod hæc complent) β b b A α. Sunt autem *Omn. h* arcum B α spectantes (hoc est, b β τ fig. 170.) $\alpha R - sR$ (per § B. prop. 17.) adeóque *Omn.* $2R + h$ respectiva, $3\alpha R - sR$. Ergo, ut $\alpha R - sR$ ad $3\alpha R - sR$; seu ut $\alpha - s$ ad $3\alpha - s$; sic Segmentum α B α $= \frac{1}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$ (per §. G. prop. 15.) ad Spatium β b b A α $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{1}{2}sR$. Unde si auferatur Triangulum β b α $=$ α B A $= sR$; relinquitur Spatium α b b A $= \frac{3}{2}\alpha R - \frac{3}{2}sR$; Triplum Segmenti α B α.

Hinc

Hinc facilis eſſet ad Momenta, & Centra gravitatis (ubi habentur,) Solidáque converſione facta, & horum item (ubi habentur) Centra Gravitatis, tranſitus; per methodos ſuprà ſæpiùs adhibitas.

PROP. III.

Inflatâ Veſicâ pondus elevare.

EXperimentum hoc primùm vidi *Oxoniæ* inſtitutum Anno (ſi rectè memini) 1651. (ſaltem non anno integro ſeriùs citiúſve) in Conventu ſtudioſorum qui tunc temporis ibidem convenire ſolebamus ſtato die ſingulis ſeptimanis, ad ſtudia communicanda, inſtituenda experimenta, & rem philoſophicam promovendam. Verùm non tum primùm inventum erat, ſed (ut res jam ante cognita) repetitum. Idemque poſt id tempus in Societate Regiâ *Londini* repetitum fuit. Sic autem inſtituitur.

Sit B veſica; cujus cervix N pegmati ſeu fulcro alicui firmo figatur; ita tamen ut per calamum ſeu fiſtulam Q inflari poſſit: fundóque affigatur pondus P. Experimento compertum eſt, flatu ſpiritûs humani, inflatâ veſicâ, adeóque lateribus diſtentis & longitudine contractâ, pondus librarum 50, 60, 70, aut etiam plurium (pro viribus pulmonum flantis) notabiliter elevari poſſe. Fig. 333.

Id autem ne incredibile videatur; conſiderandum primò erit; vim ſpiritus humani, præſertim ubi ſummo niſu intenditur, non ita exiguam eſſe ut quis primâ vice exiſtimet. Quod manifeſtum erit ſi conſideremus, ad quantam diſtantiam, & quàm celeri fortique motu, globulus argillaceus flando expelli ſoleat ex Tubo oblongo, quali in occidendis avibus utuntur, etiam ad diſtantiam non exiguam.

Conſiderandum porro erit, (quod hic præſertim ſpectamus,) quàm accommodè ad motum hunc præſtandum adhibetur vis illa; quippe non niſi magnâ ſpiritûs inflantis copiâ in veſicam immiſsâ pondus ad exiguam altitudinem elevatur.

In hunc finem conſideranda erit Veſica Bubula, utut irregularis ſit figuræ, ad Sphæroidem tamen proximè accedens, Ellipſeos M N O P circa longiorem Axem N P converſione factam; cujus quidem Ellipſeos Perimeter ſi eadem intelligatur vel ſibi ſemper æqualis, Ellipſeos Species continuè mutabitur prout veſica plus inflatur; auctâ ſolidâ capacitate, propter auctum axem breviorem M O, dum longior N P

contrahitur; ſphæroide factâ latiore, ſed breviore, atque ad ſphæram magis accedente. Quod cùm fieri non poſſit retractâ cervice, ut quæ intelligitur ſtabili fulcro firmiter alligari, fit elevato Pondere: Cujus elevatio itaque tanta erit quanta eſt longitudinis N P contractio.

Fig. 334. Hanc autem longitudinis contractionem, adeóque elevationem ponderis, quò aliquatenus æſtimemus; ſepoſitâ aliquantiſper Ellipſi, ſubſtituamus Rhombum M N O P; adeóque, pro Sphæroide, Rhombum Solidum; intellige, Solidum converſione Rhombi circa longiorem axem N P factum; adeóque ex duobus conis ſimilibus & æqualibus compoſitum, quorum communis baſis ſit M O circulus, & vertices N, P. Non quòd hæc figura propiùs ad Veſicæ formam accedat; ſed quòd ad calculum ſit accommodatior, nec ita ab veſicæ formâ recedat quin præſenti negotio ſatis ſit accommoda; non enim propter peculiarem veſicæ formam res ita miranda videtur, ſed propter pondus tantum tantillâ vi elevatum.

Rectam N P (Rhombi diagonalem longiorem) appello *Solidi Altitudinem*: quæ quoniam pro variâ poſitione varia eſt, *poſitionem primam* eam ſuppono quâ, nullâ adhuc inflatione factâ, lineæ NMP, N O P, in rectas extenduntur, adeóque cum N P rectâ coincidunt; quo caſu N P recta æqualis erit duobus Rhombi lateribus; putà N O, O P, vel N M, M P. Diſtantiámque punctorum N, P, in hac poſitione primâ appello *Primam Altitudinem*.

Calamus ſeu Fiſtula Q (per quam fit inflatio) intelligatur Cylindricè excavari, Cavique diameter ponatur, verbi gratia, $\frac{1}{100}$ (pars Centeſima) Primæ Altitudinis.

Vim Flatûs (quo aer in veſicam impellitur) quaſi æqualem reputo vi Muſculorum pectus comprimentium, adeóque aerem ex pectore in veſicam impellentium. Utut enim Flatus humanus in libero aere imbellis videatur, eò quod quam primum ſpiritus ex ore in aerem tranſeat undiquaque expandatur: quum tamen per fiſtulam impellitur, cujus lateribus cohibetur ne diffluat, vis ejus in Fiſtulam eadem quaſi eſt quâ ex Pectore detrudebatur. Dico tamen *quaſi eadem* potius quam *eadem præcisè*; quoniam non negaverim quin virium aliquid pectus comprimentium impendi potuerit in comprimendo expulſo aere, reliquúmque tantùm in expellendo.

Vim Flatûs hanc (ſive major fuerit ſive minor) ponamus æquipollentem preſſui ponderis in S (cavi Summo) incumbentis, ſubjectum aerem in Fiſtulæ ſpatiis 1, 2, 3, 4, &c. deprimentis, adeóque impellentis in Veſicam; unde Veſicæ lateribus diſtentis, capacitas augetur,

pro

pro ratione ingeſti aeris; ſeu pro ratione deſcenſus ponderis S. Nam dum pondus S per ſpatia 1, 2, 3, 4, &c. deſcendit (quæ ſunt in Cylindro altitudinibus proportionalia) tantundem aeris in veſicam intruditur quantum illis ſpatiis continebatur, atque tantundem augetur veſicæ capacitas.

Quoniam verò negandum non eſt, quin aer, propter elaterem quem habet, compreſſionis capax ſit; adeóque veſicæ extenſio minor aliquantò ſit quàm ſpatium quod S deſcendens occupat, (virium parte aliquâ in comprimendo aere impensâ, reliquâque tantùm in extendendâ veſicâ:) Deſcenſum ponderis S, utut reverâ aliquantò major ſit, tantum jam reputabimus quanta eſt illa Veſicæ extenſio; hoc eſt, quantum oporteret deſcendere propter illam extenſionem ſi aer non eſſet capax compreſſionis. Quod tamen facio potiùs ne ſit objectioni color aliquis, quàm quòd ſit præſenti inſtituto neceſſarium. Nam (præterquam quòd Calculo ſummè exquiſito hìc opus non ſit,) quicquid id ſit, non tam Quantitatem ſpectat quàm Celeritatem aſcensûs ponderis P.

His ita Calculo præſtructis; Altitudinem Primam N P, hoc eſt N M + M P in quolibet Rhombo, ponamus $= n$; adeóque N M $= \frac{1}{2} n$. Item N P pro particulari aliquo Rhombo, $= a$; adeóque N R $= \frac{1}{2} a$. Erit itaque in Rhombo illo MR $= \sqrt{:}$ NMq — NRq: $= \sqrt{:} \frac{1}{4} n^2 - \frac{1}{4} a^2 : = \frac{1}{2} \sqrt{:} n^2 - a^2$: Adeóque MO $= \sqrt{:} n^2 - a^2$: cujus quadratum M O q $= n^2 - a^2$ in N R $= \frac{1}{2} a$ ductum, exhibet $\frac{1}{2} n^2 a - \frac{1}{2} a^3$ æquale Parallelepipedo circumſcripto Cono N M O; hujúſque duplum $n^2 a - a^3$ æquale Parallelepipedo quod toti ſolido Rhombo M N O P circumſcribatur; Cui parallelepipedo ſi intelligatur Cylindrus inſcribi, erit hic Triplus Rhombi ſolidi. Fig. 335.

Intelligantur porro, Cylindri Q N ſpatia 1, 2, 3, 4, &c. totidem eſſe Cylindros æque altos & ſuper æquales baſes: Et ponamus Baſis diametrum Q T $= u = \frac{1}{100} n$; atque altitudinem item T V $= u$, quæ in diametri baſis quadratum ducta, exhibet u^3 æqualem Parallelepipedo circumſcripto Cylindro Q V.

Eſt autem, ut Parallelepipedum ad Parallelepipedum, ſic inſcriptus Cylindrus ad inſcriptum Cylindrum (propter æquales altitudines & baſes proportionales:) Eſtq; (per priùs poſita) Cylindrus QV æqualis ſolido Rhombo qui fit deſcenſu ponderis S per ſpatium QV; hoc eſt, æqualis trienti Cylindri huic Rhombo circumſcripti: Ideóq; & Parallelepipedum circumſcriptum Cylindro illi, æquale trienti Parallelepipedi Cylindro huic circumſcripti. Sed, per modo oſtenſa, Parallelepipedum circumſcriptum Cylindro QV eſt u^3; & Parallelepipedum cir-

cumscriptum respectivo Rhombo solido MNOP, n^2a-a^3; cum itaque illud sit hujus trienti æquale, erit $u^3=\frac{1}{3}n^2a-\frac{1}{3}a^3$; adeóque $3u^3=n^2a-a^3$. Quæ quidem Æquatio respondet solido Rhombo facto ex descensu ponderis S per primum spatiorum 1, 2, 3, &c.

Et, consequenter; (cùm, propter illa spatia æqualia, æqualia etiam sint Rhomborum solidorum respectiva incrementa,) $6u^3=n^2a-a^3$ respondebit descensui per spatia duo; $9u^3=n^2a-a^3$ descensui per tria; & sic de cæteris. Hoc est, (posito $n=100$ & $u=1$)

Dum S descendit per spatia	Æquationes respectivæ erunt $n^2a-a^3=$	Vel, $10000\,a-a^3=$
1	$3u^3$	3.
2	$6u^3$	6.
3	$9u^3$	9.
4	$12u^3$	12.
5	$15u^3$	15.
6	$18u^3$	18.
7	$21u^3$	21.
8	$24u^3$	24.
&c.	&c.	&c.

Quibus æquationibus resolutis; propter cognitas quantitates n, u, reperietur quantitas a; hoc est, respectiva altitudo NP pro quolibet Rhombo: Et consequenter, quantum ea deficit ab altudine primâ; hoc est, quantum ascenderit interea pondus P supra primam ejus positionem.

Æquationes illæ sic resolutæ exhibebunt nobis subjectam Tabellam. In quâ Columna S numerat spatia per quæ descendisse supponitur vis seu pondus S. Æ exhibet respectivas æquationes his spatiis respondentes. A, respectivas altitudines NP pro illis descensibus. P, harum complementa ad altitudinem primam 100; hoc est, mensuram ascensuum ponderis P, descensibus illis respondentium. D, differentias complementorum continuè consequentium; hoc est, quantum ascenderit P propter descensum S per singula spatia 1, 2, 3, &c. respectiva. Nempe,

Dum

Dum S descendit per spatia. S	Æquationes correspondentes sunt, $10000a - a^3 =$ Æ	Adeóque respectivæ altitudines, $NP = a =$ A	Compl. ad 100. seu Elevat. Pond. supra Alt. primam. P	Complementorum differentiæ, seu elevatio P pro singulis spatis, D
149	447	99.977,642,503,	00.022,357,497,	
150	450	99.977,492,402,	00.022,507,598,	00.000,150,101,
199	597	99.970,136,624,	00.029,863,376,	
200	600	99.969,986,489,	00.030,013,511,	00.000,150,135,
299	897	99.955,119,789,	00.044,880,211,	
300	900	99.954,969,589,	00.045,030,411,	00.000,150,200,
399	1197	99.940,096,184,	00.059,903,816,	
400	1200	99.939,945,914,	00.060,054,086,	00.000,150,270,
499	1497	99.925,065,795,	00,074,934,205,	
500	1500	99.924,915,455,	00.075,084,545,	00.000,150,340,
999	2997	99.849,811,822,	00.150,188,178,	
1000	3000	99.849,661,143,	00.150,338,857,	00.000,150,679,
4999	14997	99.241,542,959,	00.758,457,041,	
5000	15000	99.241,389,480,	00.758,610,520,	00.000,153,479,
9999	29997	98.464,986,865,	01.535,013,135,	
10000	30000	98.464,829,682,	01.535,170,318,	00,000,157,183,
13595	40785	97.894,734,392,786,6	02.105,265,607,213,4	
13596	40788	97.894,574,393,555,3	02.105,425,606,444,7	00.000,159,999,231,3

Dum S deſcendit per ſpatia	Æquationes correſpondentes ſunt, $10000\,a - a^3 =$	Adeóque reſpectivæ altitudines, $NP = a =$	Quarum complementa ad 100 (altit. primam) ſeu Elevatio ponderis ſupra poſitionem primam,	Complementorum differentiæ, ſeu elevatio P pro ſingulis ſpatiis,
1	3	99.999,849,999,66	00.000,150,000,34	00.000,150,000,34
2	6	99.999,699,998,6	00.000,300,001,4	00.000,150,001,06
3	9	99.999,549,997,0	00.000,450,003,0	00.000,150,001,5
4	12	99.999,399,994,5	00.000,600,005,4	00.000,150,002,4
5	15	99.999,249,991,6	00.000,750,008,4	00.000,150,003,0
6	18	99.999,099,987,9	00.000,900,012,1	00.000,150,003,7
7	21	99.998,949,983,4	00.001,050,016,6	00.000,150,004,5
8	24	99.998,799,978,3	00.001,200,021,7	00.000,150,005,1
9	27	99.998,649,972,5	00.001,350,027,4	00.000,150,005,7
10	30	99.998,499,966,2	00.001,500,033,8	00.000,150,006,4
11	33	96.998,349,959,2	00.001,650,040,8	00.000,150,007,0
12	36	99.998,199,951,	00.001,800,049,	00.000, 50,008,
13	39	99.998,049,943,	00.001,950,057,	00.000,150,009,
14	42	99.997,899,933,	00.002,100,067,	00.000,150,010,
15	45	99.997,749,923,	00.002,250,077,	00.000,150,010,
16	48	99.997,599,913,	00.002,400,087,	00.000,150,010,
17	51	99.997,449,902,	00.002,550,098,	00.000,150,011,
18	54	99.997,299,890,	00.002,700,110,	00.000,150,012,
19	57	99.997,149,878,	00.002,850,122,	00.000,150,012,
20	60	99.996,999,865,	00.003,000,135,	00.000,150,013,
49	147	99.992,949,925	00.007,050,75	
50	150	99.992,799,22	00.007,200,78	00.000,150,03
99	297	99.985,146,69	00.014,853,31	
100	300	99.984,996,62	00.015,003,38	00.000,150,07

Patet ex hac Tabellâ, dum S per Spatium 1 deſcendit, vix plus aſſurgere P quàm $\frac{0.000,15}{1.000,00}$ iſtius altitudinis, (nempe tantillo plus, ut in decimalium fractionum loco inferiùs quarto ne quidem 1 habeatur, quod hîc meritò negligi poterit.) Adeóque, cum Deſcenſus S ſit ad Aſcenſum P, ut 100000 ad 15; ſi pondus ſeu vis flatus S ſit ad P pondus elevandum ſaltem ut 15 ad 100000, (hoc eſt, ut 3 ad 20000,) Vis Ponderi æquipollebit; ſi major, præpollebit, adeóque elevabit, ſaltem tantundem quantum Deſcenſui S per ſpatium 1 reſpondeat.

Sed & illa proportio tam parum variatur pro ſpatiis ſubſequentibus aliquammultis, ut donec S deſcendiſſe intelligatur ultra ſpatia 13596 (hoc eſt, donec per fiſtulam ingeſtum ſit in veſicam tantum aeris quantum impleat pluſquam 13596 ſpatia ipſi QV æqualia) non opus erit tantâ vi in S quæ ſit $\frac{0.00016}{1.00000}$ ponderis P, ſeu quæ ſit ad P ut 16 ad 100000, hoc eſt, ut 1 ad 6250. Adeóque, ſi Vis Flatûs S ſit ad pondus P ſaltem ut 16 ad 100000, ſeu 1 ad 6250: elevabitur P ſaltem tantundem quantum Deſcenſui S per ſpatia 13596 reſpondebit; hoc eſt (ut ex Tabellâ liquet) plus quam $\frac{2.1}{100.0}$ altitudinis primæ.

Cùm itaque non incongruum ſit ut Vis Flatûs humani accedat ſaltem ad $\frac{16}{100000}$ ſeu $\frac{1}{6250}$ Ponderis ſatis magni; non mirum videri debet, ut Flatu hoc Pondus illud attollatur; & quidem, ultra $\frac{21}{1000}$ altitudinis primæ, vel (paulò rotundiùs) pluſquam eſt $\frac{1}{50}$ (pars quinquageſima) ſemiperimetri $NM+MP$, quæ ſatis eſt notabilis. Quod oſtendendum erat.

Patet hinc etiam, ſi ponamus vel S augeri vel P diminui, adhuc altiùs elevatum iri P, eâdem veſicâ manente, eodémque fiſtulæ cavo.

Patet etiam, pro diminuto foramine fiſtulæ ſeu diametro ejus QT, diminui etiam proportionem S ad P neceſſariam ad pondus elevandum: Et quidem, ſi Mathematicè ſolummodo res conſideretur, ad proportionem quantumvis exiguam, ſeu ut datum pondus datâ vi ſic moveatur; Verùm, ſi ad praxin Phyſicam deveniatur, non expectandum eſt ut res ſuccedat; quoniam Aer per foramen valde exiguum non poteſt niſi magnâ vi protrudi etiamſi non contrà urgeret pondus P; ſed neque ad exiguum iſtiuſmodi foramen poteſt quis ita ſe accommodare ut totam flatûs potentiam eò exerat. Eſt itaque mediocris quædam

foraminis

foraminis magnitudo neceſſaria ad praxin hanc efficaciùs exercendam; quæ, cùm ex phyſicis circumſtantiis dependeat, experimento potiùs quam demonſtratione determinabitur. Sin Mathematicè tantùm rem ſpectemus, (ſeclufis hujuſmodi circumſtantiis;) auctio vel diminutio diametri foraminis, contrariâ vice minuit augétque vim flatûs, in duplicatâ ratione iſtius auctionis vel diminutionis diametri. Quod ex præmiſſis facilè probaretur, ſi res tanti eſſet.

Facile item oſtenſu eſt, Ad quantam altitudinem (pro dato foramine) data vis flatûs datum pondus elevare poſſet: Et, vice versâ, quanta vis (pro dato foramine) requiratur ut datum pondus ad datam altitudinem (poſſibilem) elevetur: Sed &, datis altitudine (poſſibili,) vi flatûs, & pondere, quantillum foramen eſſe debeat.

Dico, *altitudinem Poſſibilem:* quoniam non ad quantamvis altitudinem hæc fiet; ſed ſaltem ubi, ad maximam vaſis capacitatem perventum eſt (ut alias omittam circumſtantias Phyſicas) non ultrà flando extendetur. Ea autem eſt (datâ perimetro MNOP) in Rhombo ſolido (quo hactenus uſi ſumus) quando quadratum lateris NM, æquat tria quadrata ſemialtitudinis NR, (hoc eſt $NMq = 3 NRq$, vel $\frac{1}{4}n^2 = \frac{3}{4}a^2$:) in Sphæroide verò (cui propiùs accedit veſica) ubi ex Sphæroide fit Sphæra, factâ peripheriâ tranſversâ MO æquali perimetro expoſitæ MNOP.

Verum quoniam hæc a præſente propoſito aliena ſunt, demonſtrationes horum omitto; quas tamen fuſius olim, in ſcripto in Societate Regiâ *Londini* exhibito, Martii die 4. 1662. expoſui.

Sed redibimus tandem à Rhombo ſolido ad Sphæroidem. Quanquam Sphæroides ſit figura minùs ad calculum accommodata: Cùm tamen conſtet, Ellipſin Rhombo (ſi ritè comparentur) capaciorem eſſe; adeóque & Sphæroidem Rhombo ſolido; non dubitandum eſt quin, quod de Rhombo ſolido oſtendimus, de Sphæroide abundantiùs conſter. Cùm enim, poſitis utriuſque figuræ perimetris MNOP æqualibus, major ſit Sphæroidis Sphæraque capacitas quam Rhombi in reſpectivis poſitionibus; adeóque, quò extendantur, plus Aeris illic quàm hic ingerendum, quod majori deſcenſui S æquipollet; contrà verò major ſit hic quàm illic altitudinis contractio, adeóque aſcenſus P; (quæ ex figurarum naturâ ſatis conſtant:) Erit, propter majorem deſcenſûs ad aſcenſum rationem in Sphæroide (adeóque in Veſicâ) quàm in Rhombo rationem, facilior quidem (utut tardior & ad minorem altitudinem) Ponderis per Veſicam quàm per Rhombum elevatio. Adeóque abundantiùs conſtat propoſitum. Siquis verò exiſtimet, in inflatâ Veſicâ, non modo ambitum tranſverſum MO, ſed & erectum

MNOP,

MNOP, augeri: Utut ego contrarium potiùs putem, contrahíque non tantum altitudinem NP ſed & ambitum MNOP ob diſtentum ambitum NO; illud tamen ſi concedatur, non officit jam poſitis, ſed prodeſt potiùs: nam & ſic augebitur Veſicæ capacitas, aſcenſus P minuetur, adeóque facilitabitur, propter minorem altitudinis NP contractionem, dummodo tamen contractio fiat. Unde fortiùs adhuc confirmatur propoſitum; ne mirum ſit, (quod experimento comperimus,) inflatâ Veſicâ ſat grave Pondus elevari.

PROP. IV.

Solvuntur aliquot aliæ Quæſtiones Mechanicæ:

MUlta alia ſunt ad rem Staticam & doctrinam de Motu ſpectantia, quæ vel Capitibus ſuperioribus interſeri poſſent, vel pluribus adhuc capitibus materiam ſuppeditare, niſi quod operis moles jam nimium excreverit. Sed ea ex ſuprà traditis pleraque non difficulter elici poſſunt ad rem præſentem ritè accommodatis. Nonnulla tamen hic ſtrictim attingam; quæ utut res ludicræ non nemini forſan videri poſſint, ſeriam tamen in ſtaticis cauſam habent.

Verbi gratiâ. Si quæratur, Cur, *qui ad erectum murum ſtat erectus, dorſo & utriſq; calcibus murum attingens, non poteſt, niſi promoto pedum altero, nummum humi jacentem prorſum incurvatus tollere, quin præcipitabitur:* Ratio petenda à ſitu Centri gravitatis. Quippe, cùm fulcrum corporis ſit in pedibus, qui cadere non volet hoc curare debet ut totius Corporis Centrum gravitatis pedibus emineat, ſaltem non extra eorum extrema hac vel illac ulteriùs deflectat quam ut muſculorum & tendinum vires ſic poſitum ſuſtinere valeant & revocare. Hinc, qui erectus ſtat, ſtat firmus, utpote qui totam corporis molem habet pedibus ſupereminentem. Qui verò quid humo tollere velit, dum demiſſum Caput protendit antrorſum, Nates retrorſum tendit, quò fiat æquilibrium, centrúmque totius pedibus ſeu fulcro ſupereminear, ſaltem extra pedum ambitum vel non omnino vel tantillum deflectat. Qui autem propter murum à tergo hoc non poſſit, dum (quò quid humo tollat) protendit Caput non retractis Natibus, præcipitatur, (propter totius Centrum poſitum extra fulcrum ſeu fulcrorum extremum ambitum, & quidem magis quàm ut valeant tendines id oneris ferre iterúmque ſublevare;) ſaltem, niſi vertebrarum tendines, muſculíque eò ſpectantes, admodum robuſti fuerint.

 Hinc

Hinc item est, quòd *Alii fortiùs, alii molliùs terram ambulando feriant*, adeóque *sonitum majorem minorémque sonoro pavimento incedentes edant*. Nempe, duo sunt incedendi modi, utut pauci id animadvertant. Quippe, Alii, dum pedem promovendum attollunt, corporis centrum gravitatis à reliqui pedis perpendiculo non priùs amovent quàm pes promotus terram iterum attingat: (Atque hoc *Chorodidascali* seu *Saltatoriæ artis Magistri*, si rem suam intelligant, inprimis curare debent discipulis insinuandum, quò saltem uni pedi insistens corpus agile in omnem partem prout opus erit convertere paratus sit:) Alii vero festinantiores, dum pedem promovent, promovent simul & Centrum gravitatis; quod itaque, relicto priore fulcro, procidere statim incipit, donec pes promotus terram iterum attingens casurum sustineat; (apud quos itaque Incessus est quasi Casus & Sustentatio se mutuò continuè excipientes:) Hi itaque, propter procidentem corporis molem pondúsque, fortiùs terram feriunt & cum majori sonitu, quàm qui (sustento à pede altero totius Centro gravitatis & onere) pedem promotum molliùs demittunt; & quò præcipitantiùs Centrum gravitatis sic promovent, eò fortiùs solum feriunt.

Hinc item reddenda est ratio cur *Alii aliis sæpius titubent, & titubatu cadant:* Nempe, postquam relicto priori fulcro Centrum promovetur, promoto pedi mox statuminando confidens, si pes promotus vacillet aut infidæ terræ se committat aut expectato fulcro destituatur, decidit corpus, saltem casui proximum est; pariterque si inexspectatò pes impingat, ut non possit sat citò eatenus promoveri ut valeat cadenti corpori maturè ferre suppetias. Qui verò perstantis pedis fulcrum non priùs deserunt quàm pes promotus iterum firmetur, minùs sunt his periculis obnoxii: Adeóque, qui incedunt erecti, minùs quàm qui prono Capite.

Hinc porro est (quod Funambulos maximè spectat) quòd *Qui Dextrorsum casuri sint, protendant brachium Sinistrum; qui Sinistrorsum, Dextrum; qui Retrorsum, alterum vel utrumque Porrigant; qui Prorsum, Retrahant.* Nam qui Dextrorsum casurus (ob corporis centrum dextrorsum propendens) Sinistram protendit, sinistræ gravitationem auget (utpote remotiùs à fulcri perpendiculo positæ) adeóque commune totius Centrum gravitatis sinistrorsum retrahit, quo vel non omnino vel minùs ad dextram propendeat, & casum moliatur. Et in cæteris similiter.

Atque ad idem intenti sunt *Athletæ colluctantes*. Quippe qui, Antagonistæ corporis variè torquendo, Centrum gravitatis extra fulcrorum ambitum longiùs dimoverit, facilè illum subvertet.

Hinc

Huc item referendum erit, quòd, *Qui promiſſis brachiis incedunt, dum pedem dextrum promovent, promovent ſiniſtrum brachium; dum ſiniſtrum pedem, brachium dextrum.* Quippe hac alternatione totius Centrum melius retinetur in perpendiculo duobus pedibus ceu fulcris intermedio; nequà propendeat, totique caſum minitetur.

Item (quæ inter *Ariſtotelis* Quæſtiones Mechanicas occurrit) Cur, *Qui ſedet, non poteſt ſe in rectum erigere, niſi vel protenſo Capite, vel Pedibus retractis.* Nempe, qui ſedet, (puta, in ſitu C N G P, factis in N & G angulis rectis,) longè majorem corporis partem habet à G verſus N poſitam (nempe totam partem C N G, à Capite ad genua;) adeóque Centrum gravitatis (ejuſve perpendiculum) procul à G verſus N. Cùm itaque ſtanti futurum ſit Fulcrum in Pedibus P, adeóque (manentibus ut priùs cruribus G P in ſitu perpendiculari) revocandum ſit totius C N G Centrum ad perpendiculum G P, ut ipſi G ſupereminent; vix aut ne vix illud fiet niſi ſupra modum robuſtos ſupponamus muſculos tendinéſque eò ſpectantes. Erigendus enim eſt, rotationis Centro G, vectis G N (& ipſe gravis,) onere N C in extremo onuſtus. Si verò retrahantur pedes à P ad π, quò Fulcrum Centro gravitatis ſubjiciatur; vel protendatur caput à C ad κ, quò Centrum gravitatis propiùs ad P fulcrum Centrúmque motûs G feratur, aut etiam ipſis immineat; vel partim hoc, partim illud: magno onere liberantur muſculi tendinéſque. Fig. 336.

Hinc item reſpondendum quæſtioni, (quæ quamvis ridiculè proponi ſoleat, ſeriam tamen meretur reſponſionem,) Cur *Anſer horrei oſtium intrans utcunque altum*, (quod plauſtrum demeſſo tritico onuſtum admittere poſſit,) *Caput demittat.* Cui ridiculè reſpondere ſolent (acutè forſan, ut ipſi cogitant,) Quoniam Anſer eſt, (hoc eſt, animal ſimplex & imprudens;) id factum reputantes, quaſi metuerit anſer ne caput ſuperliminari (in tantâ diſtantiâ remoto) impingeret. Sed (niſi illud quandoque fiat, quòd anſer etiam ab ipſo ſtatim horrei introitu grana quærat quibus paſcatur;) vera cauſa eſt, quòd ad horrei oſtium (ſicut ad oſtia minora) poni ſoleat Limen (ſeu quod liminis inſtar ſit) ab anſere ſuperandum quo horreum ingrediatur: Quod ut fiat, pedum antecedente limini ſuperimpoſito, circa quod itaque ut fulcrum ſeu motûs Centrum rotandum erit corporis totius Centrum gravitatis, rotationem illam facilitat porrecto capite ultra limen, adeóque auctâ ipſius gravitatione, Centrum totius propiùs ad fulcrum admovet. (Sin dicatur, non ſemper eſſe ad oſtium horrei quod Liminis inſtar ſit, ſive Aſcenſus; dicendum, nec Anſerem ſemper introeuntem caput demittere.)

Quódque Anser ipsis ridiculus, idem faciunt ipsi, atque ob eandem causam; Nempe, *Dum scalam, gradus, montémve ascendunt, caput protendunt.* Causa est, quòd, hoc facto, facilior fiat circa pedem anteriorem, gradui scandendo impositum, rotatio, (quæ omnino facienda erit ut fiat ascensus,) ob porrectum capitis pondus ultra fulcrum. Saltem, si hoc nondum faciant, ab Ansere discant.

Item, Cur *Bajuli, si onus Humeris seu Tergo gestant, se antrorsum incurvant; si Ulnis, retrorsum:* & *Ancilla, si aquæ situlam promisso brachio sinistro ferat, dextrorsum se incurvat, (extento etiam brachio dextro;) si dextro, sinistrorsum; si utroque, recta incedit; similitérque si capiti impositam ferat.* Nempe his modis omnibus efficitur, ut Corporis Onerisque commune Centrum gravitatis communi fulcro superemineat, saltem extra fulcrorum ambitum minùs recedat.

Vidíque ipse non neminem, *Qui cum pondus, manibus latum, antrorsum projecit, cecidit ipse retrorsum.* Nempe; Quò Corporis Ponderisque commune Centrum gravitatis fulcro immineret, Corporis sui Centrum gravitatis nonnihil retro motum erat; quod itaque ipsum post separatum quod manibus gestaverat pondus, ita retraxit, ut antequam se in debitum situm restituere posset, retro ceciderit.

Aliáque multa, quæ à mutato totius Centro gravitatis ob mutatum situm dependent, (quorum exempla innumera, ne longè abeamus, animalium incessus aliique motus suppeditabunt,) solutionem ex eodem fonte sortientur.

Et quidem, de motibus purè Staticis (quæ à solâ Gravitate dependent) vel efficiendis vel non efficiendis, judicium fiet ex illo generali principio (à Torricellio aliisque passim adhibito;) *Si, effecto motu proposito, Gravis movendi Centrum gravitatis, vel Aggregati ex pluribus conjunctis Commune Centrum, descensurum sit; Motus consequetur: sin minùs; non consequetur.* Quod nos Universaliùs efferimus, (quò ad alios etiam motus res extendatur,) *Si Processûs Secundum directionem moventis, (vel aggregati processuum plurium,) Magnitudo (ex Virium gradu, & Altitudine processûs, æstimanda,) præpolleat Magnitudini (similiter æstimandæ) Regressûs (regressuúmve aggregati) Contra moventis directionem; Motus efficietur: Sin minùs; non efficietur.* Ut ex prop. 2, 5 6. Cap. 2. liquet. In motibus autem facilitandis, seu minori Vi perficiendis, *Pro diminutis Viribus effectricibus, in eâdem ratione diminuitur Celeritas;* (adeóque Virium defectus Temporis dispendio redimendum:) per prop. 27, 28, Cap. 1.

Atque

Atque hæc Principia, ad Quæſtiones Mechanicas innumeras ſive apud *Ariſtotelem* ſive alios occurrentes, ſive in communi vitâ humanâ paſſim obvias, ſolvendas; facile eſſet accommodare. Sed, creſcente volumine, alicubi tandem ſiſtendum erit, ne nimii ſimus; totique operi finis imponendus.

FINIS.

EMENDANDA.

IN Parte Secundâ (poſt priùs notata) *p.* 258. *l.* 26. atque à $\tau\alpha$, *p.* 263. *l.* 22. $\frac{1}{2}aR^2$. *p.* 271. *l.* 2. *(bis)* $5eR^2P + 3svRP$. *p.* 275. *l.* 13. quo. *p.* 297. *l. pen.* eſtque. *p.* 286. *l.* 11. Atque hinc. *l.* 19. rentur. *p.* 287. *l.* 2. Semiperipheriæ. *l.* 5. (ex una parte) $\xi o, \zeta \upsilon, \delta \kappa$. *l.* 6. $\alpha \kappa \tau$. *l.* 16. occurrunt rectæ zV. *l.* 18. AD, AE. *l.* 25. x$\xi\zeta$z. *l* 37. rectis XO. *l. ult.* XIα. *p.* 288. *l.* 18. propterea. *l.* 21. ſuo XO. *l.* 25. trianguli. *p.* 290. *l.* 20. quam bkCA. *p.* 291. *l.* 13. ſinum. *p.* 294. *l* 10. $+\frac{1}{2}as^2 =$. *l.* 27. *(infra) pro R*, lege 2*R*. *p.* 296. *l. ult.* dicatur S. *p.* 308. *l.* 2. $-\frac{1}{2}v^3R$; Reſpectu Aα, $av^2R - evR^2$; re- *p.* 311. *l.* 18. reſpectivas rectas. *p.* 315. *l. ult. Omn.* $\frac{1}{4}sR^2$. *p.* 319. *l.* 4. $\beta\alpha = \alpha$. *l.* 20. $3R^2P - 6eR^2$. *p.* 329. *l.* 1. & 5 hujus. *p.* 335. *l.* 5. $5asR + ash$. *p.* 344. *l.* 20. ut YP. *p.* 345. *l.* 33. magnitudinem. *p.* 348. *l.* 13. $\frac{2}{3}avR^2 - \frac{1}{3}as^2R$. *l.* 20. $h = 2R - v$. *p.* 352. *l.* 1. *Omnes s.* *p.* 354. *l.* 16. α, ſeu $\tau\beta = \alpha$. *l.* 18. *Omn.* $-\frac{1}{4}sR^2$. *p.* 355. *l.* 16. *dele* momentum. *l.* 27. Ab$\beta\alpha$. *l.* 30. Bb$\beta\alpha$. *p.* 359 *l.* 29 relinquuntur. *p.* 361. *l.* 21. ſic expeditis. *p.* 363. *l.* 4. ſuper ipſa. *l.* 10. *marg.* O. *p.* 364. *l.* 8. Ungulæ $\alpha\delta\kappa$. *l.* 13. $v = 2R$. *p.* 367. *l.* 18. *marg.* H. *p.* 369. *l.* 9. $-\frac{1}{3}s^3$; Diſtantia Centri gravitatis à TA, $\frac{1}{2}R - \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; à $\tau\alpha$, $\frac{1}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$; à BV, $v - \frac{1}{2}R + \frac{s^3}{3eR + 3sv}$: Momentum reſpectu A$\alpha$, $\frac{2}{3}vR^2 + \frac{1}{4}a^2R$. *l.* 11. $8vR^2 + 3a^2R$. *p* 370. *l.* 11. comprehenſam. *p.* 374. *l. ult.* $-\frac{1}{2}fR$. *p.* 375. *l.* 4. *marg.* 168, 173, 174. *p.* 176. *l* 3. quod æquale. *p.* 380. *l.* 12. Trapeziorum illorum. *p.* 385. *l. ult* $\frac{1}{4}a^2R$. *p.* 386. *l.* 3. $8vR^2 + 3a^2R$. *p.* 392. *l.* 10. $-\frac{1}{7}\frac{9}{2}s^2R^2$. *p.* 396. *l. à fine* 6. Baſeſque. *p.* 399. *l.* 8. $\frac{11}{24}fR^3$. *p.* 404. *l.* 26. $\frac{1}{3}as^2v + \frac{1}{4}s^3v$. *p.* 405. *l.* 17. lis. *p.* 406. *l.* 28, 31. eorundem. *p.* 422. *l.* 25. eiſdem rectis. *p.* 432. *l.* 3. inventam. *p.* 436. *l.* 30. plam. *p.* 437. *l.* 27. diſtantiæ ſi[illegible]. *p.* 438. *l.* 28. exhibitæ. *p.* 449. *l.* 26. $= \xi\delta$ fig. 170. *p.* 454. *l.* 5. prop. 6. hujus)

hujus) *p.* 458. *l.* 12. ipsæ b C. *p.* 466. *l.* 18. si dentur. *p.* 483. *l.* 32. ad C B. *p.* 486. *l.* 6. 7966955. *p.* 487. *l.* 10 *à fine.* =0.0127154. *p.* 504. *l.* 2. infini- *l.* 12. discriminis. *p.* 516. *l.* 13. Spiralem. *p.* 520. *l.* 24. enim M B. *p.* 521. *l.* 5. similiter. *l.* 6. *dele* quæ. *p.* 522. *l.* 11. prius feceram. *p.* 523. *l.* 10. componuntur ex. *p.* 529. *l.* 20. $\sqrt{:\frac{1}{2}aP} + \frac{1}{2}a^2:$ *p.* 534. *l* 2. applicatur. *p.* 535. *l.* 1. *marg.* Fig. 206. *p.* 537. *l.* 27. finibus versis A V. *p.* 539. *l.* 33. semi-quadrantalem. *p.* 540. *l.* 9. semi-quadrantalem. *p.* 545 *marg. l.* 15. M. *l.* 18. N. *p.* 551. *l.* 31. X S & S A. *p.* 552. *l.* 7. A O V, H D X. *l.* 8. A C I, H d x. *p.* 556. *l.* 24. Genitricis, aut hyperbolam hanc ubivis tangat. *p.* 558. *l.* 9. transiturum. *p.* 560. *l.* 28. $\frac{b^2L + n^2T}{b^2 - n^2}$. *p.* 561. *l.* 5. $\frac{b^2L + n^2T}{n^2 - b^2}$. *p.* 564. *l.* 7. m vel M. *p.* 565. *l.* 11. non attingat, Axis conjugatus: sin curvam tangat, perinde est ad utrumvis casum referas; quippe cum Hyperbolæ degenerant in opposita Triangula, quorum communis vertex est O punctum contactus, evanescente latere recto. *l.* 23. $\frac{n^2 - b^2}{L}T$. *l.* 24. axis est.

In Parte Tertia. *p.* 574. *l.* 23. quæ componitur ex. *p.* 575. *l.* 22. premat. *p.* 577. *l.* 2. nitendo. *p.* 579. *l.* 1. distantias. *l.* 6. major sit. *p.* 580. *l. pen.* pre- *p.* 581. *l.* 22. rationemque. *p.* 585. *l.* 31. labatur. *p.* 586. *l* 28. fulcri C. *p.* 599. *l.* 15. semi-onus. *l.* 18. *dele* plusquam. *l.* 19. Tignorum fere *Quatuordecim:* Nempe $\frac{1}{2}$ +. *l.* 20. $= 13\frac{1118}{1360}\frac{642}{668}$. *p.* 603. *l.* 4. semi-tigno. *l.* 6. $+\frac{1}{2}$. *l.* 7. $18\frac{77}{238} = 18\frac{11}{34}$. *l.* 13. Quatuordecuplum. *p.* 611. *l. pen.* par erit. *p.* 612. *l.* 35. amoliendum. *p.* 619. *l.* 37. Asperitas. *p.* 621. *l.* 23. angulus C O P. *p.* 622. *l.* 28. Rotam. *p.* 626. *l.* 11. absimilis. *p.* 628. *l.* 23. Declivitas. *p.* 632. *l.* 13. motuum. *p.* 635. *l. antepen.* cujusque. *p.* 637. *l* 4. ἰλίγγω. *p.* 650. *l* 5. βC^3. *p.* 659. *l.* 1. Scholium. *p.* 661. *l.* 26. habent. *p.* 681. *l.* 10. abstrusioribus. *p.* 685. *l.* 11. accommodari. *l. ult.* ad hanc. *p.* 697. *l. antepen.* $mrPC =$. *p* 699. *l.* 31. quæ mis- *p.* 700. *l.* 5. fuerint. *l.* 14. Phænomenum. *l.* 22. *marg.* Fig. 301. *p.* 721. *l.* 16. sed quod. *p.* 724. *l.* 5. vi altius. *p.* 737. *l.* 12. ni factum. *p.* 738. *l.* 34. aliquandiu. *p.* 742. *l.* 1. depressum. *p.* 756. *l.* 30. B A Y, P A Y. *p.* 760. *l.* 33. est ei.

Emendandorum numerum facilè excusaret difficultas operis, etiamsi plura essent. Sed eorum plurima sunt non nisi menda unius literæ, quæ in alio opere negligi possent, & solent; hic autem magni sæpe sunt momenti, adeòque in Lectorum gratiam studiosius collecta, numerum augere videantur.